2.7 - Permutazioni di n oggetti non tutti diversi

Possiamo pure pensare alle
"**PERMUTAZIONI DI n OGGETTI NON TUTTI DIVERSI**".
Presi n oggetti, dei quali m<n uguali fra loro, e gli altri tutti diversi l'uno dall'altro e dai precedenti, quante n-uple ordinate distinguibili potremo costruire utilizzando quegli n oggetti?
Il numero di tali n-uple si indica con $P_n^{(m)}$ ed è abbastanza facile dimostrare che si ha

$$\boxed{\mathbf{P_n^{(m)} = \frac{P_n}{m!} = \frac{n!}{m!}}}$$

Per la dimostrazione, è sufficiente utilizzare un artificio che ci è ormai consueto:
quegli m oggetti che sono identici, pensiamoli inizialmente distinti,
poi considereremo "come se fosse una sola n-upla" tutto quel gruppo di n-uple che,
per effetto della indistinguibilità fra gli m oggetti, appaiono identiche;
ma il numero di tali n-uple è, evidentemente, m! (m fattoriale),
perché coincide col numero di modi in cui è possibile permutare l'ordine di quegli m oggetti.

GENERALIZZAZIONE
Siano dati
n oggetti, dei quali m uguali fra loro, r uguali fra loro, s uguali fra loro ... (m+r+s+... = n).
Quante n-uple ordinate distinguibili potremo costruire?
Il numero di tali n-uple si indica col simbolo $P_n^{(m,r,s,...)}$
e si potrà dimostrare, riadattando la tecnica vista appena sopra, che

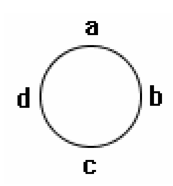
$$\boxed{\mathbf{P_n^{(m,\,r,\,s,\,...)} = \frac{n!}{m!\cdot r!\cdot s!\cdot ...}}}$$

- Es. 9 - Avendo 3 palline bianche identiche fra loro, 6 rosse identiche fra loro e 5 verdi identiche fra loro, quante sequenze distinguibili potremo costruire con questi 3+6+5=14 oggetti?
  R.: $P_{14}^{(3,6,5)} = \dfrac{14!}{3!\cdot 6!\cdot 5!}$

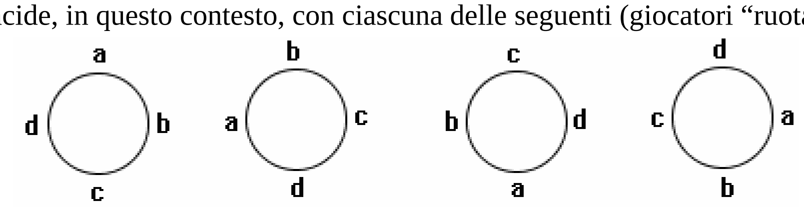
2.8 - Permutazioni cicliche

Si può pure parlare di
"**PERMUTAZIONI CICLICHE DI n OGGETTI**".
Una "permutazione ciclica di n oggetti" è
"uno dei modi in cui tali oggetti possono essere disposti intorno ad un tavolo circolare, come se fossero giocatori di carte".

E' evidente che la situazione



coincide, in questo contesto, con ciascuna delle seguenti (giocatori "ruotati"):



per cui

il numero P'_n delle permutazioni cicliche di n oggetti
è uguale al numero delle permutazioni di n oggetti, diviso per n:

$$\boxed{\mathbf{P'_n = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!}}$$

- Es. 10 - In quanti modi si possono disporre 5 giocatori di carte intorno a un tavolo?
  R.: $4! = 24$