2.10 - Il binomio di Newton

Si chiama "**binomio di Newton**" la formula per lo sviluppo dell' n-esima potenza di un binomio. Essa è:

$$\boldsymbol{(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$$

Il simbolo $\sum\limits_{k=0}^{n}$ si chiama “simbolo di **sommatoria**”.

Si legge “sommatoria, per k che va da 0 a n, di …” e “funziona” in questo modo:
si prende l’espressione a destra e in essa si pone k = 0; poi k = 1; poi k = 2; ecc. … fino a k = n.
I termini così ottenuti vengono sommati algebricamente fra loro.

Dimostrazione della formula

$(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$ *dove a secondo membro abbiamo* n *fattori.*

Bene! Si può pensare di effettuare la moltiplicazione
scegliendo, da ciascun fattore $(a+b)$, *o il termine* a, *o il termine* b, *in tutti i modi possibili,*
per poi sommare algebricamente i prodotti così ottenuti.

Ora, se io scelgo, ad esempio, k *volte il fattore* b *e* $n-k$ *volte il fattore* a, *avrò il monomio* $a^{n-k}b^k$.
Ma QUANTE VOLTE comparirà, questo monomio, nella somma finale?
Tante volte quanti sono i modi coi quali, fra gli n *fattori, posso selezionare quei* k *dai quali scegliere* b.
E tali modi sono $\binom{n}{k}$. *Di qui la formula.*

Vediamo qualche esempio di applicazione:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 =$$
$$= 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3b + \frac{4\cdot 3}{2!}a^2b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 =$$
$$= 1\cdot a^5 + 5\cdot a^4b + \frac{5\cdot 4}{2!}a^3b^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}a^2b^3 + 5\cdot ab^4 + 1\cdot b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

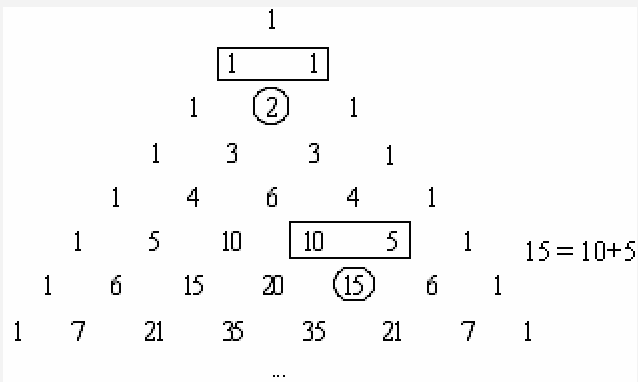
E’ interessante come i coefficienti così ricavati per gli sviluppi delle potenze successive di un binomio $(a+b)^n$ coincidano con quelli che si possono ottenere con il noto schema chiamato “**triangolo di Tartaglia**”, schema derivante da un ragionamento completamente diverso!

Per **costruire il Triangolo di Tartaglia**,
possiamo immaginarlo come un **albero di Natale**.
In alto, **sul cucuzzolo, ci mettiamo un 1**.

Ora **scendiamo lungo le pendici dell’albero**,
scrivendo (seconda riga) un 1 e poi un altro 1.

Scendiamo ancora: siamo sulla **terza riga**;
come primo elemento della riga scriviamo un 1;
poi, dato che sopra di noi troviamo una coppia di 1,
scriviamo un 2 (1+1=2).
Terminiamo la riga con un 1.
Abbiamo così costruito
i coefficienti (1, 2, 1) di $(a+b)^2$.

Scendiamo ancora, ed ecco che,
procedendo allo stesso modo,
si generano i coefficienti (1, 3, 3, 1) di $(a+b)^3$.
E così per le righe successive.



$$\boldsymbol{(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2}$$
$$\boldsymbol{(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3}$$
$$\boldsymbol{(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3b + 6\cdot a^2b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4}$$
...

ESERCIZI

83) Quanto vale il 3° coefficiente dello sviluppo di $(a+b)^{100}$? E il 4° coefficiente di $(a+2b)^{101}$?

84) Scrivi gli sviluppi di $(a+b)^6$, $(a+b)^7$ e $(a-b)^{10}$.
Ricava i coefficienti sia con il binomio di Newton che col Triangolo di Tartaglia.

85) Considera il prodotto notevole $(x+y)^{18}$.
a) Di quanti termini consta il suo sviluppo? b) Quanto vale il coefficiente del termine centrale?
c) E i coefficienti dei due termini che precedono e seguono questo?

86) Considera il prodotto notevole $(2x-5y)^{15}$.
a) Di quanti termini consta il suo sviluppo? b) Quanto valgono i coefficienti dei due termini centrali?

87) Determina il 4° termine dello sviluppo di $(x+3)^{10}$

88) Determina il 7° termine dello sviluppo di $\left(-2x+\frac{y}{2}\right)^{11}$

89) Determina (senza svolgere i calcoli) l'espressione del coefficiente di a^{326} nello sviluppo di $\left(5a^5-2a^2\right)^{100}$

90) A partire dalla formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

dimostra che

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$ b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

RISPOSTE

83) $\binom{100}{2}=4950$; $\binom{101}{3}\cdot 8=1333200$ 84) $(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$; …

85) a) 19 termini b) $\binom{18}{9}=48620$ c) $\binom{18}{8}=\binom{18}{10}=43758$ 86) a) 16 b) -128700000000 ; $+321750000000$

87) 4° termine $=\binom{n}{3}a^{n-3}b^3=\binom{10}{3}a^7b^3=\binom{10}{3}x^7\cdot 3^3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}x^7\cdot 27=3240x^7$

88) 7° termine $=\binom{n}{6}a^{n-6}b^6=\binom{11}{6}a^5b^6=\binom{11}{6}\cdot(-2x)^5\cdot\left(\frac{1}{2}y\right)^6=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\left(-32x^5\right)\cdot\frac{1}{64}y^6=-231x^5y^6$

89) $$\left(5a^5-2a^2\right)^{100}=\binom{100}{0}\cdot 5^{100}a^{500}+\underbrace{\binom{100}{1}\cdot 5^{99}a^{495}\cdot(-2)\cdot a^2}_{contiene\ a^{497}}+\underbrace{\binom{100}{2}\cdot 5^{98}a^{490}\cdot(-2)^2a^4}_{contiene\ a^{494}}+\ldots$$

Quindi,

- nel termine in cui compare il moltiplicatore $\binom{100}{0}$ l'esponente di a è 500,
- nel termine in cui compare il moltiplicatore $\binom{100}{1}$ è $500-3$,
- nel termine in cui compare il moltiplicatore $\binom{100}{2}$ è $500-6$,
- … nel termine in cui compare il moltiplicatore $\binom{100}{k}$ è $500-3k$.

Il termine nel quale è presente la potenza a^{326} corrisponderà perciò al valore di k determinabile tramite la seguente equazione: $500-3k=326$; $-3k=-174$; $k=58$

Esso è perciò $\binom{100}{58}\cdot\left(5a^5\right)^{42}\cdot\left(-2a^2\right)^{58}$ e il relativo coefficiente numerico è uguale a $\binom{100}{58}\cdot 5^{42}\cdot 2^{58}$.

90) Si tratta semplicemente di svolgere, tramite la formula in questione, le operazioni $(1+1)^n$ e $(1-1)^n$