5 - ESERCIZI CONCLUSIVI (risposte alle pagg. 37 … 41)

1) a) Cosa si intende per "disposizioni di n oggetti, presi a k a k" ?
b) Scrivi quanto vale il numero $D_{n,k}$ di tali disposizioni e spiega brevemente perché ha questo valore.

2) a) Cosa si intende per "combinazioni di n oggetti, presi a k a k" ?
b) Dimostra che il numero $C_{n,k}$ di tali combinazioni è dato da $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

3) Quante sono le permutazioni cicliche di n oggetti? Perché?

4) Scrivi la formula del "binomio di Newton" $(a+b)^n = \ldots$ e utilizzala per calcolare $(x^2-2)^5$

5) a) Quanti sottoinsiemi ha un insieme di 8 elementi?
b) Può un insieme avere esattamente 4000 sottoinsiemi?
c) Se un insieme ha 32768 sottoinsiemi, quanti elementi ha?

6) Quanto vale la somma $1001 + 1002 + 1003 + \ldots + 1999 + 2000$?

7) Per il mio compleanno mi hanno regalato 5 libri.
a) In quanti ordini diversi potrei decidere di leggerli?
b) Posso portarli in ferie tutti, o nessuno, o solo in parte.
In quanti modi diversi potrei effettuare la scelta dei libri da portar via?
c) Un amico mi ha chiesto di prestargliene 2. In quanti modi potrei scegliere quali dargli?

8) Quante possibilità si hanno, se si vuole costruire una password formata da:
- una sequenza di 5 lettere minuscole (possibilità di ripetizione di una stessa lettera; sono utilizzabili le 26 lettere dell'alfabeto anglosassone) …
- … seguita da una sequenza di 3 cifre, non necessariamente distinte?

Se invece la password fosse di 8 caratteri, ciascuno dei quali possa essere o una cifra da 0 a 9, oppure una lettera, o minuscola o maiuscola, con possibilità di ripetere una o più volte uno stesso simbolo, a quanto salirebbe il numero delle password teoricamente possibili?

9) In un'assemblea di 100 persone, si devono scegliere un presidente e un segretario.
Stabilisci in quanti modi è possibile effettuare la scelta:
a) se gli incarichi sono compatibili b) se sono incompatibili

10) In un sacchetto ci sono 9 palline, 3 delle quali recano scritto sulla superficie il numero "1", altre 3 il numero "2", le rimanenti 3 il numero "3".
Si estrae una pallina e si segna la cifra corrispondente.
Senza reimbussolare la pallina estratta,
se ne estrae un'altra, si segna la cifra corrispondente a destra della precedente …
e si prosegue in questo modo fino ad esaurire tutte le palline.
Si costruisce così un numero a 9 cifre.
Quanti numeri distinti è possibile ottenere in questo modo?

11) Quante diagonali ha un poligono di 13 lati? E, in generale, un poligono di n lati?

12) 20 persone si suddividono in 5 gruppi da 4 persone; ogni gruppo fa il girotondo.
Ciò è molto bello, ma tu dimmi: in quanti modi diversi è possibile organizzare questo insieme di girotondi?

13) Quanti sono i numeri, da 1 a 1000000 estremi inclusi, che sono multipli
a) di 8 o di 9? b) di 8 o di 10? c) di 8 o di 56?

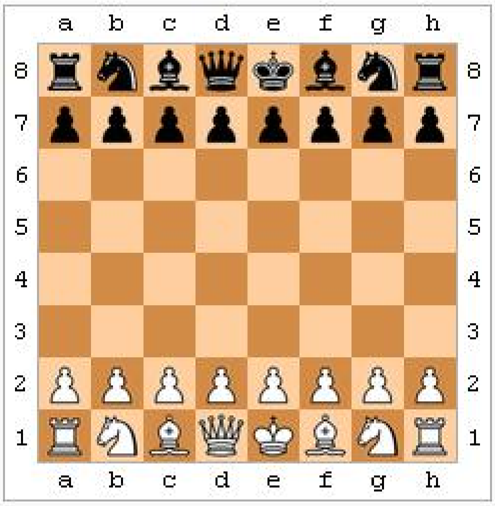
14) Quanti sono i quadrati perfetti nell'intervallo da 100000 fino a 500000?

