1.7 - Esercizi (risposte alle pagine successive)

18) Una cartoleria ha in vendita 32 biglietti d'auguri tutti differenti, e io devo comprarne 5.
In quanti modi diversi posso effettuare la scelta?

19) In una compagnia di 20 bambini, per carnevale 18 indosseranno costumi da animaletti.
In quanti modi è possibile scegliere quei 18? (*pssst*: *… ragiona da "furbo"*!)

20) Quanti sottoinsiemi di 5 elementi contiene un insieme di 10 elementi?

21) Con 9 numeri fissati, possiamo costruire molte "quaterne" e molte "cinquine" .
Pensiamo sia le une che le altre "non ordinate".

a) Sono più numerose le quaterne o le cinquine?

b) E se si pensasse a quaterne e cinquine *ordinate*?
In questo caso, sarebbero più numerose le quaterne o le cinquine?

22) I) 30 secondi di tempo per dire quante cinquine *non ordinate* è possibile formare con 6 numeri.
II) Altri 30 secondi per dire quante cinquine *ordinate*.

23) Dal mio guardaroba di 10 magliette e 8 paia di pantaloni voglio scegliere
3 magliette e altrettante paia di pantaloni per andare in ferie.
In quanti modi diversi posso effettuare la scelta?

24) In una classe di 28 allieve, tutte belle, intelligenti e sportive, bisogna scegliere:
- due rappresentanti di classe;
- una "miss";
- 7 ragazze per la squadra di calcetto femminile.

Stabilire in quanti modi diversi si può effettuare questa scelta
a) se gli incarichi sono incompatibili
b) se gli incarichi sono compatibili

25) Riprendiamo la situazione considerata nel problema 7).
In un'urna ci sono quattro palline, contrassegnate coi numeri 1, 2, 3, 4.
Supponiamo di estrarne 3, ma questa volta CONTEMPORANEAMENTE,
sicché non teniamo più conto dell'ordine di estrazione, ma soltanto di quali palline sono state estratte.
Quanti sono gli esiti possibili di questa estrazione?

26) In un mazzo da scopa ⇨ ci sono 40 carte. Si mischia.
In quanti possibili ordini diversi possono comparire le carte dopo la mischiata?

27) Se si effettuano 4 lanci di una moneta, quanti sono gli esiti possibili della sequenza di lanci,
tenendo conto anche dell'ordine di uscita delle Teste e delle Croci?
E' richiesto di tracciare il diagramma ad albero.

28) Devo distribuire a 10 bambini 5 mele, 2 banane e 3 pesche, ovviamente un frutto per ciascuno.
In quanti modi diversi posso effettuare la distribuzione?

29) Una ragazza possiede tre astucci di smalto per le unghie, di tre colori differenti.
In quanti modi può tingersi le unghie delle mani,
se vuole fare in modo che ciascun' unghia sia colorata in tinta unita
e non ci siano più di due colori diversi su ciascuna mano?

[E' una libera traduzione da "Introduction to Finite Maths". Testo originale:
"*A young lady has three shades of nail polish to paint her fingernails.*
In how many ways can she do this – each nail being one solid color –
if there are no more than two different shades on each hand?"]

30) Dimostra che a Perugia risiedono sicuramente almeno due persone con le stesse iniziali.

31) Ecco un esercizio che richiede tipicamente un *diagramma ad albero*.
7 persone (3 uomini e 4 donne) desiderano entrare a far parte di un "club" molto esclusivo. La direzione del "club" acconsente, a patto però di iscrivere soltanto una persona al mese, e soprattutto in modo tale che, fra i "nuovi acquisti" da quel momento in poi, si contino in totale sempre più donne che uomini.
In quanti modi diversi può avvenire la successione dei sessi nelle iscrizioni?

32) In una piccola sala d’aspetto c'è una fila di 5 poltrone.
Se il ragionier Bianchi, la signorina Rossi e il dottor Verdi vogliono sedersi,
in quanti modi diversi si possono disporre?

