CALCOLO COMBINATORIO - INDICE

CALCOLO COMBINATORIO

1 - STRATEGIE DI PENSIERO

1.1 - Premessa

Per "calcolo combinatorio" (C.C.) si intende una branca della matematica che studia i modi di raggruppare ed ordinare oggetti presi da un insieme assegnato, con l'obiettivo finale di contare il numero dei possibili raggruppamenti od ordinamenti.

Il C.C. ha fama, presso gli studenti, di essere piuttosto antipatico e “indigesto”. Perché mai?

A mio avviso, il motivo sta nel fatto che di norma i libri di testo, nel presentarlo, passano con *fretta eccessiva* alla trattazione astratta, alla terminologia specifica, alle formule!

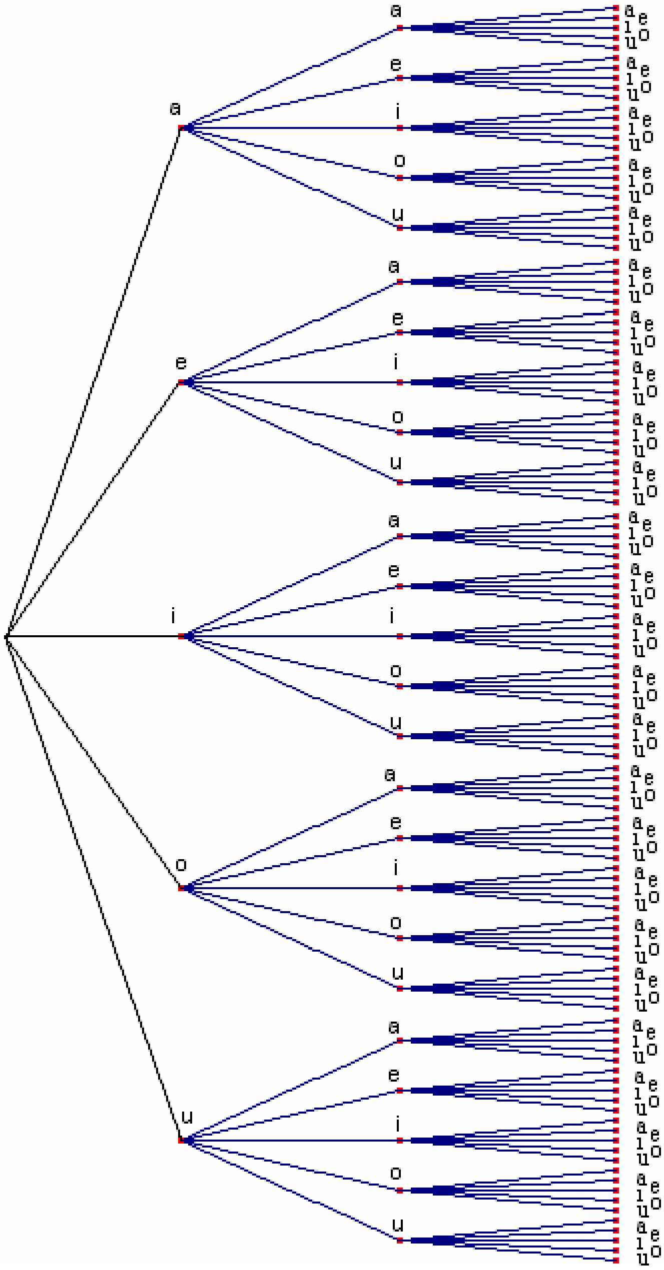
Qui si tenterà invece di dare un’introduzione AMICHEVOLE e per quanto possibile rassicurante del C.C.

- In questo paragrafo 1 faremo *pochissima teoria* e *molti esercizi*. Utilizzando solamente
  ♪ un metodo grafico (il "*grafo ad albero*", detto anche "diagramma ad albero" o "albero")
  ♫ e tre "*principi generali*",
  saremo in grado, senza pensare a formule precostituite e senza aver adottato una terminologia particolare, di *risolvere problemi* apparentemente complicati - ma, in genere, curiosi e divertenti.
- In tal modo, quando poi nel paragrafo 2 si passerà alle *generalizzazioni* e alle *formule*, il discorso dovrebbe risultare molto più chiaro e comprensibile.
- I paragrafi 3 e 4 metteranno a fuoco un gruppetto di *regole* interessanti e si occuperanno di alcuni *argomenti complementari*.
- E il conclusivo paragrafo 5 presenterà una bella e varia raccolta di esercizi.

1.2 - Il “primo principio” del C.C.

- **Problema 1**
  Quante parole (anche prive di senso: insomma, quante “sequenze”, quante “stringhe”) di 3 lettere possono essere composte utilizzando solo le cinque vocali? (es.: aoe, iii, uaa ...)

Per rispondere a questa domanda, e soprattutto per acquisire un metodo di ragionamento che ci servirà in tanti altri problemi di questo tipo, immaginiamo di SCRIVERE effettivamente tutte queste stringhe di tre lettere. Scriviamole, poi le conteremo.
Evidentemente, per evitare confusione, omissioni o ripetizioni, dovremo seguire un certo ordine, un certo schema nel "mettere giù" tutte queste stringhe. Per esempio, potremmo stilare un "grafo ad albero" come il seguente:



“**Stringa**” significa: “**sequenza di caratteri**”

Nel tracciare il grafo, si deve considerare innanzitutto il ventaglio di opzioni che si apre per la prima lettera.
Per la prima lettera si hanno 5 possibilità che sono quelle elencate in prima colonna (a, e, i, o, u).

Poi, ad ognuna di queste 5 possibilità,
si possono abbinare 5 possibilità per la seconda lettera della parola.
In totale, per le prime due lettere, abbiamo $5 \cdot 5 = 25$ possibilità (aa, ae, ai, ao, au; ea, …)

E per ognuna di queste $5 \cdot 5$ possibilità per le prime due lettere,
si aprirà un ventaglio di 5 possibilità per la terza lettera,
per cui in definitiva avremo $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ possibilità (aaa, aae, aai, …)

Risposta: le stringhe di 3 *lettere costruibili utilizzando solo le vocali sono* 125.

- **Problema 2**
  Quante sono le stringhe di 7 lettere costruibili utilizzando tutte le 21 lettere dell'alfabeto italiano?

Pensiamo ancora ad un "albero" come il precedente.
Ovviamente, non staremo a completarlo!
Vogliamo solo fissare bene in mente le modalità con cui il diagramma potrebbe, avendo tempo e pazienza, essere compilato.

[**grafo ad albero** (**non è qui, ma è nella tua mente…**)]

Risposta:
le stringhe di 7 *lettere che si possono costruire con le* 21 *lettere dell'alfabeto italiano sono* 21^7
(se calcoli questo numero con la macchinetta, troverai che supera 1 *miliardo e* 800 *milioni).*

- **Problema 3**
  Quante stringhe di 3 lettere possono essere scritte utilizzando solo le cinque vocali, ma senza ripetizione?
  (es.: aoe, uao, aei, … MA NON iii, uaa, eie, …)

E' chiaro che l'albero relativo al problema 1) si modificherà perdendo qualche ramo;
immagina di tracciare il nuovo albero, o, meglio, traccialo realmente, sul tuo quaderno!

Risposta: $5\cdot4\cdot3=60$

Ricapitoliamo il ragionamento:
abbiamo 5 possibilità per la prima lettera della stringa;
a ciascuna di queste 5 possibilità sono abbinate 4 possibilità per la seconda lettera
(quindi, per le prime due lettere abbiamo $5\cdot4$ possibilità);
e per ciascuna di queste $5\cdot4$ possibilità si apre un ventaglio di 3 possibilità per la terza lettera.
In definitiva, abbiamo $5\cdot4\cdot3=60$ possibili stringhe.

- **Problema 4**
  Quante sono le stringhe di 7 lettere costruibili utilizzando tutte le 21 lettere dell'alfabeto italiano, ma "senza ripetizione",
  cioè col vincolo di non utilizzare una lettera più di una volta nella stessa stringa?

Risposta: $21\cdot20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15$

- **Problema 4 '**
  Quante sono le stringhe di 7 lettere costruibili utilizzando tutte le 21 lettere dell'alfabeto italiano, ma "senza consecutività"?
  (Quindi, "abbcdef" sarebbe vietata, ma andrebbe invece bene "abababa")

Risposta: $21\cdot20\cdot20\cdot20\cdot20\cdot20\cdot20$

La risoluzione "col metodo del diagramma ad albero" dei problemi 1) ... 4') mostra che vale il seguente

PRIMO PRINCIPIO GENERALE DEL CALCOLO COMBINATORIO

Se una scelta può essere fatta in r modi diversi,
per ognuno dei quali una seconda scelta può essere effettuata in s modi diversi
e, per ciascuno dei modi in cui si sono compiute le prime due scelte,
una terza scelta può essere effettuata in t modi diversi
ecc.,
allora la successione di tutte le scelte può essere compiuta in
$\mathbf{r\cdot s\cdot t\cdot ...}$
modi diversi

(traduzione dal testo americano "Introduction to Finite Maths" di Kemeny-Snell-Thompson)

1.3 - Esercizi sul “primo principio” (risposte alla fine)

5) In una compagnia di quattro amici (Mario, Paolo, Roberto, Walter) bisogna scegliere un capo e un vice.
In quanti modi può essere effettuata la scelta?
Obbligatorio tracciare il diagramma ad albero (per brevità, usare solo le iniziali dei nomi!)

6) Per andare da una città A ad una città B ci sono quattro strade diverse.
In quanti modi è possibile "fare un giro" da A fino a B e ritorno?
E se al ritorno non si vuole ripercorrere la stessa strada dell'andata?
Obbligatorio un diagramma, per ciascuno dei due casi.

7) In un'urna ci sono quattro palline, contrassegnate coi numeri 1, 2, 3, 4.
Se si effettuano tre estrazioni, quanti sono gli esiti possibili, tenendo conto dell’ordine con cui vengono estratte le palline? (nel senso che, ad es., l’esito 1-2-3 sarà considerato distinto dall’esito 2-1-3)

Considerare separatamente i due casi:

a) dopo aver estratto una pallina, la si reintroduce (si dice: "la si reimbussola") nell'urna prima di effettuare l'estrazione successiva

b) le estrazioni avvengono una dopo l'altra, ma senza reimbussolamento.

Obbligatorio il diagramma ad albero, sia per il caso a) che per il caso b).

8) In un plotone di 25 militari bisogna scegliere:
a) un addetto alle pulizie b) un addetto alle cucine c) un soldato che monti di sentinella.
In quanti modi è possibile effettuare la scelta?

9) Un ladro è venuto a sapere che la combinazione di una cassaforte
- è formata da 5 cifre
- non contiene né la cifra 9 né la cifra 8
- non inizia con 0.

Quanti tentativi dovrebbe fare al massimo per esser certo di riuscire ad aprire la cassaforte?

10) Per giocare al “Totocalcio” ⇨ bisogna scegliere un pronostico (che può essere 1, X o 2)
per ciascuna delle 14 partite sulla schedina. Quante schedine diverse è possibile, teoricamente, compilare?

11) La moglie di un carcerato, per poter parlare col marito anche al di fuori delle ore di colloquio coi parenti, ha concordato con lui un codice basato sull'uso di quattro bandierine:
una Italiana, una Francese, una Americana e una del WWF.
Un messaggio può consistere nell'esposizione di una singola bandierina,
oppure di due, o tre, o tutte e quattro le bandierine.
Nel caso il messaggio sia costituito da più bandierine, conta anche l'ordine in cui queste si susseguono da sinistra a destra. Si domanda: quanti messaggi è possibile trasmettere con queste modalità?

12) Sappiamo che in ogni computer la memoria è costituita da tanti "bit",
essendo un "bit" un dispositivo fisico che può assumere due stati differenti.
Indicati convenzionalmente con "0" e "1" tali due stati fisici, diremo, in sostanza,
che un bit è un "qualcosa" che può assumere, di volta in volta, o il valore "0" o il valore "1".
Una sequenza di 8 bit forma il cosiddetto "byte". Ad esempio, 01110110 è un "byte".

a) Quante diverse "informazioni" può contenere un byte?

b) E quante informazioni diverse si potranno memorizzare in una sequenza di 10 byte?
Tenendo conto che $2^{10}=1024\approx 1000$, dai un'approssimazione per difetto del numero trovato.

RISPOSTE AGLI ESERCIZI

5) $4\cdot 3=12$ modi

6) $4\cdot 4=16$ modi;
se però al ritorno non si vuole fare la stessa strada dell’andata, i modi possibili si riducono a $4\cdot 3=12$

7a) $4\cdot 4\cdot 4=64$ 7b) $4\cdot 3\cdot 2=24$ 8) $25\cdot 24\cdot 23$ 9) $7\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8=28672$ 10) $3^{14}=4782969$

11) 4 messaggi con una sola bandierina;
$4\cdot 3=12$ messaggi con 2 bandierine;
$4\cdot 3\cdot 2=24$ messaggi con 3 bandierine;
$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ messaggi con 4 bandierine.
Totale 4+12+24+24 = 64 possibili messaggi.

12) a) $2^8=256$ b) $2^{80}=\left(2^{10}\right)^8=1024^8>1000^8=\left(10^3\right)^8=10^{24}=1$ milione di miliardi di miliardi

1.4 - Il “secondo principio” del C.C.

Consideriamo ora il seguente

- **Problema 13**

  Se 6 persone si vogliono mettere in fila da sinistra a destra (rispetto al fotografo) per una foto di gruppo, in quanti modi diversi possono farlo?

  Formulazione equivalente:

  se 6 persone arrivano contemporaneamente ad uno sportello, in quanti modi diversi possono mettersi in coda?

Facile:
per scegliere il primo elemento della fila (o della coda), abbiamo 6 possibilità;
in corrispondenza di ciascuna di queste 6 possibilità, abbiamo 5 possibilità per il 2° elemento;
abbinate a queste $6 \cdot 5$ possibilità abbiamo 4 possibilità per il terzo elemento;
per ciascuna di queste $6 \cdot 5 \cdot 4$ possibilità abbiamo 3 possibilità per il quarto elemento ecc ...

Risposta:
In totale, le 6 persone possono mettersi in fila (o in coda) in
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ (leggi: "6 fattoriale") modi diversi.

SECONDO PRINCIPIO GENERALE DEL C.C.
(CONSEGUENZA DEL PRIMO)

Dati n oggetti, essi si possono “mettere in fila”
(o “mettere in coda”, o “mettere in colonna”)
in
n! (leggi: “n fattoriale”)
modi diversi,
dove il simbolo n!
indica il numero
$\mathbf{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$.

Infatti,
per la scelta del primo oggetto della fila abbiamo n possibilità;
a ciascuna di queste n possibilità sono abbinate
(n–1) possibilità di scelta per il secondo oggetto della fila;
ad ognuna delle $\mathbf{n \cdot (n-1)}$ possibilità per i primi due oggetti
corrispondono (n–2) possibilità di scelta per il terzo oggetto della fila;
... ;
in totale, quindi, n oggetti possono essere ordinati
(= messi in fila, o in coda, o in colonna)
in
$\mathbf{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$
modi diversi.

- **Problema 14**
  Quanti sono i possibili anagrammi della parola "mora"
  (contando anche quelli che non hanno significato nella lingua italiana)?
  Obbligatorio il grafo ad albero.

Risposta:
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$

1.5 - n-uple ordinate e n-uple non ordinate

In tutti i problemi precedentemente considerati si trattava, in sostanza,
di "pescare" da un insieme per "costruire" delle "sequenze di n elementi"
(in una parola: "n-uple")
con l'obiettivo finale di contare il numero di tali n-uple.

Le n-uple andavano pensate "ordinate",
nel senso che occorreva tenere conto dell'ordine con cui gli elementi di una data n-upla si succedevano,
in quanto due n-uple costituite dagli stessi elementi, ma posti in ordine diverso, andavano considerate distinte.

Abbiamo dunque avuto a che fare con coppie ORDINATE, con terne ORDINATE, quaterne ORDINATE, ecc.

Ad esempio:
nel problema 1) andavano considerate distinte le due stringhe aio e oai, ossia le due terne (a, i, o) e (o, a, i);
nell'esercizio 11) andavano considerati distinti i due messaggi AF ed FA, ossia le due coppie (A, F) ed (F, A).

Una sequenza di n elementi si dice, genericamente, n-upla *(leggi: "ennupla")*
(per n=2 si parlerà di "coppia", per n=3 di "terna", per n=4 di "quaterna",
per n=5 di "cinquina", per n=6 di "sestina", per n>6 di "sequenza di 7, 8, 9, ... elementi").
Quando in un'n-upla consideriamo "importante" l'ordine in cui gli elementi si susseguono, parleremo di n-upla "ordinata", e la indicheremo con parentesi tonde:
$(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
Quando consideriamo irrilevante l'ordine, parleremo di n-upla "non ordinata" e useremo le graffe:
$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Per evitare equivoci, ribadiamo:

- **Due n-uple ordinate vengono considerate distinte anche se hanno gli stessi elementi, qualora l'ordine di tali elementi cambi dall'una all'altra:** $(a, o, i) \neq (a, i, o)$
E per indicare che un'n-upla va pensata ORDINATA, si utilizzano le parentesi TONDE.
- **Invece se due n-uple NON ORDINATE contengono gli stessi elementi, vengono considerate come un'unica n-upla, indipendentemente dall'ordine nel quale sono stati scritti gli elementi stessi, in quanto quest'ordine viene pensato come irrilevante:** $\{a, o, i\} = \{a, i, o\}$
E per indicare che un'n-upla va pensata NON ORDINATA, si utilizzano le parentesi GRAFFE, ovvero l'ordinario simbolo per indicare un insieme:
si sa che in un insieme non conta l'ordine nel quale si sceglie di elencare gli elementi.

1.6 - Il "terzo principio" del C.C.

❑ **Problema 15**
Una compagnia di 5 ragazzi, Aldo (A), Bruno (B), Carlo (C), Dario (D) ed Ernesto (E), deve passare una notte in una stanza in cui ci sono solo 2 letti.
In quanti modi è possibile scegliere i due ragazzi che dormiranno nei letti?
(gli altri tre si accontenteranno del sacco a pelo ...)

E' chiaro che in questo caso si tratta di contare il numero di coppie NON ordinate
che è possibile costruire "pescando" dall'insieme {A, B, C, D, E}.

Coppie NON ordinate, perché evidentemente
la scelta {C, E} e la scelta {E, C} andranno considerate "equivalenti", "non distinte",
andranno "contate come una scelta sola"
(supponiamo che i due letti siano identici e non siano uno più comodo dell'altro).

Per risolvere questo facile problema, e, soprattutto, per iniziare a familiarizzare con una "strategia di pensiero"
che ci servirà ogniqualvolta avremo a che fare con "n-uple non ordinate", procediamo nel modo che segue.

Facciamo (o immaginiamo di fare) un grafo che porti a costruire tutte le possibili coppie ORDINATE di ragazzi;
poi, prese due coppie ordinate "equivalenti"
(perché contenenti gli stessi due ragazzi, ma in ordine scambiato),
"le inglobiamo in una sola", "le consideriamo come se fossero una sola".

E' chiaro che il numero di scelte possibili sarà dato da $(5 \cdot 4)/2 = 10$.
Il "fratto 2" si deve al fatto che "di due coppie equivalenti ne facciamo una sola".

Consideriamo ora quest'altro problema:

- **Problema 16**
  Supponendo che i ragazzi del problema precedente siano 7 (A, B, C, D, E, F, G) e i letti 3, in quanti modi può essere effettuata la scelta?

Evidentemente, basterà pensare a tutte le terne ORDINATE di ragazzi,
poi raggruppare le terne equivalenti (=contenenti gli stessi elementi),
perché se più terne contengono gli stessi elementi, noi ne vogliamo "fare una sola".

Ma, presa una terna ordinata, ad esempio: la terna (A, D, E), QUANTE SONO le terne equivalenti ad essa?
Sono tante quanti sono i modi di mettere in fila 3 oggetti fissati, ossia sono 6
(comprendendo anche la terna di partenza): (A, D, E); (A, E, D); (D, A, E); (D, E, A); (E, A, D); (E, D, A).
Pertanto la risposta al problema è il numero $(7\cdot 6\cdot 5)/6=35$.