15) Ciascuno dei 200 allievi di un *campus* universitario è iscritto a 1 o più fra i seguenti gruppi sportivi: Atletica, Basket, Pallavolo.
a) Sapendo che gli iscritti ad Atletica sono in totale 100, a Basket 80, e a Pallavolo 60, non è possibile determinare con certezza il numero di coloro che sono iscritti a tutti e 3 i gruppi simultaneamente! Perché?
b) Se si sapesse inoltre che $n(A \cap B) = n(A \cap P) = n(B \cap P) = 15$,
a questo punto si riuscirebbe a stabilire $n(A \cap B \cap P)$?

16) Quanti, fra i numeri naturali con non più di 3 cifre, hanno
a) tutte le cifre dispari? b) tutte le cifre pari? c) almeno una cifra pari?

17) Quanti, fra i numeri naturali con minimo 2 e massimo 3 cifre, hanno
   a) tutte le cifre uguali fra loro?
   b) tutte le cifre diverse fra loro?
   c) non tutte le cifre uguali fra loro?

18) Per il gioco degli scacchi si utilizza una scacchiera con 64 caselle. Ora, la “torre” si può muovere soltanto orizzontalmente o verticalmente. In quanti modi è possibile collocare una coppia di torri, una bianca e una nera, su di una scacchiera vuota, in modo che nessuna “minacci” l’altra?



19) Un pallone da calcio è formato da un certo numero di pezze di cuoio, di cui 12 di forma pentagonale e le rimanenti di forma esagonale. Sapresti determinare il numero di queste ultime?

Indicazione:
il numero di vertici può essere contato in due modi differenti, che però dovranno portare al medesimo risultato.
In effetti tale numero totale di vertici:
- *da una parte, coincide col numero totale dei vertici di pentagono;*
- *dall’altra, ha a che fare anche col numero degli esagoni,*

perché a ben guardare ogni vertice è comune a due esagoni.
Detto dunque x il numero incognito degli esagoni, vale l’uguaglianza …
da cui si può ricavare x.

20) Devo fare i compiti di ben 4 materie diverse, e non so in che ordine affrontarle. Quante possibilità avrei?

21) Conta il numero di anagrammi della parola “pappagalla”

22) Anna vuol mettere una serie di anelli alla sua mano destra, uno per dito.
Stabilisci in quanti modi diversi può indossare gli anelli Anna
   a) nell’ipotesi che abbia 3 anelli fra loro differenti
   b) nell’ipotesi che abbia 3 anelli, tutti fra loro identici
   c) nell’ipotesi che abbia 5 anelli, tutti differenti fra loro
   d) nell’ipotesi che abbia 5 anelli, 3 identici fra loro, e 2 identici fra loro ma diversi dai precedenti.

23) I numeri in base due possono avere come cifre soltanto 0 oppure 1.
Quanti sono gli interi, in base due, aventi al massimo sei cifre?
(Notare che, se il numero ha più di una cifra, la cifra iniziale non può essere 0).

24) Una comitiva di famigliole fa una bella escursione in montagna.
Su di un sentiero nel quale è possibile procedere solo in fila indiana,
in quanti ordini differenti è possibile disporsi se i mariti sono 5, altrettante le mogli, i bambini 8,
e si desidera che il gruppo degli uomini sia in testa, i bambini in mezzo e in fondo le donne a sorvegliare?

25) Ho comprato un vassoietto di paste: 3 bignole, 4 meringhe, 5 sfoglie.
Adesso me le sbafo, una dopo l’altra. Quante possibilità ho per l’ordine dei sapori?
(Qui si suppone che le paste di uno stesso tipo siano indistinguibili fra loro).

