3.7 - Combinazioni con ripetizione

Supponiamo di partire da un insieme di n oggetti, con l'intenzione di creare dei gruppi in ciascuno dei quali siano presenti k oggetti, "pescati" dall'insieme degli n oggetti dati, con la possibilità, fissato un oggetto, di utilizzarlo nessuna volta, una volta, o anche più volte.

Insomma:
gli oggetti della k-upla, che è pensata NON ordinata, non devono essere necessariamente tutti distinti.
In questo contesto, può essere $\mathbf{k < n}$, $\mathbf{k = n}$, oppure $\mathbf{k > n}$.

Queste k-uple non ordinate saranno chiamate le "combinazioni con ripetizione, degli n oggetti dati, di classe k".

Ad esempio, dato l'insieme delle 4 lettere $\{A, B, C, D\}$, le loro combinazioni con ripetizione, di classe 3, sono

BCD, ACD, ABD, ABC, AAA, BBB, CCC, DDD,
AAB, AAC, AAD, ABB, BBC, BBD, ACC, BCC, CCD, ADD, BDD, CDD

NOTA - A dire il vero, come affermano M. Falanga e L. Battaia nel loro splendido sito www.batmath.it, forse sarebbe meglio parlare di "**combinazioni, di classe k, di OGGETTI DI n TIPI**", proprio per suggerire l'idea di "ripetibilità" in un modo psicologicamente più naturale: l'idea di uno stesso "tipo" che può comparire diverse volte sembra più spontanea rispetto a quella di un unico oggetto che si ha la possibilità di riutilizzare.

Si può dimostrare (noi qui omettiamo questa dimostrazione, che non è esageratamente difficile, ma è comunque più elaborata rispetto alle precedenti di questo capitolo) che

il numero delle combinazioni con ripetizione di classe k di n oggetti è dato da $\boxed{\mathbf{C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}}}$

Ad esempio, con $n = 4$ e $k = 3$, abbiamo $C'_{4,3} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$.

- Esempio 1 - In quanti modi è possibile distribuire 12 oggetti identici in 3 scatole A, B, C?

  Risposta: Beh, potrei mettere 1 oggetto in A, 5 in B e 6 in C (schematizzando: ABBBBBCCCCCC); oppure 4 oggetti in A, 8 in B, 0 in C (schematizzando: AAAABBBBBBBB), ecc. ecc. ecc.
  Ma allora le possibilità di collocare questi 12 oggetti identici nelle 3 scatole date sono tante, quante sono le combinazioni con ripetizione di classe 12, di 3 oggetti (le scatole), ossia sono
  $$C'_{3,\,12} = \binom{3+12-1}{12} = \binom{14}{12} = \frac{14!}{12!\cdot 2!} = \frac{14\cdot13}{2\cdot1} = 91$$

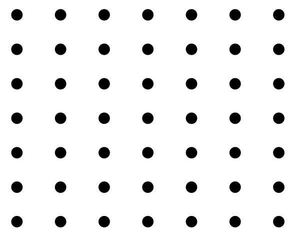
- Esempio 2 - Quante sono le terne ordinate di numeri naturali (con possibilità di ripetizione), che danno per somma 10?

  Risposta: $10 = \underbrace{(1+1+1+1)}_{4} + \underbrace{(1+1+1)}_{3} + \underbrace{(1+1+1)}_{3}$; $\quad 10 = \underbrace{(1+1+1+1+1+1)}_{6} + \underbrace{(1+1+1+1)}_{4} + \underbrace{()}_{0}$; ...
  Dunque si possono costruire terne ordinate di numeri naturali aventi per somma 10 in tanti modi quante sono le possibilità di collocare 10 oggetti identici in 3 scatole A, B, C.
  E dall'esercizio precedente si trae che il numero dei modi è $C'_{3,\,10} = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = 66$

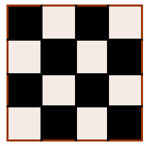
- Es. 3 - L'operazione $(a+b+c+d+e)^6$ ha come risultato un polinomio omogeneo di 6° grado nel quale ogni termine contiene le 5 lettere a, b, c, d, e (non necessariamente tutte), e nei vari termini compaiono tutte le possibili combinazioni di esponenti compatibili col vincolo che il termine sia, appunto, di grado 6.
  Questo fatto si può comprendere pensando che la potenza $(a+b+c+d+e)^6$ equivale al prodotto
  $(a+b+c+d+e)(a+b+c+d+e)(a+b+c+d+e)(a+b+c+d+e)(a+b+c+d+e)(a+b+c+d+e)$,
  e quest'ultimo può essere eseguito sommando algebricamente i prodotti di 6 fattori ottenibili prendendo un termine da ciascuna parentesi, in tutti i modi possibili. Bene … quanti termini avrà questo polinomio?

