3 - FORMULE, REGOLE E PRINCIPI INTERESSANTI

3.1 - La formula di Gauss per la somma dei primi n interi positivi

Diversi anni fa domandai per gioco al mio amico Ernesto P. se sapeva dirmi di quante partite (incontro "secco", niente rivincita) è composto un torneo a 10 squadre.

Nella mia mente mi figuravo il ragionamento che avrebbe condotto a rispondere correttamente:

"tante quante sono le coppie non ordinate costruibili con 10 oggetti, ovvero $(10\cdot 9)/2=45$".

Banale, per chi avesse qualche conoscenza di Calcolo Combinatorio … non era però il caso del buon Ernesto.

Che tuttavia, dopo una breve riflessione, fu in grado di darmi, sorprendendomi alquanto, la risposta esatta; determinata, comunque, con una strategia completamente diversa dalla mia.

Ernesto aveva considerato la sequenza $\mathbf{a\to b\to c\to d\to e\to f\to g\to h\to i\to l}$ e aveva pensato:

"la squadra **a** gioca con tutte e 9 le squadre scritte alla sua destra;
la squadra **b** gioca con tutte e 8 le squadre alla sua destra …
dunque si avranno 9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45 partite".

L'amico era stato davvero bravo e svelto.
Così io subito, perfidamente, gli riformulai il quesito con riferimento a 100 squadre.
E quando lui obiettò che ci sarebbe voluto molto tempo per svolgere il calcolo 99+98+97+…+3+2+1, gli feci presente che un bambino di otto anni era stato capace di determinare quella somma in pochi minuti.
Ernesto ci si mise dunque "sotto" con impegno ... dopo un po', tuttavia, rinunciò per noia.

Non avevo bluffato. Quel bambino era il piccolo Gauss (1777-1855), destinato a diventare uno dei più grandi matematici della Storia. Nella sua classe il maestro aveva dato da svolgere agli alunni, per farli stare un po' bravi, la somma 1+2+3+ … +99, e lui ci riuscì in un tempo incredibilmente breve, dopo aver scritto lo schema

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots\ldots & + & 97 & + & 98 & + & 99 \\
S & = & 99 & + & 98 & + & 97 & + & \ldots\ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S & = & 100 & + & 100 & + & 100 & + & \ldots\ldots & + & 100 & + & 100 & + & 100
\end{array}$$

[99 addendi, tutti uguali a 100]

$$2S=99\cdot 100$$

$$S=\frac{99\cdot 100}{2}=\frac{9900}{2}=4950$$

Generalizzando il procedimento alla somma **1+2+3+…+n** dei primi n interi positivi, avremo

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots\ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\
S & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots\ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots\ldots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

[n addendi, tutti uguali a $(n+1)$]

$$2S=n\cdot(n+1)$$

$$S=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Resta così acquisita l'importante

FORMULA (DI GAUSS) per la somma dei primi n numeri interi positivi: $\boxed{\mathbf{1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}}}$

3.2 - Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di n elementi?

Se un insieme I contiene n elementi, quanti elementi ha il suo insieme delle parti P(I)?
Insomma, quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di n elementi?

Risposta: $\boxed{\mathbf{2^n}}$

Un modo per provare questo asserto è il seguente.
Immaginiamo di ordinare, in un modo qualsiasi, gli elementi di I: **a, b, c, d, ...**
Ora, se vogliamo costruire un sottoinsieme di I, potremo passare in rassegna questi elementi "schierati" come dei soldatini, per scegliere quali inserire nel nostro sottoinsieme e quali invece non inserire.

- Per **a** abbiamo 2 possibilità: SI' (inserirlo nel sottoinsieme che stiamo costruendo) o NO (non inserirlo).
- Per **b** abbiamo 2 possibilità (SI' o NO) …
- Per **c** abbiamo 2 possibilità (SI' o NO) …
- …

In definitiva, la costruzione di un sottoinsieme di I può avvenire in 2^n modi diversi.
Pertanto, i sottoinsiemi di I sono in numero di $\mathbf{2^n}$.
Ad esempio, quindi, l'insieme dei 12 Apostoli ha $2^{12}=4096$ sottoinsiemi.