26) Serena vuole pitturarsi le unghie dei piedi. Ha a disposizione 2 colori soltanto: rosa e azzurro.
   a) Ogni unghia andrà colorata; si potrà utilizzare un solo colore, o entrambi.
   Stabilire in quanti modi diversi potrà avvenire la colorazione.
   b) E se Serena volesse colorare esattamente 5 unghie in rosa e le rimanenti in azzurro,
   quante possibilità avrebbe?

27) a) In quanti modi posso disporre 15 libri su di uno scaffale, se 5 sono di Matematica, 5 di Fisica e 5 di Scienze e io desidero che i libri di una stessa materia siano vicini fra loro?

b) E se invece avessi la situazione seguente:
5 libri identici fra loro, altri 5 identici fra loro ma diversi dai precedenti, e ancora altri 5 identici fra loro ma diversi da tutti gli altri, potendo disporre i libri in un ordine qualsiasi, senza vincolo alcuno, quante configurazioni fra loro distinguibili potrei ottenere?

28) Stabilisci in quanti modi si possono disporre intorno ad un tavolo circolare 8 ragazzi e 2 insegnanti, se
a) i due insegnanti vogliono sedersi uno accanto all'altro
b) i due insegnanti non vogliono sedersi uno accanto all'altro

28') Stabilisci in quanti modi si possono disporre intorno ad un tavolo circolare 8 ragazzi e 4 insegnanti, se
a) i quattro insegnanti vogliono sedersi uno accanto all'altro
b) nessun insegnante vuole sedersi a fianco di un altro insegnante

29) 16 alunni in gita scolastica saliranno su di un'alta cupola alla quale si accede esclusivamente tramite un ascensore con 4 posti. In quanti modi sarebbe teoricamente possibile suddividere la classe nei 4 gruppi da 4 persone, tenendo conto anche dell'ordine in cui l'ascensore sarà utilizzato dai diversi gruppi?

30) Quanti sono gli interi di 4 cifre, le cui cifre da sinistra a destra decrescono (es. 8540)?

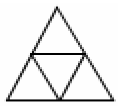
31) Quanti sono i numeri, da 1 a 1000, che non sono divisibili né per 12 né per 18?

32) Un numero di targa automobilistica italiano è formato da una coppia di lettere, seguita da una terna di cifre, a sua volta ancora seguita da una coppia di lettere.

Si è deciso che possano essere utilizzate le lettere dell'alfabeto inglese, ma non tutte: sono vietate la I, la O, la Q e la U per la facilità di confusione di questi simboli con altri. Restano dunque a disposizione 22 lettere, mentre le cifre dei tre numeri possono andare ciascuna da 0 a 9. Ciò premesso, quante diverse targhe sono teoricamente possibili con queste regole?

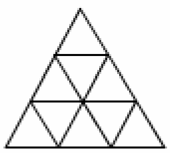
33) Dimostra che a) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ b) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + ... + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$
(*IMPEGNATIVO. Utilizza l'es. precedente, e una identità nota*)

34) Quanti triangoli vedi nella figura qui a fianco?



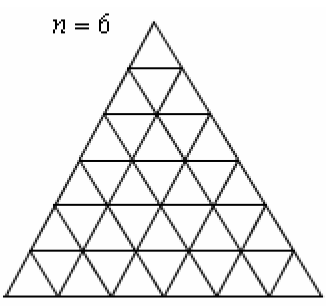
Se la tua risposta coincide con la soluzione dell'equazione $(x-4)^2 + 9 = x(x-3)$, hai detto bene.

