2.9 - Esercizi vari

Si può ragionare

♪ cercando di ricondursi agli "schemi standard"
delle disposizioni o combinazioni,
con o senza ripetizione, con oggetti tutti diversi o non tutti diversi, semplici o cicliche;
o delle permutazioni …

♫ oppure semplicemente utilizzando quelle strategie di pensiero generali che abbiamo chiamato
"1°, 2° e 3° principio del calcolo combinatorio".

Tu in questa rassegna di esercizi procedi come ritieni, ma sarebbe istruttivo
tenere presenti, per giungere alla risposta, *entrambe le modalità,* con un confronto *molto istruttivo*.

Le RISPOSTE, al termine della rassegna, quasi sempre contengono anche la spiegazione del procedimento.
Osserva, però, che questi esercizi ti saranno tanto più utili, quanto più ti darai da fare
senza cedere alla tentazione di andare a vedere la soluzione bell'e pronta.
Non scoraggiarti se dovessi trovarne qualcuno particolarmente impegnativo: i quesiti difficoltosi sono i più belli,
perché stimolano più degli altri il ragionamento e la capacità di trovare strategie alternative.

52) In una festicciola di compleanno, ci sono 8 coetanei, 4 maschi e 4 femmine.
Si balla il "lento"! In quanti modi diversi si possono formare le coppie?

53) I 25 studenti di una classe devono effettuare una "prova di evacuazione",
per simulare l'abbandono dell'aula di fronte a un'emergenza.
L'aula ha una sola porta. In quanti ordini diversi potrebbero teoricamente uscire?

54) In una classe di 25 allievi, si estraggono a sorte i 5 che dovranno pulire l'aula dopo la festa di fine anno.
Quanti esiti diversi potrà avere l'estrazione?

55) In una classe di 20 allievi occorre scegliere i 2 studenti che verranno interrogati domani, e i 4 a cui
toccherà l'interrogazione il giorno dopo. In quanti modi diversi è possibile effettuare la doppia scelta?
Distinguere i due casi:
a) non conta l'ordine degli studenti, ma solo quali vengono scelti per un dato giorno;
b) importa anche l'ordine con cui gli studenti vengono estratti, e saranno di conseguenza interrogati.

56) 20 studenti devono essere suddivisi, per una competizione interna alla classe, in due gruppi da 10.
In quanti modi è possibile effettuare la suddivisione?

57) Quante sono le colonne del totocalcio (forma "moderna", con 14 partite; pronostici possibili, per una partita:
1, X, 2) contenenti esattamente 4 pronostici "1", 7 "X" e 3 "2"?

58) Due impiegati ben poco volonterosi, dovendo sbrigare una montagna di pratiche arretrate,
decidono che inizieranno solo dopo aver disputato una partita a battaglia navale,
su di uno schema a 7 colonne A, B, C, D, E, F, G e 7 righe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Quante sono le possibili "chiamate"?

59) Per passare dalla località A alla località B ci sono 3 strade diverse,
dopodiché per passare da B a C ci sono altre 3 strade diverse.
Se Piero vuole fare una gita "andata e ritorno" A-B-C-B-A, senza però mai passare
due volte per la stessa strada, in quanti modi differenti può scegliere il tragitto?

60) Sono di più gli anagrammi della parola TOSTO o quelli della parola BABBO??

61) In una classe di 25 allievi, la professoressa di Latino annuncia di voler interrogare, il giorno dopo, 5 persone.
In quanti modi diversi può essere compilata la lista dei malcapitati, tenendo conto anche dell'ordine?

62) Un insieme ha 10 elementi. Quanti sono i suoi sottoinsiemi di 4 elementi?

63) Un insieme ha 10 elementi. Quanti sono complessivamente i suoi sottoinsiemi?

64) Ciascuno dei 10 vincitori coinvolti in una cerimonia di premiazione
stringe la mano, una e una sola volta, a ciascuno degli altri. Quante strette di mano?

65) Un insegnante intende assegnare una verifica ai suoi 24 allievi,
ma vuole suddividerli in 4 gruppi di 6 allievi ciascuno,
per assegnare a ciascun gruppo una versione differente (A, B, C o D) della prova.
In quanti modi diversi può essere effettuata la suddivisione+assegnazione?

66) Quante diagonali ha un decagono?