(ABC)	(ABD)	(ABE)	(ABF)	(ABG)	(ACB)	(ACD)	(ACE)	(ACF)	(ACG)	(ADB)	(ADC)	(ADE)	(ADF)	(ADG)
(AEB)	(AEC)	(AED)	(AEF)	(AEG)	(AFB)	(AFC)	(AFD)	(AFE)	(AFG)	(AGB)	(AGC)	(AGD)	(AGE)	(AGF)
(BAC)	(BAD)	(BAE)	(BAF)	(BAG)	(BCA)	(BCD)	(BCE)	(BCF)	(BCG)	(BDA)	(BDC)	(BDE)	(BDF)	(BDG)
(BEA)	(BEC)	(BED)	(BEF)	(BEG)	(BFA)	(BFC)	(BFD)	(BFE)	(BFG)	(BGA)	(BGC)	(BGD)	(BGE)	(BGF)
(CAB)	(CAD)	(CAE)	(CAF)	(CAG)	(CBA)	(CBD)	(CBE)	(CBF)	(CBG)	(CDA)	(CDB)	(CDE)	(CDF)	(CDG)
(CEA)	(CEB)	(CED)	(CEF)	(CEG)	(CFA)	(CFB)	(CFD)	(CFE)	(CFG)	(CGA)	(CGB)	(CGD)	(CGE)	(CGF)
(DAB)	(DAC)	(DAE)	(DAF)	(DAG)	(DBA)	(DBC)	(DBE)	(DBF)	(DBG)	(DCA)	(DCB)	(DCE)	(DCF)	(DCG)
(DEA)	(DEB)	(DEC)	(DEF)	(DEG)	(DFA)	(DFB)	(DFC)	(DFE)	(DFG)	(DGA)	(DGB)	(DGC)	(DGE)	(DGF)
(EAB)	(EAC)	(EAD)	(EAF)	(EAG)	(EBA)	(EBC)	(EBD)	(EBF)	(EBG)	(ECA)	(ECB)	(ECD)	(ECF)	(ECG)
(EDA)	(EDB)	(EDC)	(EDF)	(EDG)	(EFA)	(EFB)	(EFC)	(EFD)	(EFG)	(EGA)	(EGB)	(EGC)	(EGD)	(EGF)
(FAB)	(FAC)	(FAD)	(FAE)	(FAG)	(FBA)	(FBC)	(FBD)	(FBE)	(FBG)	(FCA)	(FCB)	(FCD)	(FCE)	(FCG)
(FDA)	(FDB)	(FDC)	(FDE)	(FDG)	(FEA)	(FEB)	(FEC)	(FED)	(FEG)	(FGA)	(FGB)	(FGC)	(FGD)	(FGE)
(GAB)	(GAC)	(GAD)	(GAE)	(GAF)	(GBA)	(GBC)	(GBD)	(GBE)	(GBF)	(GCA)	(GCB)	(GCD)	(GCE)	(GCF)
(GDA)	(GDB)	(GDC)	(GDE)	(GDF)	(GEA)	(GEB)	(GEC)	(GED)	(GEF)	(GFA)	(GFB)	(GFC)	(GFD)	(GFE)

Ricapitoliamo il ragionamento. Qui sopra sono elencate tutte le possibili terne ordinate.
Presa una terna ordinata, essa fa parte di una famiglia di 6 terne ordinate "equivalenti" fra loro
(perché contengono gli stessi elementi, se pure in ordine diverso).
Le terne ordinate equivalenti vengono "contate come una terna sola".
Il totale di $7\cdot 6\cdot 5$ terne ordinate viene così diviso per 6. Quindi, se ci sono 7 ragazzi,
la scelta di quei 3 che dormiranno nei letti potrà essere effettuata in $(7\cdot 6\cdot 5)/6=35$ modi.

- **Problema 17**
  In una fabbrica con 25 operai, se ne devono sorteggiare 6 per la pulizia dello stabilimento. Quanti sono i possibili esiti del sorteggio?

Ragioniamo dapprima sulle sestuple ordinate. Queste sono $25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20$.
Te le immagini, queste sestuple ordinate, tutte scritte una dopo l'altra? Sono veramente tantissime!

Bene. **Noi però vogliamo "raggruppare" tutte le sestuple "equivalenti"
(cioè, contenenti gli stessi operai, se pure in ordine diverso) per "farne una sola",
per "farne un gruppo che verrà contato come un'unica sestupla".**

**MA DATA UNA SESTUPLA, QUANTE SONO LE SESTUPLE ORDINATE
AD ESSA EQUIVALENTI (COMPRESA QUELLA DI PARTENZA)?
EVIDENTEMENTE, SONO TANTE QUANTI I MODI CON CUI, DATI 6 OGGETTI,
QUESTI POSSONO ESSERE ORDINATI (=MESSI IN FILA, O IN CODA).**

E il Secondo Principio del Calcolo Combinatorio ci dice che ciò può avvenire in
$6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=6!$ (leggi: "6 fattoriale") modi diversi.

Pertanto, fissata una sestupla ordinata, essa fa parte di un gruppo di 6! sestuple equivalenti.

Il lungo elenco delle $25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20$ sestuple ordinate di operai può essere così suddiviso in gruppi ciascuno dei quali contiene 6! sestuple. Ogni gruppo verrà contato come una sola sestupla non ordinata,
per cui il numero delle sestuple non ordinate di operai sarà $\dfrac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20}{6!}$

TERZO PRINCIPIO GENERALE DEL C.C. (CONSEGUENZA DEL PRIMO E DEL SECONDO)
**Se in un certo problema noi abbiamo considerato inizialmente tutte le n-uple ordinate,
ma in realtà ci interessano le n-uple NON ordinate,
dobbiamo pensare il nostro elenco di n-uple ordinate ripartito in tanti gruppi,
avendo noi posto in ciascun gruppo tutte le n-uple "equivalenti" ad un'n-upla data
(cioè, contenenti gli stessi elementi, se pure in ordine diverso).
Abbiamo così tanti gruppi, ciascuno formato da n! n-uple, e ciascun gruppo va contato
"come se si trattasse di una sola n-upla".
E' chiaro allora che il numero totale delle n-uple ordinate andrà diviso per n!**

1.7 - Esercizi (risposte alle pagine successive)

18) Una cartoleria ha in vendita 32 biglietti d'auguri tutti differenti, e io devo comprarne 5.
In quanti modi diversi posso effettuare la scelta?

19) In una compagnia di 20 bambini, per carnevale 18 indosseranno costumi da animaletti.
In quanti modi è possibile scegliere quei 18? (*pssst*: *… ragiona da "furbo"*!)

20) Quanti sottoinsiemi di 5 elementi contiene un insieme di 10 elementi?

21) Con 9 numeri fissati, possiamo costruire molte "quaterne" e molte "cinquine" .
Pensiamo sia le une che le altre "non ordinate".
   a) Sono più numerose le quaterne o le cinquine?
   b) E se si pensasse a quaterne e cinquine *ordinate*?
   In questo caso, sarebbero più numerose le quaterne o le cinquine?

22) I) 30 secondi di tempo per dire quante cinquine *non ordinate* è possibile formare con 6 numeri.
II) Altri 30 secondi per dire quante cinquine *ordinate*.

23) Dal mio guardaroba di 10 magliette e 8 paia di pantaloni voglio scegliere
3 magliette e altrettante paia di pantaloni per andare in ferie.
In quanti modi diversi posso effettuare la scelta?

24) In una classe di 28 allieve, tutte belle, intelligenti e sportive, bisogna scegliere:
- due rappresentanti di classe;
- una "miss";
- 7 ragazze per la squadra di calcetto femminile.

Stabilire in quanti modi diversi si può effettuare questa scelta
a) se gli incarichi sono incompatibili
b) se gli incarichi sono compatibili

25) Riprendiamo la situazione considerata nel problema 7).
In un'urna ci sono quattro palline, contrassegnate coi numeri 1, 2, 3, 4.
Supponiamo di estrarne 3, ma questa volta CONTEMPORANEAMENTE,
sicché non teniamo più conto dell'ordine di estrazione, ma soltanto di quali palline sono state estratte.
Quanti sono gli esiti possibili di questa estrazione?

26) In un mazzo da scopa ⇨ ci sono 40 carte. Si mischia.
In quanti possibili ordini diversi possono comparire le carte dopo la mischiata?

27) Se si effettuano 4 lanci di una moneta, quanti sono gli esiti possibili della sequenza di lanci,
tenendo conto anche dell'ordine di uscita delle Teste e delle Croci?
E' richiesto di tracciare il diagramma ad albero.

28) Devo distribuire a 10 bambini 5 mele, 2 banane e 3 pesche, ovviamente un frutto per ciascuno.
In quanti modi diversi posso effettuare la distribuzione?

29) Una ragazza possiede tre astucci di smalto per le unghie, di tre colori differenti.
In quanti modi può tingersi le unghie delle mani,
se vuole fare in modo che ciascun' unghia sia colorata in tinta unita
e non ci siano più di due colori diversi su ciascuna mano?

   [E' una libera traduzione da "Introduction to Finite Maths". Testo originale:
   "*A young lady has three shades of nail polish to paint her fingernails.*
   In how many ways can she do this – each nail being one solid color –
   if there are no more than two different shades on each hand?"]

30) Dimostra che a Perugia risiedono sicuramente almeno due persone con le stesse iniziali.

31) Ecco un esercizio che richiede tipicamente un *diagramma ad albero*.
7 persone (3 uomini e 4 donne) desiderano entrare a far parte di un "club" molto esclusivo. La direzione del "club" acconsente, a patto però di iscrivere soltanto una persona al mese, e soprattutto in modo tale che, fra i "nuovi acquisti" da quel momento in poi, si contino in totale sempre più donne che uomini.
In quanti modi diversi può avvenire la successione dei sessi nelle iscrizioni?

32) In una piccola sala d'aspetto c'è una fila di 5 poltrone.
Se il ragionier Bianchi, la signorina Rossi e il dottor Verdi vogliono sedersi,
in quanti modi diversi si possono disporre?

33) Stabilire in quanti modi possono disporsi, su di una fila di 4 sedie:
I) 1 persona II) 2 persone III) 3 persone IV) 4 persone
V) 5 persone (s'intende, una resterà in piedi) VI) 6 persone (due forzatamente resteranno in piedi)

OSSERVAZIONE: s'intende di considerare distinte fra loro anche due situazioni nelle quali, pur essendo le persone che si siedono e le sedie occupate le medesime, la collocazione delle persone sulle sedie sia differente.

INDICAZIONE: qualora le persone siano più nelle sedie, uno dei modi per ragionare (non l'unico: provaci anche diversamente!) è di immaginare che siano ... le sedie a scegliere le persone.
Così, nel caso V), indicate con 1, 2, 3 e 4 le sedie e con A, B, C, D, E le persone, diciamo che la sedia 1 ha 5 possibilità di scelta;
in corrispondenza di ciascuna di queste 5 possibilità ci sono 4 possibilità di scelta per la sedia 2 ecc.

33') Stabilire in quanti modi possono disporsi, su di una fila di k sedie, n persone, distinguendo i casi:
I) $n < k$
II) $n = k$
III) $n > k$

34) Quante sono le possibili schedine di totocalcio (14 partite) ⇨ con esattamente
5 pronostici "1", 8 pronostici "X" e 1 pronostico "2"?

35)
I) 9 persone vogliono mettersi in fila per una foto di gruppo. In quanti modi diversi si possono disporre?

II) Se vogliono invece fare due file (5 persone accovacciate davanti, le altre 4 in piedi in seconda fila) il numero delle possibili disposizioni cambia?

III) Se si tratta di 5 maschi e 4 femmine,
coi maschi accovacciati in prima fila e le femmine in piedi in seconda fila,
quante sono le possibili disposizioni? Aumentano o diminuiscono rispetto al caso I) ?

36) Un Liceo prevede per ciascuno studente l'obbligo di iscriversi
ad un minimo di 1 e un massimo di 2 fra 7 gruppi sportivi
(Pallavolo, Calcetto, Atletica, Ginnastica, Nuoto, Ballo, Tiro con l'arco).

I) Se tu sei uno studente di quel Liceo, quante scelte hai teoricamente a disposizione?

II) Se Nuoto e Tiro con l'Arco si svolgono contemporaneamente,
così da non poter essere scelte entrambe dallo stesso studente,
quante risultano le tue possibilità di scelta?

37)
I) Con 5 tessere rettangolari, recanti rispettivamente le 5 lettere A, B, C, D, E,
quante sequenze diverse si possono costruire?

II) E se le 5 tessere recano le lettere A, A, C, D, E, quante sequenze diverse si possono costruire con esse?

III) Rispondere al medesimo quesito nel caso le tessere rechino le lettere A, A, C, C, C

IV) Rispondere al medesimo quesito nel caso le tessere rechino le lettere A, A, C, C, E

38) Le pareti della mia cucina sono ricoperte da 800 piastrelle.
Volendo dipingere esattamente 50 piastrelle in giallo, 100 in rosso e 200 in blu,
lasciando bianche le rimanenti, in quanti modi sarebbe possibile effettuare il lavoro?

39) Nella mia libreria ho: 10 libri di Storia, 6 libri sugli Animali e 7 libri di Matematica. Voglio allinearli
su di uno scaffale, in modo però che i libri di una medesima materia siano tutti vicini fra loro.
In quanti modi diversi posso ordinare i miei 23 libri?

RISPOSTE AGLI ESERCIZI

18) $(32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28)/5! = 201376$

19) In tanti modi, quanti sono i modi con cui è possibile escluderne 2. Quindi: $(20\cdot 19)/2 = 190$

20) $(10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6)/5! = 252$

21a) Sono *tante* le quaterne non ordinate, *quante* le cinquine non ordinate.
Infatti, ad ogni quaterna possiamo associare biunivocamente una cinquina (quella dei 5 numeri rimanenti).
Verifica algebrica: n° quaterne non ordinate = $(9\cdot 8\cdot 7\cdot 6)/4! = 126$
n° cinquine non ordinate = $(9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5)/5! = 126$

21b) Sono di più le cinquine ordinate delle quaterne ordinate.
n° quaterne ordinate = $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 3024$
n° cinquine ordinate = $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 15120$

22) I) 6 cinquine non ordinate
(tante quanti sono i modi in cui si può escludere 1 numero dall'insieme dei 6 numeri dati)

II) $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 720$ cinquine ordinate

23) $\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}\cdot\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{3!}$

24) a) Se gli incarichi sono incompatibili: $\dfrac{28\cdot 27}{2}\cdot 26\cdot\dfrac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19}{7!}$

b) Se gli incarichi sono compatibili: $\dfrac{28\cdot 27}{2}\cdot 28\cdot\dfrac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{7!}$

25) Immediatamente: 4 (tanti quanti i modi di escludere una pallina dall'estrazione). Oppure: $(4\cdot 3\cdot 2)/3! = 4$

26) 40! (quaranta fattoriale). Davvero il gioco della scopa può essere molto vario … pur tenendo conto che due carte con lo stesso "ruolo", ad esempio: due "Re" che non siano di "denari", ossia di quadri (il seme "quadri" ha una funzione un po' speciale), sono, dal punto di vista del gioco, del tutto "intercambiabili".

27) $2^4 = 16$

28) Si tratta di scegliere i 5 bambini cui andranno le mele,
poi i 2 (fra i 5 bambini rimanenti) cui andranno le banane;
a questo punto, agli ultimi 3 bambini rimasti daremo le pesche.
La risposta è: $\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5!}\cdot\dfrac{5\cdot 4}{2}$

29) Questo problema è piuttosto complesso.
Pensiamo alla sola mano sinistra;
il numero k di possibilità che troveremo dovrà poi essere moltiplicato
per il numero di possibilità relative alla mano destra;
poiché questo secondo numero sarà evidentemente identico al precedente (e cioè k),
in definitiva il numero di possibilità richiesto dal problema sarà k^2
(evidentemente, va pensato come rilevante il fatto che una mano sia "la sinistra" e l'altra "la destra",
quindi questo risultato NON andrà diviso poi per 2).

1) Posso scegliere di colorare tutte e 5 le dita con lo stesso colore. Ho 3 possibilità.

2) Posso scegliere di colorare 1 dito con un colore e le altre 4 dita con un altro colore.
Per la scelta del singolo dito ho 5 possibilità.
Dopodiché, mi si apre un ventaglio di $3\cdot 2 = 6$ possibilità per la coppia di colori da usare.
Ho quindi $5\cdot 3\cdot 2 = 30$ possibilità.

3) Posso scegliere di colorare 2 dita con un colore e le altre 3 dita con un altro colore.
Per la scelta della coppia di dita ho $(5\cdot 4)/2 = 10$ possibilità.
Dopodiché, mi si apre un ventaglio di $3\cdot 2 = 6$ possibilità per la coppia di colori da usare.
Ho quindi $10\cdot 6 = 60$ possibilità.

1), 2), 3) esauriscono tutta la casistica.
Ho in totale $k=3+30+60=93$ possibilità per la mano sinistra.
Le possibilità per la coppia di mani sono dunque $k^2 = 93^2 = 8649$.

30) Le lettere dell'alfabeto sono 26
(mettendoci anche le varie J, K, X … che ben raramente compaiono nei cognomi italiani).
Dunque il numero di possibilità per le coppie ordinate di iniziali è $26 \cdot 26 = 676$,
di gran lunga inferiore al numero di abitanti di una città di media grandezza come Perugia.
E' vero che ci sono persone con il doppio cognome o con il doppio nome di battesimo;
ma si tratta di casi "rari".
Anche supponendo, per eccesso, che tali casi anomali costituiscano la metà della popolazione di Perugia,
rimarrebbe pur sempre l'altra metà, ben superiore ai 676 cittadini.
La coppia ordinata di iniziali è quindi costretta a ripetersi.

31) Il diagramma ad albero mostra che, rispettando i vincoli specificati, ci sono solo 5 possibilità.

32) La prima persona sceglie la sua poltrona: 5 possibilità.
A questo punto, la seconda persona sceglie la sua poltrona: 4 possibilità.
Si siede la terza persona: 3 possibilità.
$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ possibilità.

Evidentemente, ragioniamo così in quanto consideriamo rilevante l'individualità delle persone,
ossia non guardiamo solo quali sedie vengono occupate, ma "quali" e "da chi".
D'altronde, almeno dal punto di vista delle persone,
per il ragionier Bianchi avere accanto la signorina Rossi è diverso dall'avere accanto il dottor Verdi.

Se invece la nostra attenzione cadesse esclusivamente sulle sedie occupate, avremmo $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$ possibilità.

33) I) 4 modi II) $4 \cdot 3 = 12$ modi III) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ modi IV) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ modi
V) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ modi (anche: la persona che sta in piedi può essere scelta in 5 modi; dopodiché,
le 4 persone che vanno a sedersi potranno farlo in $4!$ modi: quindi, i modi possibili sono $5 \cdot 4! = 120$)

VI) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ modi (anche: le 2 persone che staranno in piedi possono essere scelte in $\frac{6 \cdot 5}{2}$ modi;

le 4 persone che vanno a sedersi potranno farlo in $4!$ modi: quindi, i modi possibili sono $\frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4! = 360$)

33') I) $k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot ... \cdot (k-n+1)$ Ordino le persone in un modo qualunque; la prima persona sceglie la sua sedia, e lo può fare in k modi … poi la seconda persona, ecc.

II) $k! = n!$ III) $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$

34) Scelgo le 5 partite a cui associare il pronostico "1", poi le 8 a cui associare "X", e alla restante assocerò "2".
Risposta: $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8!}$

Allo stesso numero approderei se pensassi alle 5 da marcare con "1" e poi a quella da marcare con "2".

Le rimanenti verrebbero marcate con "X". L'espressione sarebbe più semplice: $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} \cdot 9$

anche se a dire il vero pure quella ottenuta precedentemente $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8!}$

si può immediatamente semplificare: $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} \cdot \frac{9 \cdot \cancel{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}{\cancel{8!}}$

35) I) $9!$ II) No III) $5! \cdot 4!$; diminuiscono, rispetto al caso I)

36) I) $7 + (7 \cdot 6)/2 = 28$ possibilità.
II) In quel caso ho una possibilità in meno: 27 possibilità.

37) I) $5! = 120$ II) $\frac{5!}{2} = 60$ III) $\frac{5!}{2 \cdot 3!} = 10$ IV) $\frac{5!}{2 \cdot 2} = 30$

38) Gasp! $\frac{800 \cdot 799 \cdot \ ... \ \cdot 751}{50!} \cdot \frac{750 \cdot 749 \cdot \ ... \ \cdot 651}{100!} \cdot \frac{650 \cdot 649 \cdot \ ... \ \cdot 451}{200!}$ … Buon calcolo, io devo andare, ciao!

39) I 10 libri di Storia possono essere ordinati in 10! modi;
i 6 libri sugli Animali in 6! modi e i 7 libri di Matematica in 7! modi.
Poi però devo decidere come ordinare i "gruppi":
da sinistra a destra Storia-Animali-Matematica oppure Animali-Storia-Matematica oppure…
L'ordinamento dei gruppi può avvenire in 3! = 6 modi.
In totale, posso disporre i miei libri in $10! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 3!$ modi.

