

2.5 - Esercizi su disposizioni, combinazioni, permutazioni, coefficiente binomiale

Come ribadiremo nel commentare, alla pagina successiva, le soluzioni, si può ragionare

- ♪ cercando di ricondursi agli “schemi standard” delle disposizioni, combinazioni, permutazioni
- ♪ oppure semplicemente utilizzando quelle strategie di pensiero generali che abbiamo chiamato “1°, 2° e 3° principio del calcolo combinatorio”.

Tu in questa rassegna di esercizi cerca magari di arrivare alla risposta *in entrambi i modi*: ogni confronto fra modalità equivalenti di approccio è *molto istruttivo!*

Tieni comunque presente che

(sebbene ognuno di noi abbia una propria tendenza individuale a privilegiare l'una o l'altra modalità) la *seconda* sembra essere di norma *più efficace*.

Essa è anche *più generale*, perché permette di cavarsela con minore difficoltà quando il quesito è complicato e non può essere banalmente ricondotto a un caso standard.

E' tuttavia MOLTO UTILE ricordare sempre che

quando si tratta di “contare il numero dei modi in cui, dato un insieme di n oggetti, è possibile scegliere k fra questi oggetti”,

la risposta è data dal COEFFICIENTE BINOMIALE $\binom{n}{k}$.

- 40) 4 studenti devono essere interrogati, e bisticciano sull'ordine di “uscita”.
In quanti modi è teoricamente possibile fissare quest'ordine?
- 41) 4 allievi devono accomodarsi, per un corso di recupero, in un'auletta vuota nella quale ci sono 8 banchi.
In quanti modi si possono disporre nell'aula?
- 42) Entra il bidello in un'auletta vuota, nella quale ci sono 10 sedie, per prendere, dato che servono in un'altra aula, 4 di queste sedie. In quanti modi può effettuare la scelta delle sedie da portar via, non essendo rilevante, ovviamente, l'ordine in cui le preleva?
- 43) Il mio contratto di lavoro è part-time, e mi richiede di essere in attività solo 3 giorni dal Lunedì al Venerdì.
In quanti diversi modi potrei fissare i 3 giorni lavorativi?
- 44) Fra 10 foto ne devo scegliere una da appendere in cucina, un'altra in tinello e una terza in camera da letto.
In quanti modi possibili posso effettuare questa tripla scelta?
- 45) Nadia è di animo tenero: essendosi trasferita in una casa con giardino, si reca al canile municipale, dove sono ospitati 10 animali, decisa a prenderne in affidamento ben 3. Impietosita dalla vista delle gabbie, decide di estrarre a sorte, anziché scegliere, i cani da adottare. Quanti sono i possibili esiti dell'estrazione?
- 46) In una classe di 20 studenti, ci sono solo 4 maschi! Se un bel giorno l'insegnante di Scienze ha deciso di estrarre coi bigliettini 6 studenti a caso a cui affidare il riordino del laboratorio,
I) quanti sono gli esiti possibili dell'estrazione?
II) fra tutti questi possibili esiti, quanti sono quelli nei quali compare
a) nessun maschio? b) tutti e quattro i maschi? c) uno e un solo maschio? d) almeno un maschio?
- 47) Sul corridoio di una scuola si affacciano 5 aule, tutte pressappoco della stessa ampiezza, che verranno occupate dalle 5 classi I A, II A, III A, IV A, V A.
In quanti diversi modi è possibile effettuare l'assegnazione delle aule alle classi?
- 48) In una classe di 20 allievi, 8 maschi e 12 femmine, dato che nessuno si è offerto di presenziare, di domenica pomeriggio, alla cerimonia di inaugurazione di un monumento, si decide di estrarre a sorte una delegazione di 3 maschi e 3 femmine. Quanti esiti diversi potrà avere l'estrazione?
- 49) Una password dev'essere obbligatoriamente di 4 caratteri, ciascuno dei quali può essere scelto fra le 26 lettere (maiuscole) dell'alfabeto inglese, oppure fra le 10 cifre da 0 a 9. Quante sono le password possibili?
- 50) Risolvi le seguenti equazioni: a) $\binom{x+1}{4} = 5 \binom{x-1}{3}$ b) $\binom{x}{3} = \binom{x}{2}$ c) $\binom{y}{4} = \binom{y}{6}$ d) $7 \binom{x}{3} = 4 \binom{x}{4}$
e) $\binom{x}{2} + \binom{x}{3} = 4x$ f) $\binom{w+2}{2} = 28$ g) $3 \cdot \left[\binom{x}{2} + \binom{x}{3} \right] = 5 \binom{x+1}{2}$ h) $\binom{x-1}{3} + \binom{x}{4} = \frac{2}{3} \cdot \binom{x-1}{2}$
- 51) Dimostra le seguenti identità: a) $\binom{2k-1}{k} = \binom{2k-1}{k-1}$ b) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$ f) $\frac{\binom{n-k}{h}}{\binom{n}{h}} = \frac{\binom{n-h}{k}}{\binom{n}{k}}$
c) $\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k} \cdot \binom{n-1}{k}$ d) $\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{p} = \binom{n}{p} \cdot \binom{n-p}{k-p}$ e) $\binom{2k-1}{k} = \frac{1}{2} \binom{2k}{k}$

RISPOSTE

40) In $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ modi. P_4 è il numero delle permutazioni di 4 oggetti, ossia il numero dei modi in cui è possibile permutare l'ordine di 4 oggetti.