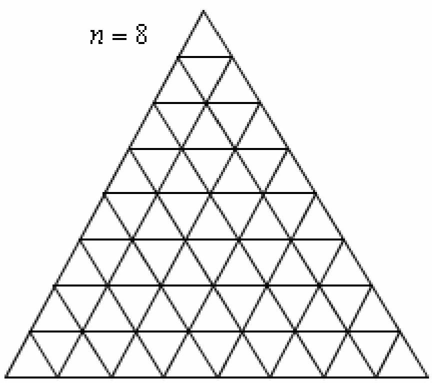
… E in quest'altra?



Beh, ci sarà voluto un attimo in più, ma suppongo che tu abbia risposto ancora correttamente:
Il numero richiesto è uguale alla soluzione dell'equazione $x/2 - 1 = x/4 + (3/2)^2$.

Ora, aumentando il numero delle suddivisioni dei lati del triangolo equilatero grande, stabilire quanti triangoli si vedono nella figura è sempre più laborioso.
Ci riusciresti, nei casi seguenti?





Prima di andare a vedere le risposte a pagina 40, datti da fare per il tempo necessario!

Da Stefano Barbero e Nadir Murru, dell'Università di Torino:

35) La cassaforte di Zio Paperone ha una combinazione costituita da 10 cifre comprese tra 0 e 9.
Quante possibili combinazioni ha a disposizione Zio Paperone contro i Bassotti?
Quante diventerebbero le combinazioni possibili, se decidesse di evitare cifre consecutive uguali?

36) Qui, Quo e Qua decidono di allenare una squadra di calcio con i compagni di scuola.
Se possono scegliere tra 26 compagni fra cui ci sono 4 portieri, 5 difensori, 8 centrocampisti e 9 attaccanti, quante formazioni possibili con 1 portiere, 3 difensori, 4 centrocampisti e 3 attaccanti possono formare?
Se Qui, Quo e Qua volessero giocare in ogni formazione, quante sarebbero le formazioni possibili sapendo che Qui è un difensore, Quo un centrocampista e Qua un attaccante?

37) Amelia, la fattucchiera che ammalia, è inferocita con il suo corvo Gennarino, perché ha strappato inavvertitamente la pagina con la parola magica per conquistare il decino di Zio Paperone.
Purtroppo sono rimaste solo lettere sparpagliate e illeggibili. Amelia si ricorda che la parola magica aveva 10 lettere tutte fra loro distinte del nostro alfabeto di 21 simboli, iniziava con una vocale e a ogni vocale seguiva una sola consonante. Quante possibili parole magiche può ricostruire Amelia?

38) Pippo, Topolino e Minnie vanno al cinema e decidono di sedersi in una fila vuota da 8 posti.
In quanti modi distinti possono sedersi i tre amici?
Se Minnie e Topolino vogliono stare vicini quante diventano le disposizioni possibili?

39) Pietro Gambadilegno vuole indicare con una crocetta sulla carta di Topolinia i suoi prossimi 5 obiettivi.
Sapendo che a Topolinia ci sono 6 banche e 4 gioiellerie, quante saranno le possibili scelte?
Se Pietro, volendo fare un regalo alla sua Trudy, decide di includere certamente almeno 2 gioiellerie, quante diventano le scelte possibili in questo caso?

40) Pico De Paperis deve ricostruire un geroglifico della tribù dei Sainent ormai eroso dal tempo.
Da un antico e polveroso volume deduce che questo geroglifico è costituito da tre simboli non necessariamente distinti e che i geroglifici dei Sainent costituiti da tre simboli possono dare luogo ad almeno 340 significati diversi.
Qual è il numero minimo di simboli usati dai Sainent?
Se i simboli dei Sainent fossero solo 5 quanto dovrebbe essere la lunghezza minima di un geroglifico per codificare con simboli (anche ripetuti) almeno 3000 parole distinte di questo arguto popolo?

41) In quanti modi diversi si potevano sedere Artù e i 12 cavalieri della tavola rotonda?