33) Stabilire in quanti modi possono disporsi, su di una fila di 4 sedie:
I) 1 persona II) 2 persone III) 3 persone IV) 4 persone
V) 5 persone (s'intende, una resterà in piedi) VI) 6 persone (due forzatamente resteranno in piedi)

OSSERVAZIONE: s’intende di considerare distinte fra loro anche due situazioni nelle quali, pur essendo le persone che si siedono e le sedie occupate le medesime, la collocazione delle persone sulle sedie sia differente.

INDICAZIONE: qualora le persone siano più nelle sedie, uno dei modi per ragionare (non l’unico: provaci anche diversamente!) è di immaginare che siano ... le sedie a scegliere le persone.
Così, nel caso V), indicate con 1, 2, 3 e 4 le sedie e con A, B, C, D, E le persone, diciamo che la sedia 1 ha 5 possibilità di scelta;
in corrispondenza di ciascuna di queste 5 possibilità ci sono 4 possibilità di scelta per la sedia 2 ecc.

33') Stabilire in quanti modi possono disporsi, su di una fila di k sedie, n persone, distinguendo i casi:
I) $n < k$
II) $n = k$
III) $n > k$

34) Quante sono le possibili schedine di totocalcio (14 partite) ⇨ con esattamente
5 pronostici "1", 8 pronostici "X" e 1 pronostico "2"?

35)
I) 9 persone vogliono mettersi in fila per una foto di gruppo. In quanti modi diversi si possono disporre?

II) Se vogliono invece fare due file (5 persone accovacciate davanti, le altre 4 in piedi in seconda fila) il numero delle possibili disposizioni cambia?

III) Se si tratta di 5 maschi e 4 femmine,
coi maschi accovacciati in prima fila e le femmine in piedi in seconda fila,
quante sono le possibili disposizioni? Aumentano o diminuiscono rispetto al caso I) ?

36) Un Liceo prevede per ciascuno studente l’obbligo di iscriversi
ad un minimo di 1 e un massimo di 2 fra 7 gruppi sportivi
(Pallavolo, Calcetto, Atletica, Ginnastica, Nuoto, Ballo, Tiro con l'arco).

I) Se tu sei uno studente di quel Liceo, quante scelte hai teoricamente a disposizione?

II) Se Nuoto e Tiro con l'Arco si svolgono contemporaneamente,
così da non poter essere scelte entrambe dallo stesso studente,
quante risultano le tue possibilità di scelta?

37)
I) Con 5 tessere rettangolari, recanti rispettivamente le 5 lettere A, B, C, D, E,
quante sequenze diverse si possono costruire?

II) E se le 5 tessere recano le lettere A, A, C, D, E, quante sequenze diverse si possono costruire con esse?

III) Rispondere al medesimo quesito nel caso le tessere rechino le lettere A, A, C, C, C

IV) Rispondere al medesimo quesito nel caso le tessere rechino le lettere A, A, C, C, E

38) Le pareti della mia cucina sono ricoperte da 800 piastrelle.
Volendo dipingere esattamente 50 piastrelle in giallo, 100 in rosso e 200 in blu,
lasciando bianche le rimanenti, in quanti modi sarebbe possibile effettuare il lavoro?

39) Nella mia libreria ho: 10 libri di Storia, 6 libri sugli Animali e 7 libri di Matematica. Voglio allinearli
su di uno scaffale, in modo però che i libri di una medesima materia siano tutti vicini fra loro.
In quanti modi diversi posso ordinare i miei 23 libri?