2 - IL C.C. IN ASTRATTO E IN FORMULE

2.1 - Le disposizioni

Supponiamo di avere n oggetti distinti
(ad esempio: n palline numerate progressivamente da 1 a n, oppure n lettere dell'alfabeto, ...).
Sia ora k un intero, $k \le n$.

Le k-uple ORDINATE che si possono costruire utilizzando (senza ripetizione) **k fra gli n oggetti dati**
sono anche dette
"le **DISPOSIZIONI** degli n oggetti dati, presi a k a k"
o anche
"le disposizioni di classe k, di quegli n oggetti".

Il numero di tali k-uple ordinate (= il numero delle disposizioni di n oggetti, presi a k a k)
si indica con $D_{n,k}$
e risulta, utilizzando quello che abbiamo chiamato il Primo Principio Generale del Calcolo Combinatorio,

$$\boxed{D_{n,k} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}$$

- Esempio 1 - Con 10 oggetti distinti, quante quaterne ordinate posso costruire?
  Risposta: $D_{10,4} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$

- Esempio 2 - Se ho 10 ragazzi, in quanti modi posso scegliere: un portiere, un arbitro e un raccattapalle?
  Risposta: $D_{10,3} = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$

2.2 - Le combinazioni

Le k-uple NON ORDINATE che si possono costruire utilizzando
(senza ripetizione) **k fra n oggetti dati**
sono anche dette
"le **COMBINAZIONI** degli n oggetti dati, presi a k a k"
o anche
"le combinazioni di classe k, di quegli n oggetti".

Il numero di tali k-uple NON ORDINATE (= il numero delle combinazioni di n oggetti, presi a k a k)
si indica con $C_{n,k}$ e risulta, utilizzando il Terzo Principio Generale,

$$\boxed{C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

OSSERVAZIONE
L'ultimo passaggio è stato ottenuto moltiplicando sia sopra che sotto per $(n-k)!$

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tale passaggio è possibile anche per $k = n$ perché

$$\boxed{\textbf{per convenzione, si pone } 0! = 1}$$

- Esempio 3 - Con 10 oggetti distinti, quante quaterne non ordinate posso costruire?
  Risposta: $C_{10,4} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 210$

IDEA-GUIDA
♪ **DISPOSIZIONI: c'entra l'ordine**
♫ **COMBINAZIONI: non c'entra l'ordine**

2.3 - Il coefficiente binomiale

I numeri $C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ vengono anche detti (per un motivo che chiariremo) “coefficienti binomiali”,

e si suole indicarli col simbolo specifico $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ che si legge “**coefficiente binomiale n su k**” .

Si ha dunque $\boxed{\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \dfrac{\mathbf{n!}}{\mathbf{k!(n-k)!}}}$ **o anche** $\boxed{\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{k!\cancel{(n-k)!}} = \dfrac{\mathbf{n(n-1)...(n-k+1)}}{\mathbf{k!}}}$

e il fatto che sia $\boxed{\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \mathbf{C_{n,k}}}$ porta alla seguente utilissima idea-guida:

IDEA-GUIDA SUL COEFFICIENTE BINOMIALE

Il coefficiente binomiale $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ risponde alla domanda :

"dati n oggetti, in quanti modi ne posso scegliere k?"

Ricordiamo che stiamo sempre supponendo $k \le n$. In particolare, si ha $\binom{n}{1} = n$ $\quad \binom{n}{n-1} = n$

Ricordando, poi, la convenzione $\boxed{0! = 1}$, possiamo scrivere anche $\binom{n}{0} = 1$ $\quad \binom{n}{n} = 1$

E’, ovviamente, opportuno *semplificare* le frazioni con fattoriali prima di svolgere il calcolo …

Esempi: $\dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 720;$ $\quad \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = \dfrac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} = 20$

- Esempio 4 - Ho un insieme di 7 oggetti distinti. In quanti modi posso sceglierne: a) 3? b) 2? c) 1? d) 6?
  Risposte:
  a) $\binom{7}{3} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$ b) $\binom{7}{2} = \dfrac{7 \cdot 6}{2!} = 21$ c) $\binom{7}{1} = 7$ (ovvio ...) d) $\binom{7}{6} = 7$ (ovvio : sceglierne 6 è come escluderne 1 ...)

La PROPRIETÀ più notevole dei coefficienti binomiali è la seguente: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

L’identità in questione è facile da dimostrare col calcolo (provaci!), e comunque si può subito ragionare così:

$\binom{n}{k}$ *è il numero di modi con cui è possibile, dati n oggetti, sceglierne k; ma sceglierne k equivale*

a scegliere quegli $n-k$ che si vogliono escludere; e tale ultima scelta si può effettuare in $\binom{n}{n-k}$ modi.

2.4 - Permutazioni

Le "**PERMUTAZIONI DI n OGGETTI**"
sono tutte le n-uple ordinate costruibili utilizzando, senza ripetizione, quegli oggetti;
il numero delle permutazioni di n oggetti si indica col simbolo P_n e dal Secondo Principio si ha subito:

$$\boxed{\mathbf{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}}$$

E’ evidente che $\boxed{\mathbf{P_n = D_{n,n}}}$:
il numero delle permutazioni di n oggetti coincide col n° delle disposizioni di quegli oggetti, presi a n a n.

IDEA-GUIDA Permutazioni: modi in cui è possibile permutare l'ordine di n oggetti (modi in cui è possibile ordinarli, metterli in fila, metterli in colonna)

- Esempio 5 - In quanti modi possono 5 persone mettersi in coda davanti ad uno sportello? *R.*: $P_5 = 5! = 120$

2.5 - Esercizi su disposizioni, combinazioni, permutazioni, coefficiente binomiale

Come ribadiremo nel commentare, alla pagina successiva, le soluzioni, si può ragionare

♪ cercando di ricondursi agli "schemi standard" delle disposizioni, combinazioni, permutazioni

♫ oppure semplicemente utilizzando quelle strategie di pensiero generali che abbiamo chiamato "1°, 2° e 3° principio del calcolo combinatorio".

Tu in questa rassegna di esercizi cerca magari di arrivare alla risposta *in entrambi i modi*: ogni confronto fra modalità equivalenti di approccio è *molto istruttivo*!

Tieni comunque presente che
(sebbene ognuno di noi abbia una propria tendenza individuale a privilegiare l'una o l'altra modalità)
la *seconda* sembra essere di norma *più efficace*.
Essa è anche *più generale*, perché permette di cavarsela con minore difficoltà
quando il quesito è complicato e non può essere banalmente ricondotto a un caso standard.

E' tuttavia MOLTO UTILE ricordare sempre che

quando si tratta di "contare il numero dei modi in cui, dato un insieme di *n* oggetti, è possibile scegliere *k* fra questi oggetti",

la risposta è data dal COEFFICIENTE BINOMIALE $\binom{n}{k}$.

40) 4 studenti devono essere interrogati, e bisticciano sull'ordine di "uscita".
In quanti modi è teoricamente possibile fissare quest'ordine?

41) 4 allievi devono accomodarsi, per un corso di recupero, in un'auletta vuota nella quale ci sono 8 banchi.
In quanti modi si possono disporre nell'aula?

42) Entra il bidello in un'auletta vuota, nella quale ci sono 10 sedie, per prendere, dato che servono in un'altra aula, 4 di queste sedie. In quanti modi può effettuare la scelta delle sedie da portar via, non essendo rilevante, ovviamente, l'ordine in cui le preleva?

43) Il mio contratto di lavoro è part-time, e mi richiede di essere in attività solo 3 giorni dal Lunedì al Venerdì.
In quanti diversi modi potrei fissare i 3 giorni lavorativi?

44) Fra 10 foto ne devo scegliere una da appendere in cucina, un'altra in tinello e una terza in camera da letto.
In quanti modi possibili posso effettuare questa tripla scelta?

45) Nadia è di animo tenero: essendosi trasferita in una casa con giardino, si reca al canile municipale, dove sono ospitati 10 animali, decisa a prenderne in affidamento ben 3. Impietosita dalla vista delle gabbie, decide di estrarre a sorte, anziché scegliere, i cani da adottare. Quanti sono i possibili esiti dell'estrazione?

46) In una classe di 20 studenti, ci sono solo 4 maschi! Se un bel giorno l'insegnante di Scienze ha deciso di estrarre coi bigliettini 6 studenti a caso a cui affidare il riordino del laboratorio,
I) quanti sono gli esiti possibili dell'estrazione?
II) fra tutti questi possibili esiti, quanti sono quelli nei quali compare
a) nessun maschio? b) tutti e quattro i maschi? c) uno e un solo maschio? d) almeno un maschio?

47) Sul corridoio di una scuola si affacciano 5 aule, tutte pressappoco della stessa ampiezza, che verranno occupate dalle 5 classi I A, II A, III A, IV A, V A.
In quanti diversi modi è possibile effettuare l'assegnazione delle aule alle classi?

48) In una classe di 20 allievi, 8 maschi e 12 femmine, dato che nessuno si è offerto di presenziare, di domenica pomeriggio, alla cerimonia di inaugurazione di un monumento, si decide di estrarre a sorte una delegazione di 3 maschi e 3 femmine. Quanti esiti diversi potrà avere l'estrazione?

49) Una password dev'essere obbligatoriamente di 4 caratteri, ciascuno dei quali può essere scelto fra le 26 lettere (maiuscole) dell'alfabeto inglese, oppure fra le 10 cifre da 0 a 9. Quante sono le password possibili?

50) Risolvi le seguenti *equazioni*: a) $\binom{x+1}{4}=5\binom{x-1}{3}$ b) $\binom{x}{3}=\binom{x}{2}$ c) $\binom{y}{4}=\binom{y}{6}$ d) $7\binom{x}{3}=4\binom{x}{4}$

e) $\binom{x}{2}+\binom{x}{3}=4x$ f) $\binom{w+2}{2}=28$ g) $3\cdot\left[\binom{x}{2}+\binom{x}{3}\right]=5\binom{x+1}{2}$ h) $\binom{x-1}{3}+\binom{x}{4}=\frac{2}{3}\cdot\binom{x-1}{2}$

51) Dimostra le seguenti *identità*: a) $\binom{2k-1}{k}=\binom{2k-1}{k-1}$ b) $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}$ f) $\dfrac{\binom{n-k}{h}}{\binom{n}{h}}=\dfrac{\binom{n-h}{k}}{\binom{n}{k}}$

c) $\binom{n}{k}=\frac{n}{n-k}\cdot\binom{n-1}{k}$ d) $\binom{n}{k}\cdot\binom{k}{p}=\binom{n}{p}\cdot\binom{n-p}{k-p}$ e) $\binom{2k-1}{k}=\frac{1}{2}\binom{2k}{k}$

RISPOSTE

40) In $P_4 = 4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$ modi. P_4 è il numero delle permutazioni di 4 oggetti, ossia il *numero dei modi in cui è possibile permutare l'ordine di 4 oggetti*.
Osserviamo che sarebbero bastate le tecniche generali di pensiero apprese nei paragrafi precedenti, e in particolare il 2° Principio Generale del Calcolo Combinatorio, per giungere facilmente alla risposta, anche senza aver mai sentito parlare di "permutazioni".

41) In $D_{8,4} = 8\cdot7\cdot6\cdot5 = 1680$ modi. $D_{8,4}$ è il numero delle disposizioni di 8 oggetti, presi a 4 a 4, ossia il n° delle quaterne ordinate che si possono costruire utilizzando (senza ripetizione) 4 fra gli 8 oggetti dati.
E' evidente che qui c'entra l'ordine: non è la stessa cosa, per Anna, trovarsi nel banco numero 3 piuttosto che nel numero 7, perché magari il banco 3 è proprio davanti alla cattedra mentre il 7 è più "tranquillo" …
Osserviamo che sarebbero bastate le tecniche generali di pensiero apprese nei paragrafi precedenti, e in particolare il 1° Principio Generale del C. C., per giungere facilmente alla risposta:
Anna può scegliere il suo banco in 8 possibili modi, dopodiché Bruno può scegliere uno dei banchi rimanenti in 7 possibili modi, Carlo può scegliere il suo in 6 modi, Donatella in 5 modi.
Diagramma ad albero … ventagli successivi di scelte … moltiplicazione $8\cdot7\cdot6\cdot5$.

42) $C_{10,4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\cdot6!} = \frac{10\cdot\cancel{9}^{3}\cdot\cancel{8}\cdot7}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1} = 210$ 43) $\binom{5}{3} = 10$ 44) $D_{10,3} = 10\cdot9\cdot8 = 720$ 45) $\binom{10}{3} = 120$

46) I) $\binom{20}{6} = \frac{20\cdot19\cdot\cancel{18}^{3}\cdot17\cdot\cancel{16}^{2}\cdot\cancel{15}}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1} = 38760$ possibili esiti

II) a) Tanti quanti sono i gruppi di 6 femmine, ottenibili "pescando" fra le 16 femmine: $\binom{16}{6} = 8008$

b) Tanti quanti sono i gruppi di 2 femmine! $\binom{16}{2} = \frac{16\cdot15}{2\cdot1} = 120$

c) Scelgo uno dei 4 maschi, e gli accosto un gruppo di 5 femmine! $4\cdot\binom{16}{5} = ... = 17472$

d) Il numero di esiti senza nessun maschio è, come abbiamo visto,
$\binom{16}{6} = 8008$; il n° tot. di esiti è $\binom{20}{6} = 38760$; la risp. è dunque $\binom{20}{6} - \binom{16}{6} = 38760 - 8008 = 30752$

47) $P_5 = 5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$

48) Devo scegliere i 3 maschi, e lo posso fare in $\binom{8}{3}$ modi; per ognuna delle $\binom{8}{3}$ possibili scelte dei maschi, mi si apre un ventaglio di $\binom{12}{3}$ possibilità per la scelta delle 3 femmine. La risposta è dunque $\binom{8}{3}\cdot\binom{12}{3}$.

49) Domanda-trabocchetto! Qui NON SI PUO' RAGIONARE IN TERMINI DI DISPOSIZIONI!
Infatti nulla vieta che un carattere, alfabetico o numerico, sia ripetuto due o più volte nella sequenza …
Più avanti studieremo a questo proposito le "disposizioni con ripetizione",
ma non sono comunque necessarie, per rispondere, conoscenze in più rispetto a quelle che già possediamo:
Per la scelta del 1° carattere ho $26+10=36$ possibilità, dopodiché mi si apre un ventaglio sempre di 36 possibilità per la scelta del 2° carattere … La risposta al quesito è $36^4 = 1679616$.

50) a) $\frac{(x+1)\cdot x\cdot\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x-2)}}{4!} = 5\cdot\frac{\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x-2)}\cdot(x-3)}{3!}$
Abbiamo semplificato per $(x-1)(x-2)$; ciò porterebbe a trovare le due soluzioni $x=1$, $x=2$ che però non sono accettabili perché, affinché abbiano senso $\binom{x+1}{4}$ e $\binom{x-1}{3}$, deve comunque essere $x\ge4$.
$\frac{(x+1)\cdot x}{4!} = 5\cdot\frac{x-3}{3!}$ $\frac{(x+1)\cdot x}{\cancel{4!}} = \frac{20(x-3)}{\cancel{4!}}$ $x^2+x=20x-60$ $x^2-19x+60=0$ $(x-4)(x-15)=0$ $\boxed{x=4} \vee \boxed{x=15}$

b) $x=5$ c) $y=10$ d) $x=10$ e) $x=5$ f) $w=6$ g) $x=6$ h) $x=4$

51) a) $\frac{(2k-1)(2k-2)...(2k\cancel{-1}-k\cancel{+1})}{k!} = \frac{(2k-1)(2k-2)...(2k\cancel{-1}-(k-1)\cancel{+1})}{(k-1)!}$
$\frac{(2k-1)(2k-2)...\cdot k}{k!} = \frac{(2k-1)(2k-2)...(k+1)}{(k-1)!}$; $\frac{(2k-1)(2k-2)...(k+1)\cdot\cancel{k}}{\cancel{k}(k-1)!} = \frac{(2k-1)(2k-2)...(k+1)}{(k-1)!}$ $\boxed{\text{OK}}$

2.6 - Disposizioni con ripetizione

Si parla di "**DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE" di n oggetti, di classe k** (anche: **"presi a k a k"**) quando uno stesso oggetto, nella k-upla ordinata, può essere ripetuto più di una volta.

In questo caso, non deve essere necessariamente $k \le n$: può essere $k \overset{<}{\underset{>}{=}} n$

Il numero delle disposizioni con ripetizione di n oggetti, presi a k a k,
si indica col simbolo

$$\mathbf{D'_{n,\,k}}$$

ed è immediato dimostrare, col Primo Principio Generale, che si ha

$$\boxed{\mathbf{D'_{n,\,k} = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\ \text{fattori}} = n^k}}$$

- Esempio 6

Utilizzando, con possibilità di ripetizione, i 3 simboli A, B, C,
quante stringhe di 5 lettere posso comporre?
(Per "stringa" si intende una "sequenza di caratteri": esempio BBCAB)

Risposta:
$D'_{3,5} = 3^5$

Questo comunque è un "classico" problema nel quale è probabilmente più comodo, anziché pensare alla terminologia specifica e alle formule, utilizzare i semplici e spontanei "principi generali" del calcolo combinatorio: per il primo elemento della stringa ho 3 possibilità, per ciascuna delle quali si apre poi un ventaglio di 3 possibilità per la scelta del secondo elemento della stringa, ecc.:
… penso al diagramma ad albero … e scrivo la risposta $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$

- Esempio 7

Quante colonne è possibile teoricamente giocare
nel gioco del totocalcio?
(14 partite, pronostico per ogni partita: 1, o X, o 2)

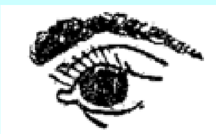
Risposta

Volendo, è un problema di disposizioni con ripetizione.
Comunque, si ragiona meglio senza formule:
per il primo posto in alto nella colonna ho tre possibilità: 1, X, 2;
per il secondo posto ho ancora 3 possibilità ...
… ecc ...

Dunque: $3^{14} = 4782969$

X
X
X
1
2
1
1
X
2
1
X
X
2
1

Un esempio
di "colonna"
del totocalcio.
La versione "moderna"
è a 14 partite;
fino all'anno 2003
le partite in schedina
erano solo tredici



IDEA-GUIDA

Nel trattare questioni e problemi sul Calcolo Combinatorio,
puoi alternare liberamente,
a seconda delle tue preferenze
e a seconda di come di volta in volta ritieni opportuno,

♪ **l'APPLICAZIONE DELLE FORMULE**
♫ **con il RAGIONAMENTO DIRETTO, basato sui Principi Generali appresi.**

- Esempio 8

Se si lanciano 10 monete
(o anche: se si lancia una moneta 10 volte)
quanti sono gli esiti possibili?
(Ad esempio, un esito potrebbe essere CCTTCTTTCT)

Risposta: $2^{10} = 1024$

2.7 - Permutazioni di n oggetti non tutti diversi

Possiamo pure pensare alle
"**PERMUTAZIONI DI n OGGETTI NON TUTTI DIVERSI**".
Presi n oggetti, dei quali m<n uguali fra loro, e gli altri tutti diversi l'uno dall'altro e dai precedenti, quante n-uple ordinate distinguibili potremo costruire utilizzando quegli n oggetti?
Il numero di tali n-uple si indica con $P_n^{(m)}$ ed è abbastanza facile dimostrare che si ha

$$\boxed{\mathbf{P_n^{(m)} = \frac{P_n}{m!} = \frac{n!}{m!}}}$$

Per la dimostrazione, è sufficiente utilizzare un artificio che ci è ormai consueto:
quegli m oggetti che sono identici, pensiamoli inizialmente distinti,
poi considereremo "come se fosse una sola n-upla" tutto quel gruppo di n-uple che,
per effetto della indistinguibilità fra gli m oggetti, appaiono identiche;
ma il numero di tali n-uple è, evidentemente, m! (m fattoriale),
perché coincide col numero di modi in cui è possibile permutare l'ordine di quegli m oggetti.