67) In una classe di 25 allievi, 20 sono le femmine e solo 5 i maschi.
Se per le interrogazioni programmate di Chimica si decide che
il gruppo dei maschi debba precedere, per cavalleria, quello delle femmine,
in quanti modi diversi potrà essere redatta la lista dell'ordine complessivo dei nomi?

68) Quanti sono i numeri che hanno 10 cifre, tutte diverse fra loro?
(Tieni presente che "0" non può essere la cifra iniziale!)

69) Quanti sono i numeri di 6 cifre, con esattamente 3 cifre "9" e 3 cifre "8"?

70) Quanti sono i numeri di 6 cifre, tutte non nulle, e uguali a tre a tre? (es. 557577, 144411 …)

71) Quanti sono i divisori di 1000000? (indicazione: 1000000 è il prodotto di una potenza di 2 con una potenza di 5, e i suoi divisori sono perciò quei prodotti $2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$ ottenibili scegliendo α tra … e β tra …)

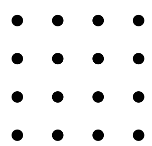
72) Stabilisci quanti sono i numeri interi di 4 cifre, che hanno almeno una delle cifre pari.

73) Quanti sono i numeri, di almeno 2 cifre, ma minori di 1000, con le cifre tutte diverse fra loro?

74) Papà, mamma e i 4 figlioli si siedono ad un tavolo circolare.
   a) In quanti modi diversi si possono disporre?
   b) E se mamma e papà vogliono essere una a fianco dell'altro?
   c) E se mamma e papà NON vogliono stare una a lato dell'altro?

75) Se abbiamo 5 rette su di un piano, quanti triangoli possono formare, al massimo?

76) Stabilisci quanti sono i triangoli che hanno per vertici tre dei punti della figura sottostante:



77) Un "byte" è una sequenza di 8 "bit".
Un "bit" è una "cifra binaria", che può valere 0 oppure 1.
Quanti differenti byte è possibile scrivere in modo da avere, in ciascun byte:
   a) esattamente due "1"?
   b) almeno due "1"?

78) I numeri in base cinque possono avere come cifre solamente 0, 1, 2, 3 oppure 4.
Quanti sono gli interi, in base cinque, aventi esattamente cinque cifre?
(Notare che la cifra iniziale non può essere 0)

79) In un insieme di 25 parlamentari, occorre sceglierne 5 per formare una commissione di inchiesta;
dei 5, uno dovrà fungere da Presidente e un altro da Segretario.
Stabilire un quanti modi può essere effettuata la scelta.

80) Una trattoria permette di scegliere fra 2 primi, 3 secondi, 4 dessert.
In quanti modi diversi è possibile pranzare
   a) supponendo di dover prendere tutte e tre le portate?
   b) supponendo di poter prendere il dessert o in alternativa rinunciarvi?
   c) supponendo di poter prendere tutte e tre le portate, o in alternativa solo due?

81) Se ad una gara a quiz prendono parte 25 persone, e vengono assegnate la medaglia d'oro,
quella d'argento e quella di bronzo, quanti potrebbero teoricamente essere gli esiti della premiazione?

82) Un numero (intero) si dice "palindromo" se rimane invariato, riscrivendolo all'incontrario.
Esempi di numeri palindromi:
404, 7227, 12321, 88, 0, ...
Quanti sono i palindromi
   a) con 6 cifre?
   b) con 7 cifre?
   c) con 8 cifre?

RISPOSTE

52) $4! = 24$ 53) $25!$ 54) $\binom{25}{5}$ 55) a) $\binom{20}{2} \cdot \binom{18}{4} = \frac{20 \cdot 19}{\cancel{2} \cdot 1} \cdot \frac{18 \cdot 17 \cdot \cancel{16} \cdot \cancel{15}^{5}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 581400$ b) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15$

56) $\binom{20}{10} \cdot \frac{1}{2} = 184756 \cdot \frac{1}{2} = 92378$ modi.

Infatti basta scegliere, sui 20 alunni, i 10 della squadra A, e automaticamente resteranno selezionati, per esclusione, anche i componenti della B … Sennonché, **in questo modo, ogni sottoinsieme di 10 persone verrebbe individuato 2 volte (una volta come squadra A e un'altra come squadra B, allorquando come squadra A si scelgono le 10 persone rimanenti), da cui la moltiplicazione per ½ del numero ottenuto.**

Se tuttavia ci fosse una qualche "asimmetria", nel senso che la squadra "A" sia destinata a operare in condizioni parzialmente diverse dalla "B", allora la moltiplicazione per ½ andrebbe evitata.
Ma nel nostro caso l'enunciazione del quesito sembra sottintendere che non ci sia differenza fra "A" e "B", quindi la presenza di quel fattore ½ appare coerente col testo del problema.