RISPOSTE AGLI ESERCIZI

18) $(32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28)/5! = 201376$

19) In tanti modi, quanti sono i modi con cui è possibile escluderne 2. Quindi: $(20\cdot 19)/2 = 190$

20) $(10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6)/5! = 252$

21a) Sono *tante* le quaterne non ordinate, *quante* le cinquine non ordinate.
Infatti, ad ogni quaterna possiamo associare biunivocamente una cinquina (quella dei 5 numeri rimanenti).
Verifica algebrica: n° quaterne non ordinate = $(9\cdot 8\cdot 7\cdot 6)/4! = 126$
n° cinquine non ordinate = $(9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5)/5! = 126$

21b) Sono di più le cinquine ordinate delle quaterne ordinate.
n° quaterne ordinate = $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 3024$
n° cinquine ordinate = $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 15120$

22) I) 6 cinquine non ordinate
(tante quanti sono i modi in cui si può escludere 1 numero dall'insieme dei 6 numeri dati)

II) $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 720$ cinquine ordinate

23) $\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}\cdot\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{3!}$

24) a) Se gli incarichi sono incompatibili: $\dfrac{28\cdot 27}{2}\cdot 26\cdot\dfrac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19}{7!}$

b) Se gli incarichi sono compatibili: $\dfrac{28\cdot 27}{2}\cdot 28\cdot\dfrac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{7!}$

25) Immediatamente: 4 (tanti quanti i modi di escludere una pallina dall'estrazione). Oppure: $(4\cdot 3\cdot 2)/3! = 4$

26) 40! (quaranta fattoriale). Davvero il gioco della scopa può essere molto vario … pur tenendo conto che due carte con lo stesso "ruolo", ad esempio: due "Re" che non siano di "denari", ossia di quadri (il seme "quadri" ha una funzione un po' speciale), sono, dal punto di vista del gioco, del tutto "intercambiabili".

27) $2^4 = 16$

28) Si tratta di scegliere i 5 bambini cui andranno le mele,
poi i 2 (fra i 5 bambini rimanenti) cui andranno le banane;
a questo punto, agli ultimi 3 bambini rimasti daremo le pesche.
La risposta è: $\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5!}\cdot\dfrac{5\cdot 4}{2}$

29) Questo problema è piuttosto complesso.
Pensiamo alla sola mano sinistra;
il numero k di possibilità che troveremo dovrà poi essere moltiplicato
per il numero di possibilità relative alla mano destra;
poiché questo secondo numero sarà evidentemente identico al precedente (e cioè k),
in definitiva il numero di possibilità richiesto dal problema sarà k^2
(evidentemente, va pensato come rilevante il fatto che una mano sia "la sinistra" e l'altra "la destra",
quindi questo risultato NON andrà diviso poi per 2).

1) Posso scegliere di colorare tutte e 5 le dita con lo stesso colore. Ho 3 possibilità.

2) Posso scegliere di colorare 1 dito con un colore e le altre 4 dita con un altro colore.
Per la scelta del singolo dito ho 5 possibilità.
Dopodiché, mi si apre un ventaglio di $3\cdot 2 = 6$ possibilità per la coppia di colori da usare.
Ho quindi $5\cdot 3\cdot 2 = 30$ possibilità.

3) Posso scegliere di colorare 2 dita con un colore e le altre 3 dita con un altro colore.
Per la scelta della coppia di dita ho $(5\cdot 4)/2 = 10$ possibilità.
Dopodiché, mi si apre un ventaglio di $3\cdot 2 = 6$ possibilità per la coppia di colori da usare.
Ho quindi $10\cdot 6 = 60$ possibilità.

1), 2), 3) esauriscono tutta la casistica.
Ho in totale $k=3+30+60=93$ possibilità per la mano sinistra.
Le possibilità per la coppia di mani sono dunque $k^2 = 93^2 = 8649$.

30) Le lettere dell'alfabeto sono 26
(mettendoci anche le varie J, K, X … che ben raramente compaiono nei cognomi italiani).
Dunque il numero di possibilità per le coppie ordinate di iniziali è $26 \cdot 26 = 676$,
di gran lunga inferiore al numero di abitanti di una città di media grandezza come Perugia.
E' vero che ci sono persone con il doppio cognome o con il doppio nome di battesimo;
ma si tratta di casi "rari".
Anche supponendo, per eccesso, che tali casi anomali costituiscano la metà della popolazione di Perugia,
rimarrebbe pur sempre l'altra metà, ben superiore ai 676 cittadini.
La coppia ordinata di iniziali è quindi costretta a ripetersi.