GENERALIZZAZIONE
Siano dati
n oggetti, dei quali m uguali fra loro, r uguali fra loro, s uguali fra loro ... (m+r+s+... = n).
Quante n-uple ordinate distinguibili potremo costruire?
Il numero di tali n-uple si indica col simbolo $P_n^{(m,r,s,...)}$
e si potrà dimostrare, riadattando la tecnica vista appena sopra, che

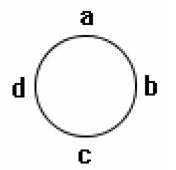
$$\boxed{\mathbf{P_n^{(m,\,r,\,s,\,...)} = \frac{n!}{m!\cdot r!\cdot s!\cdot ...}}}$$

- Es. 9 - Avendo 3 palline bianche identiche fra loro, 6 rosse identiche fra loro e 5 verdi identiche fra loro, quante sequenze distinguibili potremo costruire con questi 3+6+5=14 oggetti?
  R.: $P_{14}^{(3,6,5)} = \dfrac{14!}{3!\cdot 6!\cdot 5!}$

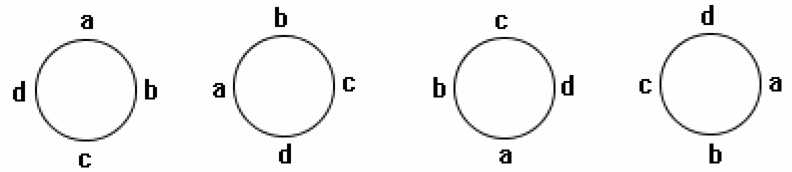
2.8 - Permutazioni cicliche

Si può pure parlare di
"**PERMUTAZIONI CICLICHE DI n OGGETTI**".
Una "permutazione ciclica di n oggetti" è
"uno dei modi in cui tali oggetti possono essere disposti intorno ad un tavolo circolare,
come se fossero giocatori di carte".

E' evidente che
la situazione



coincide, in questo contesto, con ciascuna delle seguenti (giocatori "ruotati"):



per cui

il numero $P_n^{'}$ delle permutazioni cicliche di n oggetti
è uguale al numero delle permutazioni di n oggetti, diviso per n:

$$\boxed{\mathbf{P'_n = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!}}$$

- Es. 10 - In quanti modi si possono disporre 5 giocatori di carte intorno a un tavolo?
  R.: 4! = 24

2.9 - Esercizi vari

Si può ragionare

♪ cercando di ricondursi agli "schemi standard"
delle disposizioni o combinazioni,
con o senza ripetizione, con oggetti tutti diversi o non tutti diversi, semplici o cicliche;
o delle permutazioni …

♫ oppure semplicemente utilizzando quelle strategie di pensiero generali che abbiamo chiamato "1°, 2° e 3° principio del calcolo combinatorio".

Tu in questa rassegna di esercizi procedi come ritieni, ma sarebbe istruttivo
tenere presenti, per giungere alla risposta, *entrambe le modalità,* con un confronto *molto istruttivo*.

Le RISPOSTE, al termine della rassegna, quasi sempre contengono anche la spiegazione del procedimento.
Osserva, però, che questi esercizi ti saranno tanto più utili, quanto più ti darai da fare
senza cedere alla tentazione di andare a vedere la soluzione bell'e pronta.
Non scoraggiarti se dovessi trovarne qualcuno particolarmente impegnativo: i quesiti difficoltosi sono i più belli, perché stimolano più degli altri il ragionamento e la capacità di trovare strategie alternative.

52) In una festicciola di compleanno, ci sono 8 coetanei, 4 maschi e 4 femmine.
Si balla il "lento"! In quanti modi diversi si possono formare le coppie?

53) I 25 studenti di una classe devono effettuare una "prova di evacuazione",
per simulare l'abbandono dell'aula di fronte a un'emergenza.
L'aula ha una sola porta. In quanti ordini diversi potrebbero teoricamente uscire?

54) In una classe di 25 allievi, si estraggono a sorte i 5 che dovranno pulire l'aula dopo la festa di fine anno.
Quanti esiti diversi potrà avere l'estrazione?

55) In una classe di 20 allievi occorre scegliere i 2 studenti che verranno interrogati domani, e i 4 a cui toccherà l'interrogazione il giorno dopo. In quanti modi diversi è possibile effettuare la doppia scelta?
Distinguere i due casi:
a) non conta l'ordine degli studenti, ma solo quali vengono scelti per un dato giorno;
b) importa anche l'ordine con cui gli studenti vengono estratti, e saranno di conseguenza interrogati.

56) 20 studenti devono essere suddivisi, per una competizione interna alla classe, in due gruppi da 10.
In quanti modi è possibile effettuare la suddivisione?

57) Quante sono le colonne del totocalcio (forma "moderna", con 14 partite; pronostici possibili, per una partita: 1, X, 2) contenenti esattamente 4 pronostici "1", 7 "X" e 3 "2"?

58) Due impiegati ben poco volonterosi, dovendo sbrigare una montagna di pratiche arretrate,
decidono che inizieranno solo dopo aver disputato una partita a battaglia navale,
su di uno schema a 7 colonne A, B, C, D, E, F, G e 7 righe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Quante sono le possibili "chiamate"?

59) Per passare dalla località A alla località B ci sono 3 strade diverse,
dopodiché per passare da B a C ci sono altre 3 strade diverse.
Se Piero vuole fare una gita "andata e ritorno" A-B-C-B-A, senza però mai passare
due volte per la stessa strada, in quanti modi differenti può scegliere il tragitto?

60) Sono di più gli anagrammi della parola TOSTO o quelli della parola BABBO??

61) In una classe di 25 allievi, la professoressa di Latino annuncia di voler interrogare, il giorno dopo, 5 persone.
In quanti modi diversi può essere compilata la lista dei malcapitati, tenendo conto anche dell'ordine?

62) Un insieme ha 10 elementi. Quanti sono i suoi sottoinsiemi di 4 elementi?

63) Un insieme ha 10 elementi. Quanti sono complessivamente i suoi sottoinsiemi?

64) Ciascuno dei 10 vincitori coinvolti in una cerimonia di premiazione
stringe la mano, una e una sola volta, a ciascuno degli altri. Quante strette di mano?

65) Un insegnante intende assegnare una verifica ai suoi 24 allievi,
ma vuole suddividerli in 4 gruppi di 6 allievi ciascuno,
per assegnare a ciascun gruppo una versione differente (A, B, C o D) della prova.
In quanti modi diversi può essere effettuata la suddivisione+assegnazione?

66) Quante diagonali ha un decagono?

67) In una classe di 25 allievi, 20 sono le femmine e solo 5 i maschi.
Se per le interrogazioni programmate di Chimica si decide che
il gruppo dei maschi debba precedere, per cavalleria, quello delle femmine,
in quanti modi diversi potrà essere redatta la lista dell'ordine complessivo dei nomi?

68) Quanti sono i numeri che hanno 10 cifre, tutte diverse fra loro?
(Tieni presente che "0" non può essere la cifra iniziale!)

69) Quanti sono i numeri di 6 cifre, con esattamente 3 cifre "9" e 3 cifre "8"?

70) Quanti sono i numeri di 6 cifre, tutte non nulle, e uguali a tre a tre? (es. 557577, 144411 …)

71) Quanti sono i divisori di 1000000? (indicazione: 1000000 è il prodotto di una potenza di 2 con una potenza di 5, e i suoi divisori sono perciò quei prodotti $2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$ ottenibili scegliendo α tra … e β tra …)

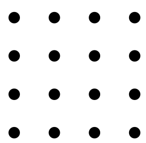
72) Stabilisci quanti sono i numeri interi di 4 cifre, che hanno almeno una delle cifre pari.

73) Quanti sono i numeri, di almeno 2 cifre, ma minori di 1000, con le cifre tutte diverse fra loro?

74) Papà, mamma e i 4 figlioli si siedono ad un tavolo circolare.
   a) In quanti modi diversi si possono disporre?
   b) E se mamma e papà vogliono essere una a fianco dell'altro?
   c) E se mamma e papà NON vogliono stare una a lato dell'altro?

75) Se abbiamo 5 rette su di un piano, quanti triangoli possono formare, al massimo?

76) Stabilisci quanti sono i triangoli che hanno per vertici tre dei punti della figura sottostante:



77) Un "byte" è una sequenza di 8 "bit".
Un "bit" è una "cifra binaria", che può valere 0 oppure 1.
Quanti differenti byte è possibile scrivere in modo da avere, in ciascun byte:
   a) esattamente due "1"?
   b) almeno due "1"?

78) I numeri in base cinque possono avere come cifre solamente 0, 1, 2, 3 oppure 4.
Quanti sono gli interi, in base cinque, aventi esattamente cinque cifre?
(Notare che la cifra iniziale non può essere 0)

79) In un insieme di 25 parlamentari, occorre sceglierne 5 per formare una commissione di inchiesta;
dei 5, uno dovrà fungere da Presidente e un altro da Segretario.
Stabilire un quanti modi può essere effettuata la scelta.

80) Una trattoria permette di scegliere fra 2 primi, 3 secondi, 4 dessert.
In quanti modi diversi è possibile pranzare
   a) supponendo di dover prendere tutte e tre le portate?
   b) supponendo di poter prendere il dessert o in alternativa rinunciarvi?
   c) supponendo di poter prendere tutte e tre le portate, o in alternativa solo due?

81) Se ad una gara a quiz prendono parte 25 persone, e vengono assegnate la medaglia d'oro,
quella d'argento e quella di bronzo, quanti potrebbero teoricamente essere gli esiti della premiazione?

82) Un numero (intero) si dice "palindromo" se rimane invariato, riscrivendolo all'incontrario.
Esempi di numeri palindromi:
404, 7227, 12321, 88, 0, ...
Quanti sono i palindromi
   a) con 6 cifre?
   b) con 7 cifre?
   c) con 8 cifre?

RISPOSTE

52) $4!=24$ 53) $25!$ 54) $\binom{25}{5}$ 55) a) $\binom{20}{2}\cdot\binom{18}{4}=\frac{20\cdot 19}{\cancel{2}\cdot 1}\cdot\frac{18\cdot 17\cdot \cancel{16}\cdot \cancel{15}^{\,5}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}=581400$ b) $20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15$

56) $\binom{20}{10}\cdot\frac{1}{2}=184756\cdot\frac{1}{2}=92378$ modi.

Infatti basta scegliere, sui 20 alunni, i 10 della squadra A, e automaticamente resteranno selezionati, per esclusione, anche i componenti della B … Sennonché, **in questo modo, ogni sottoinsieme di 10 persone verrebbe individuato 2 volte (una volta come squadra A e un'altra come squadra B, allorquando come squadra A si scelgono le 10 persone rimanenti), da cui la moltiplicazione per ½ del numero ottenuto.**

Se tuttavia ci fosse una qualche "asimmetria", nel senso che la squadra "A" sia destinata a operare in condizioni parzialmente diverse dalla "B", allora la moltiplicazione per ½ andrebbe evitata.
Ma nel nostro caso l'enunciazione del quesito sembra sottintendere che non ci sia differenza fra "A" e "B", quindi la presenza di quel fattore ½ appare coerente col testo del problema.

57) $P_{14}^{(4,7,3)}=\frac{14!}{4!\cdot 7!\cdot 3!}$; oppure: scelgo i 4 posti che verranno occupati dagli "1", poi ... : $\binom{14}{4}\cdot\binom{10}{7}$

58) $7\cdot 7=49$ 59) $3\cdot 3\cdot 2\cdot 2=36$

60) Quelli della parola TOSTO sono in numero di $\frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!}$, mentre quelli della parola BABBO sono $\frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!}$.

Vince TOSTO, che ha più anagrammi.

61) $25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21$ 62) $\binom{10}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210$

63) $\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\ldots+\binom{10}{10}$.
Ma è noto dalla Teoria degli Insiemi, e lo vedremo meglio nel cap. 3), che tale numero è uguale a 2^{10}.

64) $10\cdot 9/2=45$

65) $\binom{24}{6}\cdot\binom{18}{6}\cdot\binom{12}{6}\cdot\binom{6}{6}$ dove **l'essere l'ultimo fattore uguale a 1 corrisponde al fatto che, una volta fissati i primi 3 gruppi, il 4° e ultimo resta univocamente determinato per esclusione.**

66) $10\cdot(10-3)/2=10\cdot 7/2=35$ 67) $5!\cdot 20!$

68) $10!-9!$ Da 10!, che è il numero di modi in cui posso mettere in ordine le 10 cifre 0, 1, 2, … , 9, devo sottrarre il numero delle sequenze di 10 cifre inizianti con 0;
ma queste sono tante, quanti sono i modi in cui è possibile mettere in ordine le 9 cifre 1, 2, 3, … , 9.
Oppure: per la prima cifra ho 9 possibilità di scelta (perché devo escludere lo 0),
poi per la seconda 9 (rientra in gioco lo 0, ma va evitata la ripetizione), poi per la terza 8 …
In questo modo ottengo $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=9\cdot 9!$ possibili sequenze;
e d'altra parte si può constatare che questo risultato "va d'accordo" col precedente, perché
$10!-9!=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1-9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot(10-1)=9!\cdot 9$

69) $\binom{6}{3}$ che è poi il numero di modi con cui posso scegliere i 3 posti per la cifra 9; oppure $P_6^{(3,3)}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}$

70) $9\cdot 8\cdot\binom{6}{3}\cdot\frac{1}{2}$. Scegliamo una coppia ordinata di cifre non nulle,

poi scegliamo, sui 6 posti disponibili, quei 3 nei quali collocare la prima fra queste due cifre … sennonché, così facendo, una stessa situazione verrebbe contata 2 volte, ad esempio:
la scelta di cifre (4, 9), seguita dalla scelta dei primi 3 posti per il 4, determinerebbe la sequenza 444999, ma anche la scelta di cifre (9, 4), seguita dalla scelta degli ultimi 3 posti per il 9, porterebbe alla medesima sequenza di cifre!!! … Da cui la moltiplicazione finale per ½.

Anche: $\binom{9}{2}\cdot\binom{6}{3}$ dato che $\binom{9}{2}$ è il numero di modi in cui è possibile scegliere una coppia *non ordinata* di cifre non nulle, $\binom{6}{3}$ è il n° di modi in cui si possono scegliere, fra i 6 posti, quei 3 che conterranno *la minore* delle due cifre.

71) Osserviamo che $1000000=10^6=2^6\cdot 5^6$. I divisori di 1000000 sono perciò i numeri della forma $2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$, dove α e β sono due interi, ciascuno dei quali potrà valere 0, 1, 2, 3, 4, 5 o 6.
Si tratta di determinare in quanti modi sia possibile scegliere la coppia (α,β);
e la risposta è in $7\cdot 7=49$ modi. Perciò 1000000 ha 49 divisori.

72) Le cifre sono 10 in totale, di cui 5 pari (0, 2, 4, 6, 8) e 5 dispari (1, 3, 5, 7, 9).
I numeri con 4 cifre sono complessivamente tanti quant'è il prodotto $9\cdot10\cdot10\cdot10=9000$
(il primo fattore 9 è dovuto al fatto che la prima cifra a sinistra non può essere 0;
d'altronde, ragionando in modo diverso, tali numeri sono quelli che vanno
da 1000 compreso fino a 9999 quindi il loro conteggio porta a $9999-1000+1=9000$).
I numeri di 4 cifre, tutte dispari, sono $5\cdot5\cdot5\cdot5=625$.
La risposta al quesito si ottiene perciò sottraendo: $9000-625=8375$.

73) Con 2 cifre: $9\cdot9=81$ (la prima cifra la posso scegliere in 9 modi, perché non può essere 0;
per ognuno di questi modi, mi si apre un ventaglio di 9 possibilità di scelta per la seconda cifra,
perché questa non dovrà essere uguale alla prima, ma in compenso c'è anche la possibilità che valga 0).
Con 3 cifre: $9\cdot9\cdot8=648$ numeri. Con 2 o 3 cifre: $648+81=729$ numeri.

74) a) $P'_6=\frac{P_6}{6}=\frac{6!}{6}=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

b) $3!\cdot4\cdot2=3\cdot2\cdot1\cdot4\cdot2=48$. Infatti:
si siedono i 4 bambini, e, tenuto conto della ciclicità, lo possono fare in $3!$ modi;
a questo punto il papà ha 4 modi per scegliere fra quale coppia di figli mettere la sua sedia,
e infine la mamma ha soltanto 2 possibilità,
perché, volendo stare accanto al papà, può solo scegliere se stare alla sua destra o alla sua sinistra.

c) $5!-3!\cdot4\cdot2=120-48=72$

75) Evidentemente, per massimizzare il numero dei triangoli, non dovranno esserci coppie di rette parallele,
e per il punto di intersezione di due rette non dovrà mai passare una terza retta.
Supponendo dunque che le rette siano scelte in questo modo, ogni retta intersecherà ogni altra retta
in uno e un solo punto e i punti di intersezione saranno in totale tanti quante le coppie di rette, ossia
$\binom{5}{2}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$.
Ma con 10 vertici, quanti triangoli si hanno?
$\binom{10}{3}=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$ è il numero di terne di vertici,
sennonché sarebbe ingenuo dire che ci sono 120 triangoli:
i triangoli sono in realtà di meno, perché bisogna escludere quelle terne di punti che sono allineati fra loro,
e che pertanto non individuano un triangolo.
Su ogni retta abbiamo 4 vertici (corrispondenti ai punti di intersezione di quella retta con le altre 4 rette);
ma le terne costruibili utilizzando 4 vertici sono in numero di 4
(a partire da 4 punti, si ottiene una terna di punti se se ne esclude 1);
su ogni retta, escluderemo dunque 4 terne.
Le rette sono 5: le terne da escludere sono perciò 20.
Il numero totale di triangoli è in definitiva $120-20=100$.

76) $\binom{16}{3}-10\cdot4-4=\frac{16\cdot15\cdot14}{3\cdot2\cdot1}-44=560-44=516$ triangoli. Infatti: $\binom{16}{3}$ sono tutte le possibili terne
non ordinate di punti; dobbiamo però sottrarre le terne di punti allineati, che non generano un triangolo!
Quante sono, dunque, le terne di punti allineati?
Su ciascuna delle 4 righe, su ciascuna delle 4 colonne, su ciascuna delle 2 diagonali,
abbiamo 4 terne di punti allineati. Dobbiamo perciò sottrarre $(4+4+2)\cdot4=10\cdot4$.
Abbiamo infine altre 4 terne di punti allineati parallelamente alle diagonali: dobbiamo ancora sottrarre 4.

77) a) $\binom{8}{2}=28$ b) $2^8-8-1=247$ Dal numero totale di possibili byte abbiamo sottratto gli 8 byte aventi uno e un solo "1" e il singolo byte composto da otto bit "0".

78) $4\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5=2500$ 79) $25\cdot24\cdot\binom{23}{3}$ oppure $\binom{25}{5}\cdot5\cdot4$

80) a) $2\cdot3\cdot4=24$ b) $2\cdot3\cdot5=30$ *opp.* $2\cdot3\cdot4+2\cdot3=24+6=30$ c) $2\cdot3\cdot4+2\cdot3+2\cdot4+3\cdot4=24+6+8+12=50$

81) $25\cdot24\cdot23=13800$

82) a) Con 6 cifre: basta scegliere le prime 3, e lo si può fare in $9\cdot10\cdot10=900$ modi
b) Con 7 cifre: basta scegliere le prime 4, e lo si può fare in $9\cdot10\cdot10\cdot10=9000$ modi
c) Con 8 cifre: basta scegliere le prime 4, e lo si può fare, come prima, in $9\cdot10\cdot10\cdot10=9000$ modi

2.10 - Il binomio di Newton

Si chiama "**binomio di Newton**" la formula per lo sviluppo dell' n-esima potenza di un binomio. Essa è:

$$\mathbf{(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$$

Il simbolo $\sum_{k=0}^{n}$ si chiama “simbolo di **sommatoria**”.

Si legge “sommatoria, per k che va da 0 a n, di …” e “funziona” in questo modo:
si prende l’espressione a destra e in essa si pone k = 0; poi k = 1; poi k = 2; ecc. … fino a k = n.
I termini così ottenuti vengono sommati algebricamente fra loro.

Dimostrazione della formula

$(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$ *dove a secondo membro abbiamo* n *fattori.*
Bene! Si può pensare di effettuare la moltiplicazione
scegliendo, da ciascun fattore $(a+b)$, *o il termine* a, *o il termine* b, *in tutti i modi possibili,*
per poi sommare algebricamente i prodotti così ottenuti.

Ora, se io scelgo, ad esempio, k *volte il fattore* b *e* $n-k$ *volte il fattore* a, *avrò il monomio* $a^{n-k}b^k$.
Ma QUANTE VOLTE comparirà, questo monomio, nella somma finale?
Tante volte quanti sono i modi coi quali, fra gli n *fattori, posso selezionare quei* k *dai quali scegliere* b.
E tali modi sono $\binom{n}{k}$. *Di qui la formula.*

Vediamo qualche esempio di applicazione:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 =$$
$$= 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3b + \frac{4\cdot 3}{2!}a^2b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 =$$
$$= 1\cdot a^5 + 5\cdot a^4b + \frac{5\cdot 4}{2!}a^3b^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}a^2b^3 + 5\cdot ab^4 + 1\cdot b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

E’ interessante come i coefficienti così ricavati per gli sviluppi delle potenze successive di un binomio $(a+b)^n$ coincidano con quelli che si possono ottenere con il noto schema chiamato “**triangolo di Tartaglia**”, schema derivante da un ragionamento completamente diverso!