57) $P_{14}^{(4,7,3)} = \frac{14!}{4! \cdot 7! \cdot 3!}$;   oppure: scelgo i 4 posti che verranno occupati dagli "1", poi ... : $\binom{14}{4} \cdot \binom{10}{7}$

58) $7 \cdot 7 = 49$ 59) $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$

60) Quelli della parola TOSTO sono in numero di $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!}$, mentre quelli della parola BABBO sono $\frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!}$.

Vince TOSTO, che ha più anagrammi.

61) $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$ 62) $\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$

63) $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \ldots + \binom{10}{10}$.
Ma è noto dalla Teoria degli Insiemi, e lo vedremo meglio nel cap. 3), che tale numero è uguale a 2^{10}.

64) $10 \cdot 9 / 2 = 45$

65) $\binom{24}{6} \cdot \binom{18}{6} \cdot \binom{12}{6} \cdot \binom{6}{6}$ dove **l'essere l'ultimo fattore uguale a 1 corrisponde al fatto che, una volta fissati i primi 3 gruppi, il 4° e ultimo resta univocamente determinato per esclusione.**

66) $10 \cdot (10-3)/2 = 10 \cdot 7/2 = 35$ 67) $5! \cdot 20!$

68) $10! - 9!$ Da 10!, che è il numero di modi in cui posso mettere in ordine le 10 cifre 0, 1, 2, … , 9,
devo sottrarre il numero delle sequenze di 10 cifre inizianti con 0;
ma queste sono tante, quanti sono i modi in cui è possibile mettere in ordine le 9 cifre 1, 2, 3, … , 9.
Oppure: per la prima cifra ho 9 possibilità di scelta (perché devo escludere lo 0),
poi per la seconda 9 (rientra in gioco lo 0, ma va evitata la ripetizione), poi per la terza 8 …
In questo modo ottengo $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9 \cdot 9!$ possibili sequenze;
e d'altra parte si può constatare che questo risultato "va d'accordo" col precedente, perché
$10! - 9! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (10-1) = 9! \cdot 9$

69) $\binom{6}{3}$ che è poi il numero di modi con cui posso scegliere i 3 posti per la cifra 9; oppure $P_6^{(3,3)} = \frac{6!}{3! \cdot 3!}$

70) $9 \cdot 8 \cdot \binom{6}{3} \cdot \frac{1}{2}$. Scegliamo una coppia ordinata di cifre non nulle,
poi scegliamo, sui 6 posti disponibili, quei 3 nei quali collocare la prima fra queste due cifre …
sennonché, così facendo, una stessa situazione verrebbe contata 2 volte, ad esempio:
la scelta di cifre (4, 9), seguita dalla scelta dei primi 3 posti per il 4, determinerebbe la sequenza 444999, ma anche la scelta di cifre (9, 4), seguita dalla scelta degli ultimi 3 posti per il 9, porterebbe alla medesima sequenza di cifre!!! … Da cui la moltiplicazione finale per ½.

Anche: $\binom{9}{2} \cdot \binom{6}{3}$ dato che $\binom{9}{2}$ è il numero di modi in cui è possibile scegliere una coppia *non ordinata* di cifre non nulle, $\binom{6}{3}$ è il n° di modi in cui si possono scegliere, fra i 6 posti, quei 3 che conterranno *la minore* delle due cifre.

71) Osserviamo che $1000000 = 10^6 = 2^6 \cdot 5^6$. I divisori di 1000000 sono perciò i numeri della forma $2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, dove α e β sono due interi, ciascuno dei quali potrà valere 0, 1, 2, 3, 4, 5 o 6.
Si tratta di determinare in quanti modi sia possibile scegliere la coppia (α, β);
e la risposta è in $7 \cdot 7 = 49$ modi. Perciò 1000000 ha 49 divisori.

72) Le cifre sono 10 in totale, di cui 5 pari (0, 2, 4, 6, 8) e 5 dispari (1, 3, 5, 7, 9).
I numeri con 4 cifre sono complessivamente tanti quant'è il prodotto $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10=9000$
(il primo fattore 9 è dovuto al fatto che la prima cifra a sinistra non può essere 0;
d'altronde, ragionando in modo diverso, tali numeri sono quelli che vanno
da 1000 compreso fino a 9999 quindi il loro conteggio porta a $9999-1000+1=9000$).
I numeri di 4 cifre, tutte dispari, sono $5\cdot 5\cdot 5\cdot 5=625$.
La risposta al quesito si ottiene perciò sottraendo: $9000-625=8375$.