42) In una gelateria che ha 10 qualità di gelato, Pierino vuole comprarsi un cono con 3 palline.
a) Quante diverse combinazioni può scegliere, se vuole che i gusti delle tre palline siano tutti diversi?
b) E se vuole tre gusti diversi, fra i quali almeno uno tra cioccolato e pistacchio?
c) Infine, in quanti modi Pierino potrebbe farsi servire un cono con tre palline di gelato, di gusti non necessariamente diversi?

43) In un prato fiorito ci sono 10 fiori. In quanti modi diversi 5 api si possono disporre sui fiori?

44) In una squadra di calcio in campo (escluso il portiere)
ci sono 10 calciatori e 6 sono in panchina (escluso il portiere di riserva).
L'allenatore ha clamorosamente sbagliato formazione iniziale
e a fine primo tempo vuole effettuare delle sostituzioni (senza coinvolgere i portieri).
Sapendo che ha a disposizione 3 cambi e li vuole effettuare tutti, quante possibili scelte diverse può fare?

45) In un Liceo ogni classe ha una squadra di calcetto, e incontra ogni altra classe una sola volta.
Se le partite sono in totale 105, quante sono le classi?

46) a) Una classe di Liceo ha 27 alunni, che non sono tutte femmine; tuttavia, presi due alunni qualsiasi, fra essi c'è certamente almeno una femmina. Si domanda quanti sono i maschi in quella classe.
b) Una classe di Liceo ha 27 alunni, che non sono tutte femmine; tuttavia, presi tre alunni qualsiasi, fra essi c'è certamente almeno una femmina. Si domanda quanti sono i maschi in quella classe.

47) Con quanti zeri termina il risultato
a) della somma $1+2+3+...+99$? b) della moltiplicazione $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 99$?

48) Nell'asilo di un paesino di montagna ci sono 8 bambini, e fra questi c'è una coppia di gemelli.
Ora, le maestre intendono far giocare i bambini in due squadrette di 4, ma non vogliono che i gemelli facciano parte della stessa squadra, per favorirne la socializzazione con gli altri piccoli.
In quanti modi diversi è possibile teoricamente suddividere i bambini in squadre?

49) Un gruppo di pensionati, 5 uomini e 5 donne, frequenta al Circolo Anziani un corso di ballo e uno di Inglese.
a) Per il corso di ballo, in quanti modi si possono teoricamente formare le coppie?

Per il corso di Inglese, in aula ci sono 5 banchi doppi, e l'insegnante chiede che in ognuno di essi si sistemino un uomo e una donna, con la donna a destra dell'uomo.
b) In quanti modi diversi è possibile che i banchi vengano occupati?
c) E se il vincolo "donna a destra dell'uomo" non ci fosse?

50) Se per i 6 alunni insufficienti in Italiano la professoressa organizza un'ultima verifica di recupero, che consiste in un tema di letteratura per il quale sono proposte quattro tracce alternative, stabilisci in quanti modi diversi possono, teoricamente, i ragazzi scegliere l'argomento del tema.

51) a) Stabilisci quanti lati ha un poligono che possiede 170 diagonali.
b) Alla cerimonia di inizio di un torneo di scherma, i partecipanti si stringono la mano in tutti i modi possibili. Tuttavia, poiché due fra gli schermidori non sono ancora arrivati per un ritardo dei treni, le strette di mano sono 21 in meno di quelle che avrebbero dovuto teoricamente essere. Quanti atleti sono iscritti alla competizione?

PROBLEMI ASSEGNATI ALL'ESAME DI STATO DEL LICEO SCIENTIFICO

52) Dimostrare che si ha (*formula di Stifel*)

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n>k>0$ (2001, *Tradizionale*)

53) Si consideri una data estrazione in una determinata ruota del Lotto.
Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90 (2003, *Tradizionale*)

54) Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre? (2003, *PNI*)

55) Considerati gli insiemi $A=\{1,2,3,4\}$ e $B=\{a,b,c\}$, quante sono le applicazioni (=le funzioni) di A in B? (2004, *Tradizionale e PNI*)