Per **costruire il Triangolo di Tartaglia**, possiamo immaginarlo come un **albero di Natale**. In alto, **sul cucuzzolo, ci mettiamo un 1**.

Ora **scendiamo lungo le pendici dell’albero, scrivendo (seconda riga) un 1 e poi un altro 1**.

Scendiamo ancora: siamo sulla **terza riga**; **come primo elemento della riga scriviamo un 1**; poi, dato che sopra di noi troviamo una coppia di 1, **scriviamo un 2 (1+1=2). Terminiamo la riga con un 1. Abbiamo così costruito i coefficienti (1, 2, 1) di $(a+b)^2$.**

Scendiamo ancora, ed ecco che, **procedendo allo stesso modo, si generano i coefficienti (1, 3, 3, 1) di $(a+b)^3$.**

E così per le righe successive.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
...

$15 = 10 + 5$

$$\mathbf{(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2}$$
$$\mathbf{(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3}$$
$$\mathbf{(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3b + 6\cdot a^2b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4}$$
...

ESERCIZI

83) Quanto vale il 3° coefficiente dello sviluppo di $(a+b)^{100}$? E il 4° coefficiente di $(a+2b)^{101}$?

84) Scrivi gli sviluppi di $(a+b)^6$, $(a+b)^7$ e $(a-b)^{10}$.
Ricava i coefficienti sia con il binomio di Newton che col Triangolo di Tartaglia.

85) Considera il prodotto notevole $(x+y)^{18}$.
a) Di quanti termini consta il suo sviluppo? b) Quanto vale il coefficiente del termine centrale?
c) E i coefficienti dei due termini che precedono e seguono questo?

86) Considera il prodotto notevole $(2x-5y)^{15}$.
a) Di quanti termini consta il suo sviluppo? b) Quanto valgono i coefficienti dei due termini centrali?

87) Determina il 4° termine dello sviluppo di $(x+3)^{10}$

88) Determina il 7° termine dello sviluppo di $\left(-2x+\dfrac{y}{2}\right)^{11}$

89) Determina (senza svolgere i calcoli) l'espressione del coefficiente di a^{326} nello sviluppo di $\left(5a^5-2a^2\right)^{100}$

90) A partire dalla formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

dimostra che

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$ b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

RISPOSTE

83) $\binom{100}{2}=4950$; $\binom{101}{3}\cdot 8=1333200$ 84) $(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$; …

85) a) 19 termini b) $\binom{18}{9}=48620$ c) $\binom{18}{8}=\binom{18}{10}=43758$ 86) a) 16 b) -128700000000 ; $+321750000000$

87) 4° termine $=\binom{n}{3}a^{n-3}b^3=\binom{10}{3}a^7b^3=\binom{10}{3}x^7\cdot 3^3=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}x^7\cdot 27=3240x^7$

88) 7° termine $=\binom{n}{6}a^{n-6}b^6=\binom{11}{6}a^5b^6=\binom{11}{6}\cdot(-2x)^5\cdot\left(\dfrac{1}{2}y\right)^6=\dfrac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\left(-32x^5\right)\cdot\dfrac{1}{64}y^6=-231x^5y^6$

89) $$\left(5a^5-2a^2\right)^{100}=\binom{100}{0}\cdot 5^{100}a^{500}+\underbrace{\binom{100}{1}\cdot 5^{99}a^{495}\cdot(-2)\cdot a^2}_{contiene\ a^{497}}+\underbrace{\binom{100}{2}\cdot 5^{98}a^{490}\cdot(-2)^2a^4}_{contiene\ a^{494}}+\ldots$$

Quindi,

- nel termine in cui compare il moltiplicatore $\binom{100}{0}$ l'esponente di a è 500,
- nel termine in cui compare il moltiplicatore $\binom{100}{1}$ è $500-3$,
- nel termine in cui compare il moltiplicatore $\binom{100}{2}$ è $500-6$,
- … nel termine in cui compare il moltiplicatore $\binom{100}{k}$ è $500-3k$.

Il termine nel quale è presente la potenza a^{326} corrisponderà perciò al valore di k determinabile tramite la seguente equazione: $500-3k=326$; $-3k=-174$; $k=58$

Esso è perciò $\binom{100}{58}\cdot\left(5a^5\right)^{42}\cdot\left(-2a^2\right)^{58}$ e il relativo coefficiente numerico è uguale a $\binom{100}{58}\cdot 5^{42}\cdot 2^{58}$.

90) Si tratta semplicemente di svolgere, tramite la formula in questione, le operazioni $(1+1)^n$ e $(1-1)^n$

3 - FORMULE, REGOLE E PRINCIPI INTERESSANTI

3.1 - La formula di Gauss per la somma dei primi n interi positivi

Diversi anni fa domandai per gioco al mio amico Ernesto P. se sapeva dirmi di quante partite (incontro "secco", niente rivincita) è composto un torneo a 10 squadre.

Nella mia mente mi figuravo il ragionamento che avrebbe condotto a rispondere correttamente:
"tante quante sono le coppie non ordinate costruibili con 10 oggetti, ovvero $(10\cdot 9)/2=45$".
Banale, per chi avesse qualche conoscenza di Calcolo Combinatorio … non era però il caso del buon Ernesto.

Che tuttavia, dopo una breve riflessione, fu in grado di darmi, sorprendendomi alquanto, la risposta esatta; determinata, comunque, con una strategia completamente diversa dalla mia.
Ernesto aveva considerato la sequenza $\mathbf{a\to b\to c\to d\to e\to f\to g\to h\to i\to l}$ e aveva pensato:

"la squadra **a** gioca con tutte e 9 le squadre scritte alla sua destra;
la squadra **b** gioca con tutte e 8 le squadre alla sua destra …
dunque si avranno 9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45 partite".

L'amico era stato davvero bravo e svelto.
Così io subito, perfidamente, gli riformulai il quesito con riferimento a 100 squadre.
E quando lui obiettò che ci sarebbe voluto molto tempo per svolgere il calcolo 99+98+97+…+3+2+1, gli feci presente che un bambino di otto anni era stato capace di determinare quella somma in pochi minuti.
Ernesto ci si mise dunque "sotto" con impegno ... dopo un po', tuttavia, rinunciò per noia.

Non avevo bluffato. Quel bambino era il piccolo Gauss (1777-1855), destinato a diventare uno dei più grandi matematici della Storia. Nella sua classe il maestro aveva dato da svolgere agli alunni, per farli stare un po' bravi, la somma 1+2+3+ … +99, e lui ci riuscì in un tempo incredibilmente breve, dopo aver scritto lo schema

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots\ldots & + & 97 & + & 98 & + & 99 \\ S & = & 99 & + & 98 & + & 97 & + & \ldots\ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & 100 & + & 100 & + & 100 & + & \ldots\ldots & + & 100 & + & 100 & + & 100 \end{array}$$

[99 addendi, tutti uguali a 100]

$$2S=99\cdot 100$$

$$S=\frac{99\cdot 100}{2}=\frac{9900}{2}=4950$$

Generalizzando il procedimento alla somma **1+2+3+…+n** dei primi n interi positivi, avremo

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots\ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots\ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots\ldots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

[n addendi, tutti uguali a $(n+1)$]

$$2S=n\cdot(n+1)$$

$$S=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Resta così acquisita l'importante

FORMULA (DI GAUSS) per la somma dei primi n numeri interi positivi: $\boxed{\mathbf{1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}}}$

3.2 - Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di n elementi?

Se un insieme I contiene n elementi, quanti elementi ha il suo insieme delle parti P(I)?
Insomma, quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di n elementi?

Risposta: $\boxed{\mathbf{2^n}}$

Un modo per provare questo asserto è il seguente.
Immaginiamo di ordinare, in un modo qualsiasi, gli elementi di I: **a, b, c, d, ...**
Ora, se vogliamo costruire un sottoinsieme di I, potremo passare in rassegna questi elementi "schierati" come dei soldatini, per scegliere quali inserire nel nostro sottoinsieme e quali invece non inserire.

- Per **a** abbiamo 2 possibilità: SI' (inserirlo nel sottoinsieme che stiamo costruendo) o NO (non inserirlo).
- Per **b** abbiamo 2 possibilità (SI' o NO) …
- Per **c** abbiamo 2 possibilità (SI' o NO) …
- …

In definitiva, la costruzione di un sottoinsieme di I può avvenire in 2^n modi diversi.
Pertanto, i sottoinsiemi di I sono in numero di $\mathbf{2^n}$.
Ad esempio, quindi, l'insieme dei 12 Apostoli ha $2^{12}=4096$ sottoinsiemi.

3.3 - Regola della somma

Se A e B sono due insiemi finiti DISGIUNTI
(= privi di intersezione = la cui intersezione è l'insieme vuoto = privi di elementi comuni),
allora

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B)} \quad [\,n(A \cup B) \text{ indica il numero degli elementi di } A \cup B\text{, ecc.}]$$

E **lo stesso vale se gli insiemi finiti di cui facciamo l'unione sono 3 o più e sono a due a due disgiunti.**

3.4 - Principio di Inclusione/Esclusione (PIE)

Se A e B sono due insiemi finiti QUALSIASI, allora

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

In effetti, se per calcolare $n(A \cup B)$ noi determinassimo la somma $n(A)+n(B)$, sbaglieremmo in quanto ci ritroveremmo a CONTARE 2 VOLTE gli elementi di $A \cap B$: se un elemento è *comune* ad A e a B, facendo $n(A)+n(B)$ lo si conta una prima volta come elemento di A e poi una seconda volta come elemento di B.
Per cui basterà, partendo da $n(A)+n(B)$, sottrarre $n(A \cap B)$, per avere il n° esatto degli elementi di $A \cup B$.

Per tre insiemi finiti A, B, C la formula è un po' più complicata:

$$\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}\,.$$

Prova tu stesso a cercare la giustificazione di questa uguaglianza!

In generale, per contare il numero degli elementi dell'unione di N insiemi finiti $A_1, A_2, \ldots, A_N$, la formula è

$$n\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_N\right) =$$
$$= \sum_{1 \le i \le N} n\left(A_i\right) - \sum_{1 \le i < j \le N} n\left(A_i \cap A_j\right) + \sum_{1 \le i < j < k \le N} n\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - \ldots + (-1)^{N-1} n\left(A_1 \cap \ldots \cap A_N\right)$$

Esempio 1 - Quanti sono i numeri, da 1 a 1 milione, divisibili per 2 o per 3?

Risposta:

posto $\begin{array}{l} A = \{numeri\ da\ 1\ a\ 1000000\ divisibili\ per\ 2\} \\ B = \{numeri\ da\ 1\ a\ 1000000\ divisibili\ per\ 3\} \end{array}$, per il PIE avremo

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 500000 + 333333 - 166666 = 666667$$

3.5 - Regola del complementare

A volte, se ci si trova all'interno di un insieme universo finito U,
e l'obiettivo è di contare il numero degli elementi di un suo sottoinsieme A,
risulta invece più agevole contare il numero degli elementi del *complementare* di A, dopodiché si sottrarrà:

$$\boldsymbol{n(A) = n(U) - n(\overline{A})}\,.$$

Questo "passaggio al complementare" è particolarmente utile, di norma, quando l'insieme A è definito come l'insieme degli elementi di U che soddisfano ad ALMENO UNA fra due o più condizioni.
Il complementare $\overline{A}$ di A sarà infatti, in questo caso, l'insieme degli elementi di U
che non verificano NESSUNA delle condizioni in gioco.
E di norma calcolare il numero degli elementi di questo $\overline{A}$ sarà più semplice, perché la determinazione diretta del numero di elementi di A, per via della parola "almeno", comporterebbe una laboriosa distinzione di casi.

Esempio 2 - Quanti sono i numeri di 3 cifre che presentano almeno una volta la cifra "1" ?

Risposta: $n(\text{numeri di 3 cifre che presentano almeno un "1"}) =$
$n(\text{numeri di 3 cifre}) - n(\text{numeri di 3 cifre che non presentano NESSUN "1"}) =$
$= 900 - 8 \cdot 9 \cdot 9 = 900 - 648 = 252$

3.6 - Regola del prodotto cartesiano

Ricordiamo che il prodotto cartesiano $A \times B$ di due insiemi A, B
è l'insieme i cui elementi sono le coppie ordinate (a,b) nelle quali $a \in A$ e $b \in B$.
Bene, **il numero degli elementi di $A \times B$, essendo A, B due insiemi finiti,**
è semplicemente dato dal risultato della moltiplicazione $n(A) \cdot n(B)$.
E la stessa regola si estende al prodotto cartesiano di tre o più insiemi.

Ad esempio, in un torneo andata-e-ritorno con 12 squadre, detto S l'insieme di queste squadre,
l'insieme di tutte le partite coincide sostanzialmente col prodotto cartesiano $S \times S$, PRIVATO però
delle coppie i cui due elementi coincidono (perché evidentemente una squadra non gioca contro sé stessa).
Quindi il numero di partite del torneo è dato da $12 \cdot 12 - 12 = 144 - 12 = 132$
(risultato, questo, che si poteva ricavare anche con altre modalità di ragionamento).

3.7 - Combinazioni con ripetizione

Supponiamo di partire da un insieme di n oggetti, con l'intenzione di creare dei gruppi in ciascuno dei quali siano presenti k oggetti, "pescati" dall'insieme degli n oggetti dati, con la possibilità, fissato un oggetto, di utilizzarlo nessuna volta, una volta, o anche più volte.

Insomma:
gli oggetti della k-upla, che è pensata NON ordinata, non devono essere necessariamente tutti distinti.
In questo contesto, può essere $\mathbf{k < n}$, $\mathbf{k = n}$, oppure $\mathbf{k > n}$.

Queste k-uple non ordinate saranno chiamate le "combinazioni con ripetizione, degli n oggetti dati, di classe k".

Ad esempio, dato l'insieme delle 4 lettere $\{A, B, C, D\}$, le loro combinazioni con ripetizione, di classe 3, sono

BCD, ACD, ABD, ABC, AAA, BBB, CCC, DDD,
AAB, AAC, AAD, ABB, BBC, BBD, ACC, BCC, CCD, ADD, BDD, CDD

NOTA - A dire il vero, come affermano M. Falanga e L. Battaia nel loro splendido sito www.batmath.it, forse sarebbe meglio parlare di "**combinazioni, di classe k, di OGGETTI DI n TIPI**", proprio per suggerire l'idea di "ripetibilità" in un modo psicologicamente più naturale: l'idea di uno stesso "tipo" che può comparire diverse volte sembra più spontanea rispetto a quella di un unico oggetto che si ha la possibilità di riutilizzare.

Si può dimostrare (noi qui omettiamo questa dimostrazione, che non è esageratamente difficile, ma è comunque più elaborata rispetto alle precedenti di questo capitolo) che

il numero delle combinazioni con ripetizione di classe k di n oggetti è dato da $\boxed{\mathbf{C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}}}$

Ad esempio, con $n = 4$ e $k = 3$, abbiamo $C'_{4,3} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$.

- Esempio 1 - In quanti modi è possibile distribuire 12 oggetti identici in 3 scatole A, B, C?

  Risposta: Beh, potrei mettere 1 oggetto in A, 5 in B e 6 in C (schematizzando: ABBBBBCCCCCC); oppure 4 oggetti in A, 8 in B, 0 in C (schematizzando: AAAABBBBBBBB), ecc. ecc. ecc.
  Ma allora le possibilità di collocare questi 12 oggetti identici nelle 3 scatole date sono tante, quante sono le combinazioni con ripetizione di classe 12, di 3 oggetti (le scatole), ossia sono
  $$C'_{3,\,12} = \binom{3+12-1}{12} = \binom{14}{12} = \frac{14!}{12!\cdot2!} = \frac{14\cdot13}{2\cdot1} = 91$$

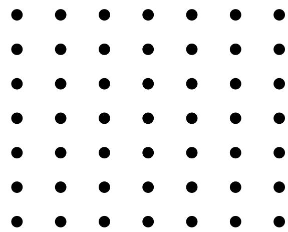
- Esempio 2 - Quante sono le terne ordinate di numeri naturali (con possibilità di ripetizione), che danno per somma 10?

  Risposta: $10 = \underbrace{(1+1+1+1)}_{4} + \underbrace{(1+1+1)}_{3} + \underbrace{(1+1+1)}_{3};\quad 10 = \underbrace{(1+1+1+1+1+1)}_{6} + \underbrace{(1+1+1+1)}_{4} + \underbrace{()}_{0};\quad \ldots$
  Dunque si possono costruire terne ordinate di numeri naturali aventi per somma 10 in tanti modi quante sono le possibilità di collocare 10 oggetti identici in 3 scatole A, B, C.
  E dall'esercizio precedente si trae che il numero dei modi è $C'_{3,\,10} = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = 66$

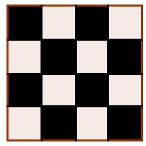
- Es. 3 - L'operazione $(a+b+c+d+e)^6$ ha come risultato un polinomio omogeneo di 6° grado nel quale ogni termine contiene le 5 lettere a, b, c, d, e (non necessariamente tutte), e nei vari termini compaiono tutte le possibili combinazioni di esponenti compatibili col vincolo che il termine sia, appunto, di grado 6.
  Questo fatto si può comprendere pensando che la potenza $(a+b+c+d+e)^6$ equivale al prodotto $(a+b+c+d+e)(a+b+c+d+e)(a+b+c+d+e)(a+b+c+d+e)(a+b+c+d+e)(a+b+c+d+e)$, e quest'ultimo può essere eseguito sommando algebricamente i prodotti di 6 fattori ottenibili prendendo un termine da ciascuna parentesi, in tutti i modi possibili. Bene … quanti termini avrà questo polinomio?

  Risposta: Uno dei termini avrà come parte letterale $a^2bcde = aabcde$, un altro $a^2d^4 = aadddd$, ecc. ; insomma: i termini sono tanti, quante le combinazioni con ripetizione di 5 oggetti, di classe 6.
  Il numero di termini è perciò uguale a $C'_{5,\,6} = \binom{5+6-1}{6} = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\cdot4!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 210$

3.8 - Esercizi sul Capitolo 3



1) Quanto vale la somma $2+4+6+8+...+2n$ dei primi n numeri pari a partire da 2 ?
2) Quanto vale la somma $1+3+5+7+...+(2n-1)$ dei primi n numeri dispari ?
3) a) Serviti della figura a fianco per giustificare che $2(1+2+3+...+(n-1))+n=n^2$
   b) Dai poi anche una dimostrazione algebrica della stessa identità.
4) Di fronte alle 8 proposte di un buffet, posso scegliere di assaggiarle tutte, oppure solo una parte, o addirittura di stare a digiuno. Ora … quante possibilità di scelta ho complessivamente?
5) Cerco di educare bene i miei 12 figli, e ognuno di loro fa almeno uno sport fra Corsa e Palestra. 10 praticano la Corsa e 8 la Palestra. Sapresti dirmi quanti fanno entrambi gli sport?
6) Se in una classe i sufficienti in Matematica sono 14, i sufficienti in Latino sono 16 e in Inglese 18, e si sa che 24 sono sufficienti in almeno una delle 3 materie e 10 sono sufficienti in tutte e 3, sarà possibile stabilire con certezza quanti studenti sono sufficienti a) in esattamente 2 materie? b) in almeno due materie?

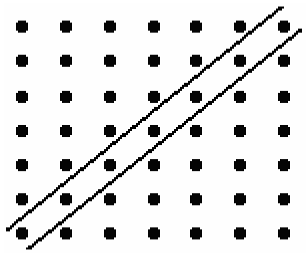


7) Fra i numeri da 1 a 1000, quanti presentano almeno una cifra uguale a 0?
8) In quanti modi posso piazzare 4 pedine fra loro indistinguibili, su di una scacchiera 4 X 4 come quella nella figura qui a destra, se voglio occupare almeno 1 volta una casella nera?
9) In quanti modi, se ho due tasche e un taschino, posso conservare 10 monete uguali?
10) Avendo 5 caldarroste, in quanti modi diversi le potrei distribuire a 5 bambini?
11) In quanti modi diversi potrei ritirare le mie 10 gomme identiche in 4 cassetti, se desidero che comunque in ogni cassetto vada a finire almeno una gomma?