73) Con 2 cifre: $9\cdot 9=81$ (la prima cifra la posso scegliere in 9 modi, perché non può essere 0;
per ognuno di questi modi, mi si apre un ventaglio di 9 possibilità di scelta per la seconda cifra,
perché questa non dovrà essere uguale alla prima, ma in compenso c'è anche la possibilità che valga 0).
Con 3 cifre: $9\cdot 9\cdot 8=648$ numeri. Con 2 o 3 cifre: $648+81=729$ numeri.

74) a) $P'_6=\frac{P_6}{6}=\frac{6!}{6}=5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$

b) $3!\cdot 4\cdot 2=3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 2=48$. Infatti:
si siedono i 4 bambini, e, tenuto conto della ciclicità, lo possono fare in $3!$ modi;
a questo punto il papà ha 4 modi per scegliere fra quale coppia di figli mettere la sua sedia,
e infine la mamma ha soltanto 2 possibilità,
perché, volendo stare accanto al papà, può solo scegliere se stare alla sua destra o alla sua sinistra.

c) $5!-3!\cdot 4\cdot 2=120-48=72$

75) Evidentemente, per massimizzare il numero dei triangoli, non dovranno esserci coppie di rette parallele,
e per il punto di intersezione di due rette non dovrà mai passare una terza retta.
Supponendo dunque che le rette siano scelte in questo modo, ogni retta intersecherà ogni altra retta
in uno e un solo punto e i punti di intersezione saranno in totale tanti quante le coppie di rette, ossia
$\binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$.
Ma con 10 vertici, quanti triangoli si hanno?
$\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$ è il numero di terne di vertici,
sennonché sarebbe ingenuo dire che ci sono 120 triangoli:
i triangoli sono in realtà di meno, perché bisogna escludere quelle terne di punti che sono allineati fra loro,
e che pertanto non individuano un triangolo.
Su ogni retta abbiamo 4 vertici (corrispondenti ai punti di intersezione di quella retta con le altre 4 rette);
ma le terne costruibili utilizzando 4 vertici sono in numero di 4
(a partire da 4 punti, si ottiene una terna di punti se se ne esclude 1);
su ogni retta, escluderemo dunque 4 terne.
Le rette sono 5: le terne da escludere sono perciò 20.
Il numero totale di triangoli è in definitiva $120-20=100$.

76) $\binom{16}{3}-10\cdot 4-4=\frac{16\cdot 15\cdot 14}{3\cdot 2\cdot 1}-44=560-44=516$ triangoli. Infatti: $\binom{16}{3}$ sono tutte le possibili terne
non ordinate di punti; dobbiamo però sottrarre le terne di punti allineati, che non generano un triangolo!
Quante sono, dunque, le terne di punti allineati?
Su ciascuna delle 4 righe, su ciascuna delle 4 colonne, su ciascuna delle 2 diagonali,
abbiamo 4 terne di punti allineati. Dobbiamo perciò sottrarre $(4+4+2)\cdot 4=10\cdot 4$.
Abbiamo infine altre 4 terne di punti allineati parallelamente alle diagonali: dobbiamo ancora sottrarre 4.

77) a) $\binom{8}{2}=28$ b) $2^8-8-1=247$ Dal numero totale di possibili byte abbiamo sottratto gli 8 byte aventi uno e un solo "1" e il singolo byte composto da otto bit "0".

78) $4\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5=2500$ 79) $25\cdot 24\cdot\binom{23}{3}$ oppure $\binom{25}{5}\cdot 5\cdot 4$

80) a) $2\cdot 3\cdot 4=24$ b) $2\cdot 3\cdot 5=30$ *opp.* $2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3=24+6=30$ c) $2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 4=24+6+8+12=50$

81) $25\cdot 24\cdot 23=13800$

82) a) Con 6 cifre: basta scegliere le prime 3, e lo si può fare in $9\cdot 10\cdot 10=900$ modi
b) Con 7 cifre: basta scegliere le prime 4, e lo si può fare in $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10=9000$ modi
c) Con 8 cifre: basta scegliere le prime 4, e lo si può fare, come prima, in $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10=9000$ modi