

2.3 - Il coefficiente binomiale

I numeri $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ vengono anche detti (per un motivo che chiariremo) "coefficienti binomiali",

e si suole indicarli col simbolo specifico $\binom{n}{k}$ che si legge "coefficiente binomiale n su k".

Si ha dunque $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ o anche $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{k!\cancel{(n-k)!}} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$

e il fatto che sia $\binom{n}{k} = C_{n,k}$ porta alla seguente utilissima idea-guida:



IDEA-GUIDA SUL COEFFICIENTE BINOMIALE

Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ risponde alla domanda :
"dati n oggetti, in quanti modi ne posso scegliere k?"

Ricordiamo che stiamo sempre supponendo $k \leq n$. In particolare, si ha $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{n-1} = n$

Ricordando, poi, la convenzione $0! = 1$, possiamo scrivere anche $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$

E', ovviamente, opportuno *semplificare* le frazioni con fattoriali prima di svolgere il calcolo ...

Esempi: $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 720$; $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1} = 20$

- Esempio 4 - Ho un insieme di 7 oggetti distinti. In quanti modi posso sceglierne: a) 3? b) 2? c) 1? d) 6?
Risposte:

a) $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$ b) $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21$ c) $\binom{7}{1} = 7$ (ovvio ...) d) $\binom{7}{6} = 7$ (ovvio : sceglierne 6 è come escluderne 1 ...)

La PROPRIETÀ più notevole dei coefficienti binomiali è la seguente: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

L'identità in questione è facile da dimostrare col calcolo (provaci!), e comunque si può subito ragionare così:

$\binom{n}{k}$ è il numero di modi con cui è possibile, dati n oggetti, sceglierne k; ma sceglierne k equivale

a scegliere quegli $n-k$ che si vogliono escludere; e tale ultima scelta si può effettuare in $\binom{n}{n-k}$ modi.

2.4 - Permutazioni

Le "PERMUTAZIONI DI n OGGETTI"

sono tutte le n-uple ordinate costruibili utilizzando, senza ripetizione, quegli oggetti;

il numero delle permutazioni di n oggetti si indica col simbolo P_n e dal Secondo Principio si ha subito:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

E' evidente che $P_n = D_{n,n}$:

il numero delle permutazioni di n oggetti coincide col n° delle disposizioni di quegli oggetti, presi a n a n.

IDEA-GUIDA Permutazioni: modi in cui è possibile permutare l'ordine di n oggetti (modi in cui è possibile ordinarli, metterli in fila, metterli in colonna)

- Esempio 5 - In quanti modi possono 5 persone mettersi in coda davanti ad uno sportello? R.: $P_5 = 5! = 120$