RISPOSTE

1) $2+4+6+8+...+2n = 2(1+2+3+4+...+n) = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) = n^2+n$

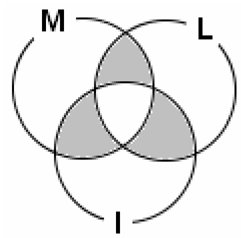
2) $1+3+5+7+...+(2n-1) = (2+4+6+8+...+2n)-n = n^2 \cancel{+n} \cancel{-n} = n^2$ (interessante!)

3a) 

3b) $2(1+2+3+...+(n-1))+n = \cancel{2}\cdot\frac{(n-1)(n\cancel{-1}\cancel{+1})}{\cancel{2}}+n = n^2\cancel{-n}\cancel{+n} = n^2$

4) $2^8=256$: tante quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di 8 elementi.

5) $n(\mathrm{C}\cup\mathrm{P}) = n(\mathrm{C})+n(\mathrm{P})-n(\mathrm{C}\cap\mathrm{P})$ da cui
$n(\mathrm{C}\cap\mathrm{P}) = n(\mathrm{C})+n(\mathrm{P})-n(\mathrm{C}\cup\mathrm{P}) = 10+8-12=6$



6a) $\underbrace{n(\mathrm{M}\cup\mathrm{L}\cup\mathrm{I})}_{24} = \underbrace{n(\mathrm{M})}_{14}+\underbrace{n(\mathrm{L})}_{16}+\underbrace{n(\mathrm{I})}_{18}-n(\mathrm{M}\cap\mathrm{L})-n(\mathrm{M}\cap\mathrm{I})-n(\mathrm{L}\cap\mathrm{I})+\underbrace{n(\mathrm{M}\cap\mathrm{L}\cap\mathrm{I})}_{10}$ da cui
$n(\mathrm{M}\cap\mathrm{L})+n(\mathrm{M}\cap\mathrm{I})+n(\mathrm{L}\cap\mathrm{I}) = \underbrace{n(\mathrm{M})}_{14}+\underbrace{n(\mathrm{L})}_{16}+\underbrace{n(\mathrm{I})}_{18}+\underbrace{n(\mathrm{M}\cap\mathrm{L}\cap\mathrm{I})}_{10}-\underbrace{n(\mathrm{M}\cup\mathrm{L}\cup\mathrm{I})}_{24}=34$
ma facendo la somma $n(\mathrm{M}\cap\mathrm{L})+n(\mathrm{M}\cap\mathrm{I})+n(\mathrm{L}\cap\mathrm{I})$
si ottiene il numero di elementi dell'insieme ombreggiato in figura, che è quello a cui si riferisce il quesito, AUMENTATO di $3\cdot n(\mathrm{M}\cap\mathrm{L}\cap\mathrm{I})$. La risposta al quesito è perciò $34-3\cdot 10=4$.

6b) $n(almeno\ 2) = n(esattamente\ 2)+n(esattamente\ 3) = 4+10=14$

7) $n(almeno\ uno\ "0") = n(totale)-n(nessuno\ "0")$.
Ora, i numeri di 1 cifra senza "zeri" sono 9, quelli di 2 cifre senza "zeri" sono $9\cdot 9=81$, quelli di 3 cifre senza "zeri" sono $9\cdot 9\cdot 9=729$. In totale, i numeri da 1 a 1000 senza la cifra "0" sono $9+81+729=819$.
Allora avremo $n(almeno\ uno\ "0") = 1000-n(nessuno\ "0") = 1000-819=181$.

8) $n(almeno\ una\ "nera") = n(totale)-n(tutte\ "bianche") = \binom{16}{4}-\binom{8}{4} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}-\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 1820-70=1750$

9) $C'_{3,10} = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = \binom{12}{2} = \frac{12\cdot 11}{2\cdot 1} = 66$

10) $C'_{5,5} = \binom{5+5-1}{5} = \binom{9}{5} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 126$

11) $C'_{4,6} = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$ perché comincio a mettere 4 gomme ognuna in un cassetto poi mi chiedo in quanti modi sia possibile ripartire nei 4 cassetti le 6 gomme restanti.

4 - THE PIGEONHOLE PRINCIPLE (PHP)

Il “Principio dei Cassetti”, detto anche “Principio di Dirichlet”
(ma noi useremo invece il termine inglese
PIGEONHOLE PRINCIPLE, abbreviato **PHP**)
afferma questo:

“Se *n* piccioni devono occupare *k* buchi, e *n*>*k*
(il numero dei piccioni supera il numero dei buchi),
allora almeno uno dei buchi verrà a contenere almeno 2 piccioni”

Nei problemi, i “*piccioni*” sono *oggetti*, concreti o astratti (ad es. numeri) mentre i “*buchi*” sono *proprietà* che tali oggetti possono possedere.

Qui abbiamo
10 piccioni ($n = 10$)
in 9 buchi ($k = 9$).

(Pigeons-in-holes.jpg
by B. McKay;
GNU Free Documentation License)

L’affermazione è del tutto ovvia;
comunque:
se *per assurdo*, con *n* piccioni e *k* buchi, e *n*>*k*,
il numero dei piccioni in ogni buco fosse <2,
allora il numero totale dei piccioni sarebbe

$$\leq \underbrace{1+1+...+1}_{k\ volte} = k < n$$

quindi NON potrebbe essere uguale a *n*.

Esiste anche una VERSIONE GENERALIZZATA del principio, ossia:

“Se *n* piccioni devono sistemarsi in *k* buchi, e *n*>*k*
(il numero dei piccioni supera il numero dei buchi),
allora almeno uno dei buchi verrà a contenere almeno *n/k* piccioni”;
osserviamo che, dovendo il numero dei piccioni essere intero,
questo *n/k* significa in pratica: “ il più piccolo numero intero non inferiore a *n/k* ”

Per assurdo: supponiamo di avere *n* piccioni e *k* buchi, con *n*>*k*;
se il numero dei piccioni in ogni buco fosse <*n/k*,
allora il numero totale dei piccioni sarebbe

$$< \underbrace{\frac{n}{k}+\frac{n}{k}+...+\frac{n}{k}}_{k\ volte} = \frac{n}{k}\cdot k = n$$

e NON potrebbe quindi essere uguale a *n*.

Il principio viene associato al nome di Dirichlet, matematico tedesco che lo adoperò nel 1834 sotto il nome di *Schubfachprinzip* ("principio dei cassetti").

Parecchi problemi, di effettivo interesse applicativo o di carattere “giocoso”, sono risolubili attraverso il PHP.

Non si tratta in genere di problemi di facile risoluzione:
in effetti, di norma è piuttosto spontaneo riconoscere che la risposta a un dato quesito è in qualche modo legata al PHP, però non è poi così elementare capire quali siano, in quel particolare contesto, i “piccioni” ed i “buchi”.

Facciamo alcuni esempi.

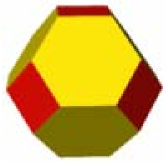
a) *Supponiamo che ciascun punto di un piano sia colorato: o di blu, o di rosso. Dimostrare che in quel piano deve per forza esistere una coppia di punti a distanza uguale a 1, aventi lo stesso colore.*

Dimostrazione
Consideriamo, sul piano in questione, un qualunque triangolo equilatero di lato uguale a 1.
Esso ha tre *vertici* (*piccioni*!) mentre i *colori* disponibili (*buchi*!) sono soltanto 2.
Pertanto, per il PHP, ci dovranno essere (almeno) due fra i vertici, colorati con lo stesso colore.
Tali due vertici sono i punti di cui si domandava di dimostrare l’esistenza.

b) *Fra 6 interi, ce ne sono sempre senz’altro almeno 2 la cui differenza è un multiplo di 5: dimostralo!*

Dimostrazione
Consideriamo i resti che si ottengono dividendo per 5 ciascuno di quei 6 interi.
Il resto di una divisione per 5 può valere 0, 1, 2, 3 o 4: non ci sono altre possibilità.
Abbiamo dunque solo 5 *buchi* (i possibili *resti*), con 6 *piccioni* (gli *interi* considerati).
Ci dovranno perciò essere, per il PHP, almeno due piccioni in uno stesso buco,
ossia almeno due interi che, divisi per 5, danno lo stesso resto.
Bene: la differenza fra quei due interi sarà un multiplo di 5, C.V.D.

c) *Provare che in qualsiasi poliedro esistono sempre due facce aventi lo stesso numero di lati.*



Dimostrazione
In un poliedro, ogni faccia "confina" con altre facce:
tante facce, quanti sono i lati della faccia iniziale.
Se in totale le facce di un poliedro sono *n*,
il numero massimo di facce con cui una data faccia può confinare è $n-1$.
E allora ciò significa che ogni faccia di un poliedro con n facce, non può avere più di $n-1$ lati:
potrà avere 3 lati, 4 lati, … ma fino a un massimo di $n-1$ lati e non di più: ci sono meno di n possibilità.
Se pensiamo di considerare, per ogni faccia, il numero dei suoi lati,
ossia se trattiamo le *facce* come "*piccioni*" e i *numeri possibili di lati* come "*buchi*",
abbiamo più piccioni che buchi e perciò almeno due facce dovranno avere lo stesso numero di lati, C.V.D.

d) *9 persone siedono in una fila di 12 sedie.*
Dimostra che nella fila c'è almeno una terna di sedie consecutive occupate.

Dimostrazione
Qui si potrebbe anche trovare il modo di utilizzare il PHP, ma è più semplice ragionare *PER ASSURDO*.
Se non ci fosse mai una terna di sedie consecutive occupata,
la configurazione in grado di garantire il numero massimo di persone sedute sarebbe
2-vuota-2-vuota-2-vuota-2-vuota oppure vuota-2-vuota-2-vuota-2-vuota-2
per un totale di 8 persone sedute soltanto. Non ci sarebbe posto per la nona persona.
E' perciò assurdo supporre che non si abbiano mai più di 2 posti consecutivi occupati:
deve esistere per forza una sequenza di 3 o più posti occupati di seguito, C.V.D.

e) *Ci sono 200 cestini di noci. E nessun cestino è vuoto, ma si sa pure che nessuno contiene più di 48 noci.*
Dimostra che fra questi cestini, ce ne sono almeno 5 con esattamente lo stesso numero di noci.

Dimostrazione
Sfrutteremo la forma generalizzata del PHP. I piccioni sono 200, e i buchi sono 48.
Esiste perciò almeno un buco in cui vanno a finire almeno 200/48 = 4, …
ossia, passando al più piccolo intero non inferiore, almeno 5 piccioni.
Vale a dire: ci sono perlomeno 5 cestini che portano lo stesso numero di noci.

I seguenti due quesiti, decisamente più difficili, sono tratti dal meraviglioso sito
www.cut-the-knot.org/
Prima di sbirciare la soluzione, cimentati per conto tuo.
Aspettati, però, una riflessione davvero impegnativa, specie per il secondo!

f) *At a party of N people, some pair of people are friends with the same number of people at the party.*

Solution 1
A person at the party can have 0 up to $N-1$ friends at the party.
However, if someone has 0 friends at the party, then no one at the party has $N-1$ friends at the party,
and if someone has $N-1$ friends at the party, then no one has 0 friends at the party.
Hence the number of possibilities for the number of friends the N people at the party have
must be less than N.
Hence two people at the party have the same number of friends at the party.

Solution 2
Può essere la tua … oppure: valla a cercare sul sito, nel quale trovi anche una terza risoluzione.

g) *Suppose each point of the plane is colored red or blue.*
Show that some rectangle has its vertices all the same color.

Draw three horizontal lines.
We'll find a rectangle with vertices on two of these.
The other sides are vertical.
At the intersection with the three horizontal lines,
every vertical line has three candidate points to serve as vertices of the sought rectangle.
Three points may be colored with 2 colors in 8 different ways.
So, if you choose 9 vertical lines, there are bound to be triplets of points colored in the same manner.
Select any two triplets colored in the same way - this gives you *vertical* sides.
In any triplet, at least two points are of the same color.
Select two such - this gives you *horizontal* sides.

ESERCIZI (*alcune risposte e risoluzioni, ma volutamente non tutte, sono al termine della rassegna*)

1) Dimostra che fra 400 persone, ce ne sono almeno 2 che festeggiano il compleanno nel medesimo giorno.

2) Al centro di una circonferenza viene piazzato un goniometro a 360°. Si scelgono, sulla circonferenza, 200 punti, corrispondenti ad angoli al centro la cui ampiezza sia di un numero intero di gradi. Dimostra che, fra questi punti, ce n'è almeno una coppia "agli antipodi", ossia tale che la loro congiungente passi per il centro (Indicazione: i "buchi" siano "le coppie di punti agli antipodi" …)

3) Comunque si scelgano 10 punti su di un triangolo equilatero di lato 1, ne esistono sempre almeno 2 la cui distanza è $\leq 1/3$ (Indicazione: suddividi il triangolo equilatero dato in…)

4) Dati 5 interi, ce ne sono almeno 2 la cui differenza è divisibile per 4. E in generale, dati n interi, ce ne sono almeno 2 la cui differenza è divisibile per $n-1$

5) Gli 85 partecipanti ad un pranzo in trattoria possono scegliere fra 4 possibili primi piatti. Dimostra che almeno in 22 sceglieranno la medesima portata.

6) Nel gioco della tombola, intervengono gli interi da 1 a 90. Dimostra che, dopo 46 estrazioni, è certo che almeno due dei numeri usciti siano consecutivi.

7) Dimostra che avendo 100 interi, se ne possono sempre scegliere 15 tali che la differenza fra due qualsiasi di essi sia divisibile per 7 (Manhattan Mathematical Olympiad 2005)

8) Dimostra che a Milano ci sono sempre, istante per istante, più persone che hanno esattamente lo stesso numero di capelli in testa.

9) Si scelgono a caso 4 interi. La loro somma è 30. Allora certamente almeno uno dei 4 numeri è non inferiore a … ?

10) Sto recuperando i vecchi albi a fumetti che avevo accatastato in ordine sparso in soffitta. Ce ne sono in tutto 120, di cui 40 di "Topolino", 30 di "Tex", 28 di "Zagor" e 22 di "Alan Ford". Ora mi diverto a pescare a caso gli albi per la lettura. Quanti ne devo estrarre dal mucchio per essere certo che ce ne siano almeno 2 della stessa serie?

11) Se un test poteva fruttare un punteggio intero da 0 a 10, e 48 studenti lo hanno effettuato, allora il gruppo più numeroso di studenti che hanno ottenuto ugual punteggio ha al minimo k elementi. Quanto vale k?

12) Ci sono 35 tavoli circolari e 110 sedie vengono disposte intorno ad essi. Dimostra che ci sarà almeno un tavolo intorno al quale verranno disposte almeno 4 sedie.

13) Su di una circonferenza di raggio unitario vengono scelti 7 punti. Dimostra che fra questi punti, ce ne sono almeno 2 a distanza <1.

14) Su di una circonferenza di raggio 3, ci sono 19 archi di lunghezza unitaria. Siamo certi che almeno 2 fra questi archi siano parzialmente sovrapposti?

15) Dimostra che, se n piccioni occupano k buchi, c'è almeno un buco che contiene non più di n/k piccioni.

Da www.cut-the-knot.org/do_you_know/pigeon.shtml, che propone parecchi esercizi di questo tipo, alcuni dei quali molto impegnativi: 16) Prove that there exist two powers of 3 whose difference is divisible by 1997. 17) In a tournament where each team meets every other team once, there are always two teams that played the same number of games.	Per procurarti altri problemi interessanti, ti basta digitare "**Principio dei Cassetti**" o "**Pigeonhole Principle**" su **Google**.

18) DIFFICILE. Vengono scelti a caso 10 interi nell'intervallo da 1 fino a 100. Dimostra che l'insieme di questi 10 interi deve per forza avere almeno due sottoinsiemi non vuoti, con ugual somma degli elementi.

19) DIFFICILE, estensione dell'esempio g). Se ciascun punto di un piano è colorato, e può esserlo in rosso, nero, o blu, allora esiste in quel piano un rettangolo i cui vertici sono tutti dello stesso colore.

20) DIFFICILE. 17 parlamentari di una federazione di Stati, nella quale ci sono 3 lingue ufficiali, interloquiscono fra di loro in modo che ogni coppia di parlamentari dialoga con una e 1 sola di tali lingue. Dimostra che esistono almeno 3 persone che comunicano fra loro utilizzando la stessa lingua (riformulazione di un quesito della IMO, International Mathematical Olympiad, 1964)

21) DIFFICILE. In un gruppo di 6 persone, ne esistono sempre (almeno) 3 che si conoscono a due a due, oppure che sono a due a due estranee (diamo qui per scontato che il "conoscersi" sia sempre simmetrico: se A conosce B, anche B conosce A).

22) DIFFICILE. Dati 52 numeri interi, almeno due di essi sono tali che la loro somma o la loro differenza è divisibile per 100: dimostra questa affermazione.

23) DIFFICILE, assegnato alla American Mathematical Olympiad 1981. Supponiamo di avere 27 distinti numeri interi dispari, tutti minori di 100. Dimostra che fra essi c'è sempre almeno una coppia avente per somma 102.

24) DIFFICILE. Ogni insieme di 17 interi contiene 5 interi la cui somma è divisibile per 5: dimostralo.

25) DIFFICILE. Dati 101 interi scelti nell'intervallo da 1 a 200, fra di essi ne esistono senz'altro almeno due tali che uno sia divisore dell'altro.

Da http://yusuf1505.web.ugm.ac.id/kuliahku/

26) 15 children together gathered 100 nuts. Prove that some pair of children gathered the same number of nuts.

27) Prove that among any set of 51 positive integers less than 100, there is a pair whose sum is 100.

ALCUNE RISPOSTE, E RISOLUZIONI DI ESERCIZI DIFFICILI

9) 8 10) 5 11) 5 14) Sì: la circonferenza è lunga … mentre la somma degli archi … 15) Per assurdo

18) Quanti sono i possibili sottoinsiemi di un insieme di 10 elementi? $2^{10}=1024$.
E quelli non vuoti? Evidentemente 1023. Quante sono le diverse somme ottenibili prendendo come addendi da 1 a 10 interi scelti nell'intervallo da 1 a 100? Beh, la somma più piccola vale 1 (questa viene dall'insieme unitario che ha come elemento il più piccolo dei numeri in gioco), e la somma più grande possibile è invece

$$91+92+93+94+95+96+97+98+99+100=90\cdot 10+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=900+\frac{10\cdot 11}{2}=955.$$

Si hanno dunque 955 possibili somme. Ma gli insiemi sono 1023, quindi si hanno più piccioni che buchi.
Almeno un buco dovrà essere occupato da almeno 2 piccioni, vale a dire:
ci saranno certamente 2 insiemi caratterizzati dalla stessa somma.

20) Prendiamo una qualsiasi delle 17 persone: chiamiamola per fissare le idee P1.
Essa interloquisce, nell'una o nell'altra delle 3 lingue, con 16 persone, e di conseguenza,
per il PHP generalizzato, dovrà comunicare con almeno 6 di queste attraverso l'uso della *stessa* lingua L1.
Se 2 fra tali 6 persone comunicano fra di loro sempre con L1,
ecco che quelle 2, insieme con P1, formano il gruppo di 3 cercato.
Altrimenti, tutte le 6 persone comunicheranno fra loro in una delle lingue L2 o L3.
Prendiamo una qualunque di tali 6 persone: chiamiamola P2.
P2, quando comunica con le altre 5 persone,
dovrà per forza rivolgersi con la stessa lingua, diciamo L2, ad almeno 3 di esse.
Se 2 fra queste 3 utilizzano sempre L2 per comunicare fra loro,
ecco che insieme a P2 formano il gruppo di 3 cercato.
Altrimenti, le 3 persone comunicheranno attraverso L3, e formeranno esse stesse il famoso gruppo di 3.
Il quale dunque, in qualsiasi caso, esiste, come volevasi dimostrare.

21) Ci semplifichiamo la vita se illustriamo il problema geometricamente. Rappresentiamo le nostre
6 persone con 6 punti; se 2 persone si conoscono le collegheremo con un segmento, altrimenti no.
Si tratta di dimostrare che esiste sempre un insieme di 3 punti che sono
TUTTI collegati fra loro (triangolo) oppure MAI collegati fra loro.
Prendiamo uno qualsiasi dei 6 punti, chiamandolo P per fissare le idee.
Pensiamo ai 5 punti rimanenti: P potrà, con ciascuno di essi, essere collegato oppure no.
2 possibilità, 5 punti: una di queste possibilità si verificherà per almeno 3 dei 5 punti.
Dunque senz'altro il punto P

a) sarà collegato con almeno 3 dei rimanenti
b) oppure non sarà collegato con almeno 3 dei rimanenti.

Supponiamo che si verifichi l'eventualità a). Allora sono possibili 2 sottocasi:

- ♪ fra i 3 punti, almeno 2 son collegati fra loro
  (e allora, insieme con P, formano una terna di punti a due a due collegati)
- ♫ oppure nessuno dei 3 punti è collegato con gli altri 2 (e abbiamo così una terna di punti non collegati).