  Risposta: Uno dei termini avrà come parte letterale $a^2bcde = aabcde$, un altro $a^2d^4 = aadddd$, ecc. ; insomma: i termini sono tanti, quante le combinazioni con ripetizione di 5 oggetti, di classe 6.
  Il numero di termini è perciò uguale a $C'_{5,\,6} = \binom{5+6-1}{6} = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\cdot 4!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 210$

3.8 - Esercizi sul Capitolo 3



1) Quanto vale la somma $2+4+6+8+...+2n$ dei primi n numeri pari a partire da 2 ?
2) Quanto vale la somma $1+3+5+7+...+(2n-1)$ dei primi n numeri dispari ?
3) a) Serviti della figura a fianco per giustificare che $2(1+2+3+...+(n-1))+n=n^2$
   b) Dai poi anche una dimostrazione algebrica della stessa identità.
4) Di fronte alle 8 proposte di un buffet, posso scegliere di assaggiarle tutte, oppure solo una parte, o addirittura di stare a digiuno. Ora … quante possibilità di scelta ho complessivamente?
5) Cerco di educare bene i miei 12 figli, e ognuno di loro fa almeno uno sport fra Corsa e Palestra. 10 praticano la Corsa e 8 la Palestra. Sapresti dirmi quanti fanno entrambi gli sport?
6) Se in una classe i sufficienti in Matematica sono 14, i sufficienti in Latino sono 16 e in Inglese 18, e si sa che 24 sono sufficienti in almeno una delle 3 materie e 10 sono sufficienti in tutte e 3, sarà possibile stabilire con certezza quanti studenti sono sufficienti a) in esattamente 2 materie? b) in almeno due materie?



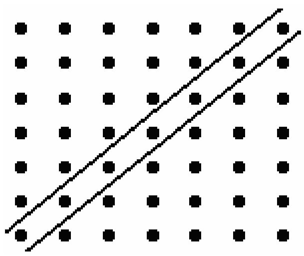
7) Fra i numeri da 1 a 1000, quanti presentano almeno una cifra uguale a 0?
8) In quanti modi posso piazzare 4 pedine fra loro indistinguibili, su di una scacchiera 4 X 4 come quella nella figura qui a destra, se voglio occupare almeno 1 volta una casella nera?
9) In quanti modi, se ho due tasche e un taschino, posso conservare 10 monete uguali?
10) Avendo 5 caldarroste, in quanti modi diversi le potrei distribuire a 5 bambini?
11) In quanti modi diversi potrei ritirare le mie 10 gomme identiche in 4 cassetti, se desidero che comunque in ogni cassetto vada a finire almeno una gomma?

RISPOSTE

1) $2+4+6+8+...+2n=2(1+2+3+4+...+n)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)=n^2+n$

2) $1+3+5+7+...+(2n-1)=(2+4+6+8+...+2n)-n=n^2\cancel{+n}\cancel{-n}=n^2$ (interessante!)

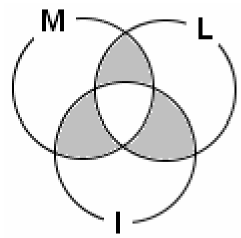
3a)



3b) $2(1+2+3+...+(n-1))+n=\cancel{2}\cdot\frac{(n-1)(n\cancel{-1}\cancel{+1})}{\cancel{2}}+n=n^2\cancel{-n}\cancel{+n}=n^2$

4) $2^8=256$: tante quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di 8 elementi.

5) $n(C\cup P)=n(C)+n(P)-n(C\cap P)$ da cui
$n(C\cap P)=n(C)+n(P)-n(C\cup P)=10+8-12=6$



6a) $\underbrace{n(M\cup L\cup I)}_{24}=\underbrace{n(M)}_{14}+\underbrace{n(L)}_{16}+\underbrace{n(I)}_{18}-n(M\cap L)-n(M\cap I)-n(L\cap I)+\underbrace{n(M\cap L\cap I)}_{10}$ da cui
$n(M\cap L)+n(M\cap I)+n(L\cap I)=\underbrace{n(M)}_{14}+\underbrace{n(L)}_{16}+\underbrace{n(I)}_{18}+\underbrace{n(M\cap L\cap I)}_{10}-\underbrace{n(M\cup L\cup I)}_{24}=34$
ma facendo la somma $n(M\cap L)+n(M\cap I)+n(L\cap I)$
si ottiene il numero di elementi dell'insieme ombreggiato in figura, che è quello a cui si riferisce il quesito, AUMENTATO di $3\cdot n(M\cap L\cap I)$. La risposta al quesito è perciò $34-3\cdot 10=4$.

6b) $n(almeno\ 2)=n(esattamente\ 2)+n(esattamente\ 3)=4+10=14$

7) $n(almeno\ uno\ "0")=n(totale)-n(nessuno\ "0")$.
Ora, i numeri di 1 cifra senza "zeri" sono 9, quelli di 2 cifre senza "zeri" sono $9\cdot 9=81$, quelli di 3 cifre senza "zeri" sono $9\cdot 9\cdot 9=729$. In totale, i numeri da 1 a 1000 senza la cifra "0" sono $9+81+729=819$.
Allora avremo $n(almeno\ uno\ "0")=1000-n(nessuno\ "0")=1000-819=181$.

8) $n(almeno\ una\ "nera")=n(totale)-n(tutte\ "bianche")=\binom{16}{4}-\binom{8}{4}=\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}-\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=1820-70=1750$

9) $C'_{3,10}=\binom{3+10-1}{10}=\binom{12}{10}=\binom{12}{2}=\frac{12\cdot 11}{2\cdot 1}=66$

10) $C'_{5,5}=\binom{5+5-1}{5}=\binom{9}{5}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=126$

11) $C'_{4,6}=\binom{4+6-1}{6}=\binom{9}{6}=\binom{9}{3}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=84$ perché comincio a mettere 4 gomme ognuna in un cassetto poi mi chiedo in quanti modi sia possibile ripartire nei 4 cassetti le 6 gomme restanti.