NOTA: ricordiamo che una "funzione" di A in B è una corrispondenza tale che ad ogni elemento di A corrisponda uno e un solo elemento di B

56) Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla sessantaquattresima casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore. (2006, *Tradizionale e PNI*)

57) Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n\in\mathbb{N}$ (2006, *Tradizionale e PNI*)

58) Si risolva l'equazione $4\binom{n}{4}=15\binom{n-2}{3}$ (2007, *Tradizionale*)

59) Se $\binom{n}{1},\binom{n}{2},\binom{n}{3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n? (2008, *Tradizionale*)

(NOTA:
le progressioni aritmetiche sono quelle successioni nelle quali la differenza fra due termini consecutivi è costante: ad esempio, 1 4 7 10 13 16 19 … è una progressione aritmetica perché fra un termine e il successivo la differenza è sempre 3).

60) Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n>k$ (2009, *Tradizionale e anche PNI*)

61) In una scatola di legno sono contenute alcune matite colorate. Per ogni colore vi è lo stesso numero di matite. Per avere la certezza di prendere una matita blu, naturalmente senza poter sceglierla, bisogna estrarne 25, e per esser certi di prendere tutte le matite di uno stesso colore bisogna invece estrarne 29. Quante matite ci sono nella scatola?
(dalla divertente, pulita e istruttiva *Settimana Enigmistica*)

Cercando su Internet è possibile trovare, evidentemente, tanti altri bei problemi! ⇨

RISPOSTE

1a) Sono le k-uple ordinate, costruibili utilizzando senza ripetizione k fra quegli n oggetti.

1b) $D_{n,k} = n(n-1)...(n-k+1)$

perché, nel costruire una k-upla partendo da un insieme di n oggetti dati,
per la scelta del primo oggetto ho n possibilità,
per ciascuna delle quali mi si apre un ventaglio di $(n-1)$ possibilità per la scelta del secondo oggetto, ecc.
Devo avere in totale k fattori, quindi mi fermo a $(n-k+1)$;
se mi fermassi a $(n-k)$ sbaglierei, perché ci sarebbe un fattore in più.

2a) Sono le k-uple non ordinate, costruibili utilizzando senza ripetizione k fra quegli n oggetti.

2b) La dimostrazione è in due fasi.

Prima di tutto, avremo $C_{n,k} = \dfrac{D_{n,k}}{k!}$ perché (Terzo principio del Calcolo Combinatorio)

se ho contato il numero $D_{n,k}$ delle k-uple ordinate,

allora il numero $C_{n,k}$ delle k-uple non ordinate si otterrà semplicemente dividendo per $k!$

A questo punto, moltiplicando sia "sopra" che "sotto" per $(n-k)!$, avremo la tesi. Insomma:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot...\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot...\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)(n-k-1)\cdot...\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3) $n!/n=(n-1)!$ Si parte infatti dal numero $n!$ di modi in cui è possibile mettere in ordine quegli oggetti, poi si pensa che ognuna di queste n-uple fa parte di un gruppo di n n-uple fra loro equivalenti per rotazione

4) $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

$$\left(x^2-2\right)^5 = \binom{5}{0}\left(x^2\right)^5 + \binom{5}{1}\left(x^2\right)^4(-2) + \binom{5}{2}\left(x^2\right)^3(-2)^2 + \binom{5}{3}\left(x^2\right)^2(-2)^3 + \binom{5}{4}\cdot x^2\cdot(-2)^4 + \binom{5}{5}(-2)^5 =$$
$$= x^{10} + 5x^8\cdot(-2) + 10x^6\cdot 4 + 10x^4\cdot(-8) + 5x^2\cdot 16 - 32 = x^{10} - 10x^8 + 40x^6 - 80x^4 + 80x^2 - 32$$

5) a) $2^8 = 256$
b) No, perché il numero dei sottoinsiemi di un insieme di n elementi è 2^n, ma 4000 non è una potenza di 2
c) 15, perché $32768 = 2^{15}$