Supponiamo invece che si verifichi l'eventualità b). 2 sottocasi:

- ♪ fra i 3 punti, almeno 2 non sono collegati fra loro
  (e allora, insieme con P, formano una terna di punti a due a due non collegati)
- ♫ oppure ciascuno dei 3 punti è collegato con gli altri 2 (e abbiamo così una terna di punti collegati).

23) I numeri in questione sono "pescati" dall'insieme $\{1, 3, 5, ..., 99\}$.
Possiamo considerare ora tutte le coppie la cui somma è 102, ossia $\{3, 99\}, \{5, 97\}, \{7, 95\}, ... , \{49, 53\}$
e aggiungere a questo elenco i due insiemi unitari aventi per elementi ciascuno un "orfanello": $\{1\}$ e $\{51\}$.
Ecco qui dunque 24+2=26 insiemi. Abbiamo così 26 "buchi" (gli insiemi) e 27 "piccioni" (i numeri iniziali).
Almeno due piccioni devono stare, per il PHP, nello stesso buco, quindi
almeno due fra i nostri numeri devono stare nello stesso insieme e perciò dare per somma 102, C.V.D.

26) Proof by contradiction. Suppose all the children gathered a different number of nuts.
Then the fewest total number is $0+1+2+3+...+14=105$, but this is more than 100, a contradiction.

5 - ESERCIZI CONCLUSIVI (risposte alle pagg. 37 … 41)

1) a) Cosa si intende per "disposizioni di n oggetti, presi a k a k" ?
b) Scrivi quanto vale il numero $D_{n,k}$ di tali disposizioni e spiega brevemente perché ha questo valore.

2) a) Cosa si intende per "combinazioni di n oggetti, presi a k a k" ?
b) Dimostra che il numero $C_{n,k}$ di tali combinazioni è dato da $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

3) Quante sono le permutazioni cicliche di n oggetti? Perché?

4) Scrivi la formula del "binomio di Newton" $(a+b)^n = ...$ e utilizzala per calcolare $(x^2-2)^5$

5) a) Quanti sottoinsiemi ha un insieme di 8 elementi?
b) Può un insieme avere esattamente 4000 sottoinsiemi?
c) Se un insieme ha 32768 sottoinsiemi, quanti elementi ha?

6) Quanto vale la somma $1001 + 1002 + 1003 + ... + 1999 + 2000$?

7) Per il mio compleanno mi hanno regalato 5 libri.
a) In quanti ordini diversi potrei decidere di leggerli?
b) Posso portarli in ferie tutti, o nessuno, o solo in parte.
In quanti modi diversi potrei effettuare la scelta dei libri da portar via?
c) Un amico mi ha chiesto di prestargliene 2. In quanti modi potrei scegliere quali dargli?

8) Quante possibilità si hanno, se si vuole costruire una password formata da:
- ❑ una sequenza di 5 lettere minuscole (possibilità di ripetizione di una stessa lettera; sono utilizzabili le 26 lettere dell'alfabeto anglosassone) …
- ❑ … seguita da una sequenza di 3 cifre, non necessariamente distinte?

Se invece la password fosse di 8 caratteri, ciascuno dei quali possa essere o una cifra da 0 a 9, oppure una lettera, o minuscola o maiuscola, con possibilità di ripetere una o più volte uno stesso simbolo, a quanto salirebbe il numero delle password teoricamente possibili?

9) In un'assemblea di 100 persone, si devono scegliere un presidente e un segretario.
Stabilisci in quanti modi è possibile effettuare la scelta:
a) se gli incarichi sono compatibili b) se sono incompatibili

10) In un sacchetto ci sono 9 palline, 3 delle quali recano scritto sulla superficie il numero "1", altre 3 il numero "2", le rimanenti 3 il numero "3".
Si estrae una pallina e si segna la cifra corrispondente.
Senza reimbussolare la pallina estratta,
se ne estrae un'altra, si segna la cifra corrispondente a destra della precedente …
e si prosegue in questo modo fino ad esaurire tutte le palline.
Si costruisce così un numero a 9 cifre.
Quanti numeri distinti è possibile ottenere in questo modo?

11) Quante diagonali ha un poligono di 13 lati? E, in generale, un poligono di n lati?

12) 20 persone si suddividono in 5 gruppi da 4 persone; ogni gruppo fa il girotondo.
Ciò è molto bello, ma tu dimmi: in quanti modi diversi è possibile organizzare questo insieme di girotondi?

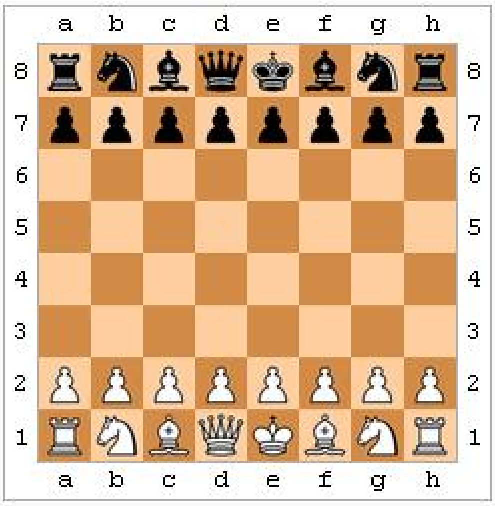
13) Quanti sono i numeri, da 1 a 1000000 estremi inclusi, che sono multipli
a) di 8 o di 9? b) di 8 o di 10? c) di 8 o di 56?

14) Quanti sono i quadrati perfetti nell'intervallo da 100000 fino a 500000?

15) Ciascuno dei 200 allievi di un *campus* universitario è iscritto a 1 o più fra i seguenti gruppi sportivi: Atletica, Basket, Pallavolo.
a) Sapendo che gli iscritti ad Atletica sono in totale 100, a Basket 80, e a Pallavolo 60, non è possibile determinare con certezza il numero di coloro che sono iscritti a tutti e 3 i gruppi simultaneamente! Perché?
b) Se si sapesse inoltre che $n(A \cap B) = n(A \cap P) = n(B \cap P) = 15$,
a questo punto si riuscirebbe a stabilire $n(A \cap B \cap P)$?

16) Quanti, fra i numeri naturali con non più di 3 cifre, hanno
a) tutte le cifre dispari? b) tutte le cifre pari? c) almeno una cifra pari?

17) Quanti, fra i numeri naturali con minimo 2 e massimo 3 cifre, hanno
   a) tutte le cifre uguali fra loro?
   b) tutte le cifre diverse fra loro?
   c) non tutte le cifre uguali fra loro?



18) Per il gioco degli scacchi si utilizza una scacchiera con 64 caselle. Ora, la “torre” si può muovere soltanto orizzontalmente o verticalmente. In quanti modi è possibile collocare una coppia di torri, una bianca e una nera, su di una scacchiera vuota, in modo che nessuna “minacci” l’altra?

19) Un pallone da calcio è formato da un certo numero di pezze di cuoio, di cui 12 di forma pentagonale e le rimanenti di forma esagonale. Sapresti determinare il numero di queste ultime?

Indicazione:
il numero di vertici può essere contato in due modi differenti, che però dovranno portare al medesimo risultato.
In effetti tale numero totale di vertici:
- *da una parte, coincide col numero totale dei vertici di pentagono;*
- *dall’altra, ha a che fare anche col numero degli esagoni,*

perché a ben guardare ogni vertice è comune a due esagoni.
Detto dunque x il numero incognito degli esagoni, vale l’uguaglianza …
da cui si può ricavare x.

20) Devo fare i compiti di ben 4 materie diverse, e non so in che ordine affrontarle. Quante possibilità avrei?

21) Conta il numero di anagrammi della parola “pappagalla”

22) Anna vuol mettere una serie di anelli alla sua mano destra, uno per dito.
Stabilisci in quanti modi diversi può indossare gli anelli Anna
   a) nell’ipotesi che abbia 3 anelli fra loro differenti
   b) nell’ipotesi che abbia 3 anelli, tutti fra loro identici
   c) nell’ipotesi che abbia 5 anelli, tutti differenti fra loro
   d) nell’ipotesi che abbia 5 anelli, 3 identici fra loro, e 2 identici fra loro ma diversi dai precedenti.

23) I numeri in base due possono avere come cifre soltanto 0 oppure 1.
Quanti sono gli interi, in base due, aventi al massimo sei cifre?
(Notare che, se il numero ha più di una cifra, la cifra iniziale non può essere 0).

24) Una comitiva di famigliole fa una bella escursione in montagna.
Su di un sentiero nel quale è possibile procedere solo in fila indiana,
in quanti ordini differenti è possibile disporsi se i mariti sono 5, altrettante le mogli, i bambini 8,
e si desidera che il gruppo degli uomini sia in testa, i bambini in mezzo e in fondo le donne a sorvegliare?

25) Ho comprato un vassoietto di paste: 3 bignole, 4 meringhe, 5 sfoglie.
Adesso me le sbafo, una dopo l’altra. Quante possibilità ho per l’ordine dei sapori?
(Qui si suppone che le paste di uno stesso tipo siano indistinguibili fra loro).

26) Serena vuole pitturarsi le unghie dei piedi. Ha a disposizione 2 colori soltanto: rosa e azzurro.
   a) Ogni unghia andrà colorata; si potrà utilizzare un solo colore, o entrambi.
   Stabilire in quanti modi diversi potrà avvenire la colorazione.
   b) E se Serena volesse colorare esattamente 5 unghie in rosa e le rimanenti in azzurro,
   quante possibilità avrebbe?

27) a) In quanti modi posso disporre 15 libri su di uno scaffale, se 5 sono di Matematica, 5 di Fisica e 5 di Scienze e io desidero che i libri di una stessa materia siano vicini fra loro?

b) E se invece avessi la situazione seguente:
5 libri identici fra loro, altri 5 identici fra loro ma diversi dai precedenti, e ancora altri 5 identici fra loro ma diversi da tutti gli altri, potendo disporre i libri in un ordine qualsiasi, senza vincolo alcuno, quante configurazioni fra loro distinguibili potrei ottenere?

28) Stabilisci in quanti modi si possono disporre intorno ad un tavolo circolare 8 ragazzi e 2 insegnanti, se
a) i due insegnanti vogliono sedersi uno accanto all'altro
b) i due insegnanti non vogliono sedersi uno accanto all'altro

28') Stabilisci in quanti modi si possono disporre intorno ad un tavolo circolare 8 ragazzi e 4 insegnanti, se
a) i quattro insegnanti vogliono sedersi uno accanto all'altro
b) nessun insegnante vuole sedersi a fianco di un altro insegnante

29) 16 alunni in gita scolastica saliranno su di un'alta cupola alla quale si accede esclusivamente tramite un ascensore con 4 posti. In quanti modi sarebbe teoricamente possibile suddividere la classe nei 4 gruppi da 4 persone, tenendo conto anche dell'ordine in cui l'ascensore sarà utilizzato dai diversi gruppi?

30) Quanti sono gli interi di 4 cifre, le cui cifre da sinistra a destra decrescono (es. 8540)?

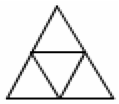
31) Quanti sono i numeri, da 1 a 1000, che non sono divisibili né per 12 né per 18?

32) Un numero di targa automobilistica italiano è formato da una coppia di lettere, seguita da una terna di cifre, a sua volta ancora seguita da una coppia di lettere.

Si è deciso che possano essere utilizzate le lettere dell'alfabeto inglese, ma non tutte: sono vietate la I, la O, la Q e la U per la facilità di confusione di questi simboli con altri.
Restano dunque a disposizione 22 lettere, mentre le cifre dei tre numeri possono andare ciascuna da 0 a 9.
Ciò premesso, quante diverse targhe sono teoricamente possibili con queste regole?

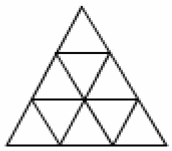
33) Dimostra che a) $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ b) $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+...+n\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}$
(*IMPEGNATIVO. Utilizza l'es. precedente, e una identità nota*)

34) Quanti triangoli vedi nella figura qui a fianco?



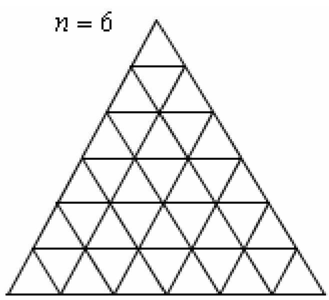
Se la tua risposta coincide con la soluzione dell'equazione $(x-4)^2+9=x(x-3)$, hai detto bene.

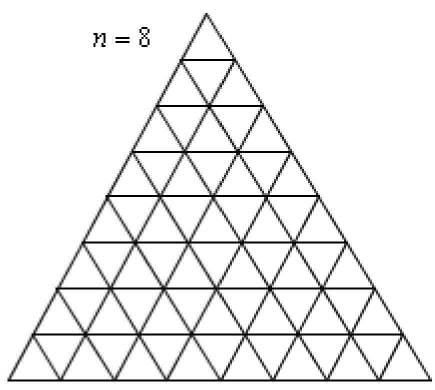
… E in quest'altra?



Beh, ci sarà voluto un attimo in più, ma suppongo che tu abbia risposto ancora correttamente:
Il numero richiesto è uguale alla soluzione dell'equazione $x/2-1=x/4+(3/2)^2$.

Ora, aumentando il numero delle suddivisioni dei lati del triangolo equilatero grande, stabilire quanti triangoli si vedono nella figura è sempre più laborioso.
Ci riusciresti, nei casi seguenti?





Prima di andare a vedere le risposte a pagina 40, datti da fare per il tempo necessario!

Da Stefano Barbero e Nadir Murru, dell'Università di Torino:

35) La cassaforte di Zio Paperone ha una combinazione costituita da 10 cifre comprese tra 0 e 9.
Quante possibili combinazioni ha a disposizione Zio Paperone contro i Bassotti?
Quante diventerebbero le combinazioni possibili, se decidesse di evitare cifre consecutive uguali?

36) Qui, Quo e Qua decidono di allenare una squadra di calcio con i compagni di scuola.
Se possono scegliere tra 26 compagni fra cui ci sono 4 portieri, 5 difensori, 8 centrocampisti e 9 attaccanti, quante formazioni possibili con 1 portiere, 3 difensori, 4 centrocampisti e 3 attaccanti possono formare?
Se Qui, Quo e Qua volessero giocare in ogni formazione, quante sarebbero le formazioni possibili sapendo che Qui è un difensore, Quo un centrocampista e Qua un attaccante?

37) Amelia, la fattucchiera che ammalia, è inferocita con il suo corvo Gennarino, perché ha strappato inavvertitamente la pagina con la parola magica per conquistare il decino di Zio Paperone.
Purtroppo sono rimaste solo lettere sparpagliate e illeggibili. Amelia si ricorda che la parola magica aveva 10 lettere tutte fra loro distinte del nostro alfabeto di 21 simboli, iniziava con una vocale e a ogni vocale seguiva una sola consonante. Quante possibili parole magiche può ricostruire Amelia?

38) Pippo, Topolino e Minnie vanno al cinema e decidono di sedersi in una fila vuota da 8 posti.
In quanti modi distinti possono sedersi i tre amici?
Se Minnie e Topolino vogliono stare vicini quante diventano le disposizioni possibili?

39) Pietro Gambadilegno vuole indicare con una crocetta sulla carta di Topolinia i suoi prossimi 5 obiettivi.
Sapendo che a Topolinia ci sono 6 banche e 4 gioiellerie, quante saranno le possibili scelte?
Se Pietro, volendo fare un regalo alla sua Trudy, decide di includere certamente almeno 2 gioiellerie, quante diventano le scelte possibili in questo caso?

40) Pico De Paperis deve ricostruire un geroglifico della tribù dei Sainent ormai eroso dal tempo.
Da un antico e polveroso volume deduce che questo geroglifico è costituito da tre simboli non necessariamente distinti e che i geroglifici dei Sainent costituiti da tre simboli possono dare luogo ad almeno 340 significati diversi.
Qual è il numero minimo di simboli usati dai Sainent?
Se i simboli dei Sainent fossero solo 5 quanto dovrebbe essere la lunghezza minima di un geroglifico per codificare con simboli (anche ripetuti) almeno 3000 parole distinte di questo arguto popolo?

41) In quanti modi diversi si potevano sedere Artù e i 12 cavalieri della tavola rotonda?

42) In una gelateria che ha 10 qualità di gelato, Pierino vuole comprarsi un cono con 3 palline.
a) Quante diverse combinazioni può scegliere, se vuole che i gusti delle tre palline siano tutti diversi?
b) E se vuole tre gusti diversi, fra i quali almeno uno tra cioccolato e pistacchio?
c) Infine, in quanti modi Pierino potrebbe farsi servire un cono con tre palline di gelato, di gusti non necessariamente diversi?

43) In un prato fiorito ci sono 10 fiori. In quanti modi diversi 5 api si possono disporre sui fiori?

44) In una squadra di calcio in campo (escluso il portiere)
ci sono 10 calciatori e 6 sono in panchina (escluso il portiere di riserva).
L'allenatore ha clamorosamente sbagliato formazione iniziale
e a fine primo tempo vuole effettuare delle sostituzioni (senza coinvolgere i portieri).
Sapendo che ha a disposizione 3 cambi e li vuole effettuare tutti, quante possibili scelte diverse può fare?

45) In un Liceo ogni classe ha una squadra di calcetto, e incontra ogni altra classe una sola volta.
Se le partite sono in totale 105, quante sono le classi?

46) a) Una classe di Liceo ha 27 alunni, che non sono tutte femmine; tuttavia, presi due alunni qualsiasi, fra essi c'è certamente almeno una femmina. Si domanda quanti sono i maschi in quella classe.
b) Una classe di Liceo ha 27 alunni, che non sono tutte femmine; tuttavia, presi tre alunni qualsiasi, fra essi c'è certamente almeno una femmina. Si domanda quanti sono i maschi in quella classe.

47) Con quanti zeri termina il risultato
a) della somma $1+2+3+...+99$? b) della moltiplicazione $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 99$?

48) Nell'asilo di un paesino di montagna ci sono 8 bambini, e fra questi c'è una coppia di gemelli.
Ora, le maestre intendono far giocare i bambini in due squadrette di 4, ma non vogliono che i gemelli facciano parte della stessa squadra, per favorirne la socializzazione con gli altri piccoli.
In quanti modi diversi è possibile teoricamente suddividere i bambini in squadre?

49) Un gruppo di pensionati, 5 uomini e 5 donne, frequenta al Circolo Anziani un corso di ballo e uno di Inglese.
a) Per il corso di ballo, in quanti modi si possono teoricamente formare le coppie?

Per il corso di Inglese, in aula ci sono 5 banchi doppi, e l'insegnante chiede che in ognuno di essi si sistemino un uomo e una donna, con la donna a destra dell'uomo.
b) In quanti modi diversi è possibile che i banchi vengano occupati?
c) E se il vincolo "donna a destra dell'uomo" non ci fosse?

50) Se per i 6 alunni insufficienti in Italiano la professoressa organizza un'ultima verifica di recupero, che consiste in un tema di letteratura per il quale sono proposte quattro tracce alternative, stabilisci in quanti modi diversi possono, teoricamente, i ragazzi scegliere l'argomento del tema.

51) a) Stabilisci quanti lati ha un poligono che possiede 170 diagonali.
b) Alla cerimonia di inizio di un torneo di scherma, i partecipanti si stringono la mano in tutti i modi possibili. Tuttavia, poiché due fra gli schermidori non sono ancora arrivati per un ritardo dei treni, le strette di mano sono 21 in meno di quelle che avrebbero dovuto teoricamente essere. Quanti atleti sono iscritti alla competizione?

PROBLEMI ASSEGNATI ALL'ESAME DI STATO DEL LICEO SCIENTIFICO

52) Dimostrare che si ha (*formula di Stifel*)

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n>k>0$ (2001, *Tradizionale*)

53) Si consideri una data estrazione in una determinata ruota del Lotto.
Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90 (2003, *Tradizionale*)

54) Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre? (2003, *PNI*)

55) Considerati gli insiemi $A=\{1, 2, 3, 4\}$ e $B=\{a, b, c\}$, quante sono le applicazioni (=le funzioni) di A in B?
(2004, *Tradizionale e PNI*)

NOTA: ricordiamo che una "funzione" di A in B è una corrispondenza tale che ad ogni elemento di A corrisponda uno e un solo elemento di B

56) Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla sessantaquattresima casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore. (2006, *Tradizionale e PNI*)

57) Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n\in\mathbb{N}$
(2006, *Tradizionale e PNI*)

58) Si risolva l'equazione $4\binom{n}{4}=15\binom{n-2}{3}$ (2007, *Tradizionale*)

59) Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n? (2008, *Tradizionale*)

(NOTA:
le progressioni aritmetiche sono quelle successioni nelle quali la differenza fra due termini consecutivi è costante: ad esempio, 1 4 7 10 13 16 19 … è una progressione aritmetica perché fra un termine e il successivo la differenza è sempre 3).

60) Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n>k$ (2009, *Tradizionale e anche PNI*)

61) In una scatola di legno sono contenute alcune matite colorate. Per ogni colore vi è lo stesso numero di matite. Per avere la certezza di prendere una matita blu, naturalmente senza poter sceglierla, bisogna estrarne 25, e per esser certi di prendere tutte le matite di uno stesso colore bisogna invece estrarne 29.
Quante matite ci sono nella scatola?
(dalla divertente, pulita e istruttiva *Settimana Enigmistica*)

Cercando su Internet è possibile trovare, evidentemente, tanti altri bei problemi! ⇨

RISPOSTE

1a) Sono le *k*-uple ordinate, costruibili utilizzando senza ripetizione *k* fra quegli *n* oggetti.

1b) $D_{n,k} = n(n-1)...(n-k+1)$

perché, nel costruire una *k*-upla partendo da un insieme di *n* oggetti dati,
per la scelta del primo oggetto ho *n* possibilità,
per ciascuna delle quali mi si apre un ventaglio di $(n-1)$ possibilità per la scelta del secondo oggetto, ecc.
Devo avere in totale *k* fattori, quindi mi fermo a $(n-k+1)$;
se mi fermassi a $(n-k)$ sbaglierei, perché ci sarebbe un fattore in più.

2a) Sono le *k*-uple non ordinate, costruibili utilizzando senza ripetizione *k* fra quegli *n* oggetti.

2b) La dimostrazione è in due fasi.

Prima di tutto, avremo $C_{n,k} = \dfrac{D_{n,k}}{k!}$ perché (Terzo principio del Calcolo Combinatorio)

se ho contato il numero $D_{n,k}$ delle *k*-uple ordinate,

allora il numero $C_{n,k}$ delle *k*-uple non ordinate si otterrà semplicemente dividendo per $k!$

A questo punto, moltiplicando sia "sopra" che "sotto" per $(n-k)!$, avremo la tesi. Insomma:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot...\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot...\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)(n-k-1)\cdot...\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3) $n!/n = (n-1)!$ Si parte infatti dal numero $n!$ di modi in cui è possibile mettere in ordine quegli oggetti, poi si pensa che ognuna di queste *n*-uple fa parte di un gruppo di *n* *n*-uple fra loro equivalenti per rotazione

4) $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

$$\left(x^2-2\right)^5 = \binom{5}{0}\left(x^2\right)^5 + \binom{5}{1}\left(x^2\right)^4(-2) + \binom{5}{2}\left(x^2\right)^3(-2)^2 + \binom{5}{3}\left(x^2\right)^2(-2)^3 + \binom{5}{4}\cdot x^2\cdot(-2)^4 + \binom{5}{5}(-2)^5 =$$
$$= x^{10} + 5x^8\cdot(-2) + 10x^6\cdot 4 + 10x^4\cdot(-8) + 5x^2\cdot 16 - 32 = x^{10} - 10x^8 + 40x^6 - 80x^4 + 80x^2 - 32$$

5) a) $2^8 = 256$
b) No, perché il numero dei sottoinsiemi di un insieme di *n* elementi è 2^n, ma 4000 non è una potenza di 2
c) 15, perché $32768 = 2^{15}$

6) $1001 + 1002 + 1003 + ... + 1999 + 2000 = (1 + 2 + 3 + ... + 1999 + 2000) - (1 + 2 + 3 + ... + 999 + 1000) =$

$$\underset{\text{di GAUSS}}{\overset{\text{Formula}}{=}} \frac{2000\cdot 2001}{2} - \frac{1000\cdot 1001}{2} = 1000\cdot 2001 - 500\cdot 1001 = 500\cdot(4002-1001) = 500\cdot 3001 = 1500500$$

oppure: $1001 + 1002 + 1003 + ... + 1999 + 2000 = \underbrace{(1000 + 1000 + ... + 1000)}_{\text{1000 addendi}} + (1 + 2 + ... + 999 + 1000) =$

$$= 1000\cdot 1000 + \frac{1000\cdot 1001}{2} = 1000000 + 500\cdot 1001 = 1000000 + 500500 = 1500500$$

7) a) 5! b) In tanti modi quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di 5 elementi, ossia $2^5 = 32$ c) $\binom{5}{2} = 10$

8) $26^5\cdot 10^3$; 62^8

9) a) $100\cdot 100 = 10000$
b) $100\cdot 99 = 9900$
OSSERVAZIONE: non bisogna dividere per 2, perché importa l'ordine, quindi le coppie sono ordinate: la scelta Tizio=Presidente, Caio=Segretario non equivale alla scelta Caio=Presidente, Tizio=Segretario

10) $P_9^{(3,3,3)} = \dfrac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 3!} = 1680$

oppure $\binom{9}{3}\binom{6}{3}$ (sui 9 posti a disposizione, scelgo quei tre in cui suppongo compaiano gli "1"; poi fra i 6 posti restanti scelgo i tre posti per i "2"; i posti che restano verranno occupati dai "3")

11) Tante quanti sono i modi di collegare ciascuno dei 13 vertici coi 10 vertici ottenuti ignorando quello da cui si parte e anche il precedente e il successivo … però a ben guardare in questo modo una stessa diagonale verrebbe ri-disegnata 2 volte, quindi il numero così ottenuto andrà poi diviso per 2. La risposta esatta è perciò $(13 \cdot 10)/2 = 65$ diagonali.

Ragionamento alternativo: le diagonali sono tante quante le coppie non ordinate di vertici distinti, salvo poi sottrarre dal computo i 13 lati. Quindi: $(13 \cdot 12)/2 - 13 = 65$

In generale, un poligono di *n* lati possiede $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonali.

12) Difficilotto.

Innanzitutto, immaginiamo di scegliere le 4 persone che costituiranno, diciamo così, il Primo gruppo (poi, tuttavia, l'ordine dei gruppi non conterà). Per questa scelta, abbiamo $\binom{20}{4}$ possibilità.

A questo punto, per costituire il secondo gruppo, abbiamo $\binom{16}{4}$ possibilità, e così via.

Perciò possiamo suddividere le 20 persone nei 5 gruppi di 4 persone ciascuno in $\frac{\binom{20}{4}\cdot\binom{16}{4}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}}{5!}$ modi, dove la divisione per 5! si deve al fatto che abbiamo pensato, per comodità psicologica, di costituire un Primo Gruppo, poi un Secondo gruppo, ecc., ma poi i gruppi così formati non hanno "dignità" differenziate e quindi non conta l'ordine.

Ma adesso i componenti di ogni singolo gruppo si mettono a fare il girotondo!
Quindi i componenti di ciascun gruppo si possono disporre, dandosi la mano e mettendosi in cerchio, in 3! = 6 modi, tanti quante sono le permutazioni cicliche di 4 oggetti.

Perciò il numero di "configurazioni" sarà uguale al numeraccio determinato precedentemente (che era poi il numero dei modi in cui le 20 persone potevano ripartirsi in 5 gruppi da 4 persone), MOLTIPLICATO per 3! per tante volte quanti sono i gruppi.

Si ottiene così il numero

$$\frac{\binom{20}{4}\cdot\binom{16}{4}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}}{5!}\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!$$

che è la risposta esatta al quesito.

13) a) Quanti sono i multipli di 8 minori o uguali di 1000000?
$1000000 : 8 = 125000;\ \ 8\cdot 1 = 8,\ \ 8\cdot 2 = 16,\ \ldots\ ,\ 8\cdot 125000 = 1000000$ quindi sono 125000.
Quanti sono i multipli di 9 minori o uguali di 1000000?
$1000000 : 9 = 111111,...;\ \ 9\cdot 1 = 9,\ \ 9\cdot 2 = 18,\ \ldots\ ,\ 9\cdot 111111 = 999999$ quindi sono 111111
Quanti sono i numeri interi ≤ 1000000 che sono multipli simultaneamente sia di 8 che di 9?
Beh, si tratta dei multipli di 72!
$1000000 : 72 = 13888,...;\ \ 72\cdot 1 = 72,\ \ 72\cdot 2 = 144,\ \ldots\ ,\ 72\cdot 13888 = 999936$ quindi sono 13888
Ora, $n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = n(\mathrm{A}) + n(\mathrm{B}) - n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = 125000 + 111111 - 13888 = 222223$.

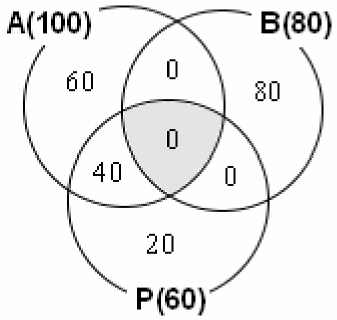
b) n(multipli di 8 minori o uguali di 1000000) $= 125000$
n(multipli di 10 minori o uguali di 1000000) $= 100000$
n(multipli sia di 8 che di 10 che sono ≤ 1000000) $=$
$= n$(multipli di 40 minori o uguali di 1000000) $= 25000$
n(multipli di 8 o di 10 minori o uguali di 1000000) $= 125000 + 100000 - 25000 = 200000$

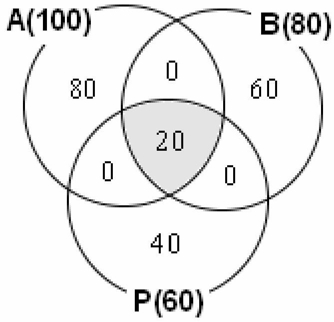
c) Un intero è multiplo di 8 o in alternativa di 56 se e solo se è multiplo di 56.
E poiché 1000000:56 = 17857, … la risposta al quesito è 17857.

14) $\sqrt{100000} = 316,...;\quad 316^2 < 100000,\ \ 317^2 > 100000$
$\sqrt{500000} = 707,...;\quad 707^2 < 500000,\ \ 708^2 > 500000$.
La risposta è : $707 - 316 = 391$.

15) a) Perché le situazioni possono essere ben differenti!

Ad esempio si potrebbe avere … oppure: ecc. ecc. ecc.





b) Sì:

$n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{P}) = n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})+n(\mathrm{P})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{P})-n(\mathrm{B}\cap\mathrm{P})+n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{P})$

$200 = 100+80+60-15-15-15+n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{P})$

$200 = 195+n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{P})$

$n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{P}) = 5$

16) a) $5+5\cdot5+5\cdot5\cdot5 = 5+25+125 = 155$
b) $5+4\cdot5+4\cdot5\cdot5 = 5+20+100 = 125$
c) $n(almeno\ una\ \ pari) = numero\ totale - n(tutte\ dispari) = 1000-155 = 845$
(NOTA: in totale sono 1000 (0, 1, 2, … , 999)

17) a) $9+9=18$ b) $9\cdot9+9\cdot9\cdot8 = 81+648 = 729$ c) $990-18 = 972$ 18) $64\cdot(64-15) = 3136$

19) Detto x il numero degli esagoni, $12\cdot5 = \dfrac{x\cdot6}{2}$ da cui $x = 20$ 20) $4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$

21) $\mathrm{P}_{10}^{(4,3,2,1)} = \dfrac{10!}{4!\cdot3!\cdot2!\cdot1!}$ 22) a) $5\cdot4\cdot3 = 60$ b) $\dbinom{5}{3} = 10$ c) $5! = 120$ d) $\mathrm{P}_5^{(3,2)} = \dfrac{5!}{3!\cdot2!} = 10$ opp. $\dbinom{5}{3} = 10$

23) $2+2+2\cdot2+2\cdot2\cdot2+2\cdot2\cdot2\cdot2+2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 64$
oppure: possono andare da $(0)_2$ (zero) a $(111111)_2$ (sessantatre) quindi sono in totale 64.

24) $5!\cdot8!\cdot5!$ 25) $\mathrm{P}_{12}^{(3,4,5)} = \dfrac{12!}{3!\cdot4!\cdot5!}$

26) a) Basta scegliere quali dita colorare in rosa! Le altre, per esclusione, verranno colorate in azzurro. Ora, questa scelta può essere effettuata in tanti modi, quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di 10 elementi, ossia in $2^{10} = 1024$ modi. Osserviamo che l'insieme vuoto corrisponde alla colorazione in azzurro di tutte le dita, l'insieme di 10 elementi corrisponde alla "tinta unica" rosa.

b) $\dbinom{10}{5} = \dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 252$

27) a) $5!\cdot5!\cdot5!\cdot3!$ b) $\mathrm{P}_{15}^{(5,5,5)} = \dfrac{15!}{5!\cdot5!\cdot5!}$

28) a) Si accomodano gli 8 ragazzi, e lo possono fare in $\dfrac{8!}{8} = 7! = 5040$ modi.

A questo punto si accomodano i due insegnanti, e lo possono fare sedendosi in uno qualsiasi dei 8 spazi fra gli 8 ragazzi seduti.
Poiché però il professore A può decidere se sedersi a sinistra oppure a destra di B, le possibilità di scelta finiscono per essere 16 e non 8.
In definitiva, $5040\cdot16 = 80640$ modi.

b) Se invece, dopo che si sono sistemati i ragazzi (e lo possono fare, come abbiamo visto, in 5040 modi) i due insegnanti NON vogliono sedere uno a fianco dell'altro, A sceglierà uno degli 8 possibili spazi e successivamente B uno dei 7 spazi rimanenti, per un totale di $8\cdot7 = 56$ possibilità di scelta per gli insegnanti e $5040\cdot56 = 282240$ possibili tavolate.

OSSERVIAMO che è $282240+80640 = 362880 = 9!$
che è poi il numero possibile di tavolate, senza alcun vincolo nella disposizione.

28') a) Si accomodano gli 8 ragazzi, e lo possono fare in $\dfrac{8!}{8}=7!=5040$ modi.

A questo punto si accomodano i 4 insegnanti, e lo possono fare sedendosi in uno qualsiasi degli 8 spazi fra gli 8 ragazzi seduti, e disponendosi in uno fra i $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ ordini possibili.
In definitiva, $7!\cdot8\cdot4!$ modi.

b) Si accomodano gli 8 ragazzi, e lo possono fare in $\dfrac{8!}{8}=7!=5040$ modi.

A questo punto si accomodano i 4 insegnanti.
Ci sono 8 spazi a disposizione (ciascuno spazio è fra due ragazzi consecutivi) e il primo insegnante può scegliere uno qualsiasi di questi 8, il secondo uno qualsiasi degli altri 7, ecc. per un totale di $7\cdot6\cdot5\cdot4$ possibilità.
In definitiva, la risposta al quesito è: $7!\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4$ modi.

OSSERVAZIONE
Qui, sommando $7!\cdot8\cdot4!$ con $7!\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4$, NON si otterrebbe $11!$ ossia il numero di tutte le possibili tavolate senza alcun vincolo. E certo, perché le due situazioni

- ♪ "i 4 insegnanti tutti vicini"
- ♫ "nessuno fra i 4 insegnanti vicino ad un altro insegnante"

NON esauriscono tutti i casi possibili.

29) $\binom{16}{4}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}$ (si scelgono i 4 del gruppo che salirà per primo, poi ...)

30) Sono tanti quanti sono i modi di scegliere 4 elementi dall'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (per poi disporli in ordine decrescente). La risposta è dunque $\binom{10}{4}=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$.

31) I numeri, da 1 a 1000, divisibili o per 12 o per 18, sono $83+55-27=111$.
Perciò quelli che non sono divisibili né per 12 né per 18 saranno $1000-111=889$.

32) 234.256.000

33a) $$n\binom{n-1}{k-1}=n\cdot\frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot((n-1)-(k-1)+1)}{(k-1)!}=n\cdot\frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n\cancel{-1}-k\cancel{+1}+1)}{(k-1)!}=$$
$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{(k-1)!}=k\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)!}=k\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=k\binom{n}{k}$$

33b) Si utilizzano le identità $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ e $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$ tramite la catena
$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=n\binom{n-1}{0}+n\binom{n-1}{1}+n\binom{n-1}{2}+\ldots+n\binom{n-1}{n-1}=$$
$$=n\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-1}\right]=n\cdot2^{n-1}$$

34) $n=6\rightarrow78$ *triangoli* $\qquad n=8\rightarrow170$ *triangoli*
Ti invito a completare la tabella sottostante, tratta dal sito www.threes.com.
Essa potrebbe servire ad avviare una riflessione molto impegnativa, ma interessante: in che relazione sta il numero di triangoli equilateri che si ottengono per un certo valore di *n*, col numero dei triangoli che si avevano per il valore precedente $n-1$?
Ancora: esisterà una formula che a partire da *n* possa permettere di calcolare il numero di triangoli?
SEI AVVISATO ☺: l'argomento è parecchio avvincente, ma non è affatto semplice.
Dopo averci meditato a sufficienza per conto tuo, potresti trovare approfondimenti sul web se ad esempio imposti una ricerca con la chiave "How many triangles?"

b = Number of triangles in the base
l = Number of little triangles
f = Next largest triangle (contains 4)
n = Next largest triangle (contains 9)
s = Next largest triangle (contains 16)
T = Total number of triangles

b	l	f	n	s	T
1	1	0	0	0	1
2	4	1	0	0	5
3	9	3	1	0	13
4	16	7	3	1	27
5	25	?	?	?	48
6	36	?	?	?	78
7	49	?	?	?	118
8	64	?	?	?	170

35) 10^{10}; $10\cdot 9^9$ 36) $4\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{9}{3}$; $4\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{9}{2}$ 37) $5!\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12$ 38) $8\cdot 7\cdot 6=336;\ 7\cdot 2\cdot 6=84$

39) $\binom{10}{5}$; $\binom{10}{5}-\binom{6}{5}-\binom{6}{4}\cdot\binom{4}{1}$ 40) $n^3\ge 340$ da cui $n=7$; $5^k\ge 3000$ da cui $k=5$ 41) $\frac{13!}{13}=12!$

42) a) $\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$ b) $\binom{10}{3}-\binom{8}{3}=120-\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=120-56=64$ c) 220

43) $\binom{10}{5}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=252$ Evidentemente, contiamo il numero di modi in cui possono essere scelti 5 fiori su quei 10; non ci interessa *quale particolare ape* va su di un determinato fiore.

44) $\binom{10}{3}\cdot\binom{6}{3}$ 45) 15 46) a) 1 b) 1 o 2 47) a) 1 b) 22

48) $\binom{6}{3}=20$ oppure $\dfrac{\binom{8}{4}-\binom{6}{2}-\binom{6}{4}}{2}=20$ 49) a) $5!$ b) $5!\cdot 5!$ c) $5!\cdot 5!\cdot 2^5$

50) In 4096 modi 51a) $\frac{n(n-3)}{2}=170$ da cui: 20 lati 51b) $\frac{(n-2)(n-3)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}-21$ da cui: 12 atleti

52) Tenendo conto di ovvie identità tipo $\boxed{k!=k(k-1)!}$ avremo

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n\cancel{-1}-k\cancel{+1})}{k!}+\frac{(n-1)(n-2)\dots(n\cancel{-1}-(k-1)\cancel{+1})}{(k-1)!}=$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!}+\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-1)!}=$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)+k\cdot(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\ \underset{\substack{\textit{il prodotto}\\ (n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}}{\overset{\textit{raccogliendo}}{=}}$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n\cancel{-k}\cancel{+k})}{k!}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{k}\quad \text{C.V.D.}$$

oppure

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=$$
$$=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n\cancel{-1}-k\cancel{+1})!}=$$
$$=\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{(n-k)(n-1)!+k(n-1)!}{k!(n-k)!}=$$
$$=\frac{(n-1)!(n\cancel{-k}\cancel{+k})}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}\quad \text{C.V.D.}$$

53) 109736 54) 306 55) $3^4=81$

56) $n°\ chicchi=1+2+4+\dots+2^{63}=\frac{2^{64}-1}{2-1}$
Si tratta ora di calcolare il numero $2^{64}-1\approx 2^{64}$, moltiplicando il quale per $38\cdot 10^{-9}$ si risponde al quesito; ora, se si approssima $2^{10}=1024$ con $1000=10^3$, il calcolo è molto agevole e si ottiene un valore superiore a 600 miliardi di tonnellate; tuttavia, il risultato esatto è addirittura > 700 miliardi di tonnellate.

57) Basta considerare lo sviluppo $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\binom{n}{n}b^n$ e pensare al caso part. $a=b=1$

58) $n=6,\ n=10$ 59) $n=7$ 61) 32