Osserviamo che sarebbero bastate le tecniche generali di pensiero apprese nei paragrafi precedenti, e in particolare il 2° Principio Generale del Calcolo Combinatorio, per giungere facilmente alla risposta, anche senza aver mai sentito parlare di “permutazioni”.

41) In $D_{8,4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ modi. $D_{8,4}$ è il numero delle disposizioni di 8 oggetti, presi a 4 a 4, ossia il n° delle quaterne ordinate che si possono costruire utilizzando (senza ripetizione) 4 fra gli 8 oggetti dati. E' evidente che qui c'entra l'ordine: non è la stessa cosa, per Anna, trovarsi nel banco numero 3 piuttosto che nel numero 7, perché magari il banco 3 è proprio davanti alla cattedra mentre il 7 è più “tranquillo” ...

Osserviamo che sarebbero bastate le tecniche generali di pensiero apprese nei paragrafi precedenti, e in particolare il 1° Principio Generale del C. C., per giungere facilmente alla risposta:

Anna può scegliere il suo banco in 8 possibili modi, dopodiché Bruno può scegliere uno dei banchi rimanenti in 7 possibili modi, Carlo può scegliere il suo in 6 modi, Donatella in 5 modi.

Diagramma ad albero ... ventagli successivi di scelte ... moltiplicazione $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

$$42) C_{10,4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \quad 43) \binom{5}{3} = 10 \quad 44) D_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \quad 45) \binom{10}{3} = 120$$

$$46) I) \binom{20}{6} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 38760 \text{ possibili esiti}$$

II) a) Tanti quanti sono i gruppi di 6 femmine, ottenibili “pescando” fra le 16 femmine: $\binom{16}{6} = 8008$

b) Tanti quanti sono i gruppi di 2 femmine! $\binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2 \cdot 1} = 120$

c) Scelgo uno dei 4 maschi, e gli accosto un gruppo di 5 femmine! $4 \cdot \binom{16}{5} = \dots = 17472$

d) Il numero di esiti senza nessun maschio è, come abbiamo visto,

$$\binom{16}{6} = 8008; \text{ il n° tot. di esiti è } \binom{20}{6} = 38760; \text{ la risp. è dunque } \binom{20}{6} - \binom{16}{6} = 38760 - 8008 = 30752$$

$$47) P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

48) Devo scegliere i 3 maschi, e lo posso fare in $\binom{8}{3}$ modi; per ognuna delle $\binom{8}{3}$ possibili scelte dei maschi,

mi si apre un ventaglio di $\binom{12}{3}$ possibilità per la scelta delle 3 femmine. La risposta è dunque $\binom{8}{3} \cdot \binom{12}{3}$.

49) Domanda-trabocchetto! Qui NON SI PUO' RAGIONARE IN TERMINI DI DISPOSIZIONI!

Infatti nulla vieta che un carattere, alfabetico o numerico, sia ripetuto due o più volte nella sequenza ...

Più avanti studieremo a questo proposito le “disposizioni con ripetizione”,

ma non sono comunque necessarie, per rispondere, conoscenze in più rispetto a quelle che già possediamo:

Per la scelta del 1° carattere ho $26+10=36$ possibilità, dopodiché mi si apre un ventaglio sempre di 36 possibilità per la scelta del 2° carattere ... La risposta al quesito è $36^4 = 1679616$.

$$50) a) \frac{(x+1) \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{4!} = 5 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{3!}$$

Abbiamo semplificato per $(x-1)(x-2)$; ciò porterebbe a trovare le due soluzioni $x=1, x=2$

che però non sono accettabili perché, affinché abbiano senso $\binom{x+1}{4}$ e $\binom{x-1}{3}$, deve comunque essere $x \geq 4$.

$$\frac{(x+1) \cdot x}{4!} = 5 \cdot \frac{x-3}{3!} \quad \frac{(x+1) \cdot x}{4!} = \frac{20(x-3)}{4!} \quad x^2 + x = 20x - 60 \quad x^2 - 19x + 60 = 0 \quad (x-4)(x-15) = 0 \quad \boxed{x=4} \vee \boxed{x=15}$$

$$b) x=5 \quad c) y=10 \quad d) x=10 \quad e) x=5 \quad f) w=6 \quad g) x=6 \quad h) x=4$$

$$51) a) \frac{(2k-1)(2k-2)\dots(2k-1-k+1)}{k!} = \frac{(2k-1)(2k-2)\dots(2k-1-(k-1)+1)}{(k-1)!}$$

$$\frac{(2k-1)(2k-2)\dots k}{k!} = \frac{(2k-1)(2k-2)\dots(k+1)}{(k-1)!}, \quad \frac{(2k-1)(2k-2)\dots(k+1) \cdot k}{k!} = \frac{(2k-1)(2k-2)\dots(k+1)}{(k-1)!} \quad \boxed{\text{OK}}$$