31) Il diagramma ad albero mostra che, rispettando i vincoli specificati, ci sono solo 5 possibilità.

32) La prima persona sceglie la sua poltrona: 5 possibilità.
A questo punto, la seconda persona sceglie la sua poltrona: 4 possibilità.
Si siede la terza persona: 3 possibilità.
$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ possibilità.

Evidentemente, ragioniamo così in quanto consideriamo rilevante l'individualità delle persone,
ossia non guardiamo solo quali sedie vengono occupate, ma "quali" e "da chi".
D'altronde, almeno dal punto di vista delle persone,
per il ragionier Bianchi avere accanto la signorina Rossi è diverso dall'avere accanto il dottor Verdi.

Se invece la nostra attenzione cadesse esclusivamente sulle sedie occupate, avremmo $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$ possibilità.

33) I) 4 modi II) $4 \cdot 3 = 12$ modi III) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ modi IV) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ modi
V) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ modi (anche: la persona che sta in piedi può essere scelta in 5 modi; dopodiché, le 4 persone che vanno a sedersi potranno farlo in $4!$ modi: quindi, i modi possibili sono $5 \cdot 4! = 120$)

VI) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ modi (anche: le 2 persone che staranno in piedi possono essere scelte in $\frac{6 \cdot 5}{2}$ modi;

le 4 persone che vanno a sedersi potranno farlo in $4!$ modi: quindi, i modi possibili sono $\frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4! = 360$)

33') I) $k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot ... \cdot (k-n+1)$ Ordino le persone in un modo qualunque; la prima persona sceglie la sua sedia, e lo può fare in k modi … poi la seconda persona, ecc.

II) $k! = n!$ III) $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$

34) Scelgo le 5 partite a cui associare il pronostico "1", poi le 8 a cui associare "X", e alla restante assocerò "2".
Risposta: $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8!}$

Allo stesso numero approderei se pensassi alle 5 da marcare con "1" e poi a quella da marcare con "2".

Le rimanenti verrebbero marcate con "X". L'espressione sarebbe più semplice: $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} \cdot 9$

anche se a dire il vero pure quella ottenuta precedentemente $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8!}$

si può immediatamente semplificare: $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} \cdot \frac{9 \cdot \cancel{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}{\cancel{8!}}$

35) I) $9!$ II) No III) $5! \cdot 4!$; diminuiscono, rispetto al caso I)

36) I) $7 + (7 \cdot 6)/2 = 28$ possibilità.
II) In quel caso ho una possibilità in meno: 27 possibilità.

37) I) $5! = 120$ II) $\frac{5!}{2} = 60$ III) $\frac{5!}{2 \cdot 3!} = 10$ IV) $\frac{5!}{2 \cdot 2} = 30$

38) Gasp! $\frac{800 \cdot 799 \cdot \ ... \ \cdot 751}{50!} \cdot \frac{750 \cdot 749 \cdot \ ... \ \cdot 651}{100!} \cdot \frac{650 \cdot 649 \cdot \ ... \ \cdot 451}{200!}$ … Buon calcolo, io devo andare, ciao!

39) I 10 libri di Storia possono essere ordinati in 10! modi;
i 6 libri sugli Animali in 6! modi e i 7 libri di Matematica in 7! modi.
Poi però devo decidere come ordinare i "gruppi":
da sinistra a destra Storia-Animali-Matematica oppure Animali-Storia-Matematica oppure…
L'ordinamento dei gruppi può avvenire in 3! = 6 modi.
In totale, posso disporre i miei libri in $10! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 3!$ modi.