6) $1001 + 1002 + 1003 + ... + 1999 + 2000 = (1 + 2 + 3 + ... + 1999 + 2000) - (1 + 2 + 3 + ... + 999 + 1000) =$

$$\underset{\text{di GAUSS}}{\overset{\text{Formula}}{=}} \frac{2000\cdot 2001}{2} - \frac{1000\cdot 1001}{2} = 1000\cdot 2001 - 500\cdot 1001 = 500\cdot(4002-1001) = 500\cdot 3001 = 1500500$$

oppure: $1001 + 1002 + 1003 + ... + 1999 + 2000 = \underbrace{(1000 + 1000 + ... + 1000)}_{\text{1000 addendi}} + (1 + 2 + ... + 999 + 1000) =$

$$= 1000\cdot 1000 + \frac{1000\cdot 1001}{2} = 1000000 + 500\cdot 1001 = 1000000 + 500500 = 1500500$$

7) a) 5! b) In tanti modi quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di 5 elementi, ossia $2^5 = 32$ c) $\binom{5}{2} = 10$

8) $26^5\cdot 10^3$; 62^8

9) a) $100\cdot 100 = 10000$
b) $100\cdot 99 = 9900$
OSSERVAZIONE: non bisogna dividere per 2, perché importa l'ordine, quindi le coppie sono ordinate: la scelta Tizio=Presidente, Caio=Segretario non equivale alla scelta Caio=Presidente, Tizio=Segretario

10) $P_9^{(3,3,3)} = \dfrac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 3!} = 1680$

oppure $\binom{9}{3}\binom{6}{3}$ (sui 9 posti a disposizione, scelgo quei tre in cui suppongo compaiano gli "1"; poi fra i 6 posti restanti scelgo i tre posti per i "2"; i posti che restano verranno occupati dai "3")

11) Tante quanti sono i modi di collegare ciascuno dei 13 vertici coi 10 vertici ottenuti ignorando quello da cui si parte e anche il precedente e il successivo … però a ben guardare in questo modo una stessa diagonale verrebbe ri-disegnata 2 volte, quindi il numero così ottenuto andrà poi diviso per 2. La risposta esatta è perciò $(13\cdot 10)/2=65$ diagonali.

Ragionamento alternativo: le diagonali sono tante quante le coppie non ordinate di vertici distinti, salvo poi sottrarre dal computo i 13 lati. Quindi: $(13\cdot 12)/2-13=65$

In generale, un poligono di *n* lati possiede $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonali.

12) Difficilotto.

Innanzitutto, immaginiamo di scegliere le 4 persone che costituiranno, diciamo così, il Primo gruppo (poi, tuttavia, l'ordine dei gruppi non conterà). Per questa scelta, abbiamo $\binom{20}{4}$ possibilità.

A questo punto, per costituire il secondo gruppo, abbiamo $\binom{16}{4}$ possibilità, e così via.

Perciò possiamo suddividere le 20 persone nei 5 gruppi di 4 persone ciascuno in $\dfrac{\binom{20}{4}\cdot\binom{16}{4}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}}{5!}$ modi, dove la divisione per 5! si deve al fatto che abbiamo pensato, per comodità psicologica, di costituire un Primo Gruppo, poi un Secondo gruppo, ecc., ma poi i gruppi così formati non hanno "dignità" differenziate e quindi non conta l'ordine.

Ma adesso i componenti di ogni singolo gruppo si mettono a fare il girotondo!
Quindi i componenti di ciascun gruppo si possono disporre, dandosi la mano e mettendosi in cerchio, in 3! = 6 modi, tanti quante sono le permutazioni cicliche di 4 oggetti.

Perciò il numero di "configurazioni" sarà uguale al numeraccio determinato precedentemente (che era poi il numero dei modi in cui le 20 persone potevano ripartirsi in 5 gruppi da 4 persone), MOLTIPLICATO per 3! per tante volte quanti sono i gruppi.