3.3 - Regola della somma

Se A e B sono due insiemi finiti DISGIUNTI
(= privi di intersezione = la cui intersezione è l'insieme vuoto = privi di elementi comuni),
allora

$$\boldsymbol{n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})}\quad [\,n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\text{ indica il numero degli elementi di }\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\text{, ecc.}]$$

E **lo stesso vale se gli insiemi finiti di cui facciamo l'unione sono 3 o più e sono a due a due disgiunti.**

3.4 - Principio di Inclusione/Esclusione (PIE)

Se A e B sono due insiemi finiti QUALSIASI, allora

$$\boldsymbol{n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}$$

In effetti, se per calcolare $n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ noi determinassimo la somma $n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})$, sbaglieremmo in quanto ci ritroveremmo a CONTARE 2 VOLTE gli elementi di $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$: se un elemento è *comune* ad A e a B, facendo $n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})$ lo si conta una prima volta come elemento di A e poi una seconda volta come elemento di B.
Per cui basterà, partendo da $n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})$, sottrarre $n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$, per avere il n° esatto degli elementi di $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$.

Per tre insiemi finiti A, B, C la formula è un po' più complicata:

$$\boldsymbol{n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{C})=n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})+n(\mathrm{C})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})-n(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})+n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})}\,.$$

Prova tu stesso a cercare la giustificazione di questa uguaglianza!

In generale, per contare il numero degli elementi dell'unione di N insiemi finiti $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_N$, la formula è

$$n\left(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\ldots\cup\mathrm{A}_N\right)=$$
$$=\sum_{1\le i\le N} n\left(\mathrm{A}_i\right)-\sum_{1\le i<j\le N} n\left(\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j\right)+\sum_{1\le i<j<k\le N} n\left(\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j\cap\mathrm{A}_k\right)-\ldots+(-1)^{N-1}n\left(\mathrm{A}_1\cap\ldots\cap\mathrm{A}_N\right)$$

Esempio 1 - Quanti sono i numeri, da 1 a 1 milione, divisibili per 2 o per 3?

Risposta:

posto $\begin{array}{l}\mathrm{A}=\{numeri\ \ da\ 1\ a\ 1000000\ \ divisibili\ \ per\ \ 2\}\\ \mathrm{B}=\{numeri\ \ da\ 1\ a\ 1000000\ \ divisibili\ \ per\ \ 3\}\end{array}$, per il PIE avremo

$$n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=500000+333333-166666=666667$$

3.5 - Regola del complementare

A volte, se ci si trova all'interno di un insieme universo finito U,
e l'obiettivo è di contare il numero degli elementi di un suo sottoinsieme A,
risulta invece più agevole contare il numero degli elementi del *complementare* di A, dopodiché si sottrarrà:

$$\boldsymbol{n(\mathrm{A})=n(\mathrm{U})-n(\overline{\mathrm{A}})}\,.$$

Questo "passaggio al complementare" è particolarmente utile, di norma, quando l'insieme A è definito come l'insieme degli elementi di U che soddisfano ad ALMENO UNA fra due o più condizioni.
Il complementare $\overline{\mathrm{A}}$ di A sarà infatti, in questo caso, l'insieme degli elementi di U che non verificano NESSUNA delle condizioni in gioco.
E di norma calcolare il numero degli elementi di questo $\overline{\mathrm{A}}$ sarà più semplice, perché la determinazione diretta del numero di elementi di A, per via della parola "almeno", comporterebbe una laboriosa distinzione di casi.

Esempio 2 - Quanti sono i numeri di 3 cifre che presentano almeno una volta la cifra "1" ?

Risposta: $n(\text{numeri di 3 cifre che presentano almeno un "1"})=$
$n(\text{numeri di 3 cifre})-n(\text{numeri di 3 cifre che non presentano NESSUN "1"})=$
$=900-8\cdot 9\cdot 9=900-648=252$

3.6 - Regola del prodotto cartesiano

Ricordiamo che il prodotto cartesiano $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ di due insiemi A, B
è l'insieme i cui elementi sono le coppie ordinate (a,b) nelle quali $a\in\mathrm{A}$ e $b\in\mathrm{B}$.
Bene, **il numero degli elementi di $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$, essendo A, B due insiemi finiti,**
è semplicemente dato dal risultato della moltiplicazione $n(\mathrm{A})\cdot n(\mathrm{B})$.
E la stessa regola si estende al prodotto cartesiano di tre o più insiemi.

Ad esempio, in un torneo andata-e-ritorno con 12 squadre, detto S l'insieme di queste squadre, l'insieme di tutte le partite coincide sostanzialmente col prodotto cartesiano $\mathrm{S}\times\mathrm{S}$, PRIVATO però delle coppie i cui due elementi coincidono (perché evidentemente una squadra non gioca contro sé stessa).
Quindi il numero di partite del torneo è dato da $12\cdot 12-12=144-12=132$
(risultato, questo, che si poteva ricavare anche con altre modalità di ragionamento).