Si ottiene così il numero

$$\frac{\binom{20}{4}\cdot\binom{16}{4}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}}{5!}\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!$$

che è la risposta esatta al quesito.

13) a) Quanti sono i multipli di 8 minori o uguali di 1000000?
$1000000:8=125000;\ \ 8\cdot 1=8,\ \ 8\cdot 2=16,\ \ ...\ ,\ \ 8\cdot 125000=1000000$ quindi sono 125000.
Quanti sono i multipli di 9 minori o uguali di 1000000?
$1000000:9=111111,...;\ \ 9\cdot 1=9,\ \ 9\cdot 2=18,\ \ ...\ ,\ \ 9\cdot 111111=999999$ quindi sono 111111
Quanti sono i numeri interi ≤ 1000000 che sono multipli simultaneamente sia di 8 che di 9?
Beh, si tratta dei multipli di 72!
$1000000:72=13888,...;\ \ 72\cdot 1=72,\ \ 72\cdot 2=144,\ \ ...\ ,\ \ 72\cdot 13888=999936$ quindi sono 13888
Ora, $n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=125000+111111-13888=222223$.

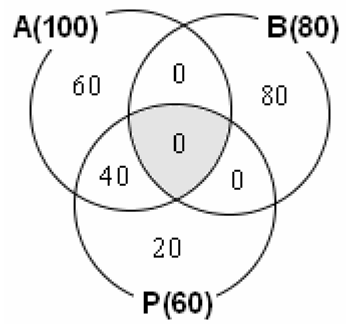
b) n(multipli di 8 minori o uguali di 1000000) $=125000$
n(multipli di 10 minori o uguali di 1000000) $=100000$
n(multipli sia di 8 che di 10 che sono ≤ 1000000) $=$
$= n$(multipli di 40 minori o uguali di 1000000) $= 25000$
n(multipli di 8 o di 10 minori o uguali di 1000000) $= 125000+100000-25000=200000$

c) Un intero è multiplo di 8 o in alternativa di 56 se e solo se è multiplo di 56.
E poiché 1000000:56 = 17857, … la risposta al quesito è 17857.

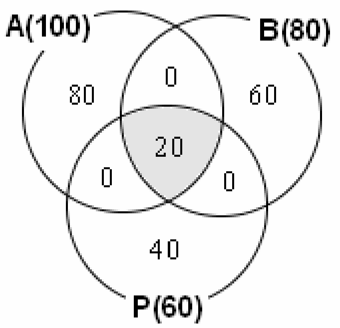
14) $\sqrt{100000}=316,...;\quad 316^2<100000,\ \ 317^2>100000$
$\sqrt{500000}=707,...;\quad 707^2<500000,\ \ 708^2>500000$.
La risposta è : $707-316=391$.

15) a) Perché le situazioni possono essere ben differenti!

Ad esempio si potrebbe avere



… oppure:



ecc. ecc. ecc.

b) Sì:

$n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{P}) = n(\mathrm{A}) + n(\mathrm{B}) + n(\mathrm{P}) - n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) - n(\mathrm{A}\cap\mathrm{P}) - n(\mathrm{B}\cap\mathrm{P}) + n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{P})$

$200 = 100 + 80 + 60 - 15 - 15 - 15 + n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{P})$

$200 = 195 + n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{P})$

$n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{P}) = 5$

16) a) $5 + 5\cdot 5 + 5\cdot 5\cdot 5 = 5 + 25 + 125 = 155$

b) $5 + 4\cdot 5 + 4\cdot 5\cdot 5 = 5 + 20 + 100 = 125$

c) $n(\textit{almeno una pari}) = \textit{numero totale} - n(\textit{tutte dispari}) = 1000 - 155 = 845$

(NOTA: in totale sono 1000 (0, 1, 2, … , 999)

17) a) $9 + 9 = 18$ b) $9\cdot 9 + 9\cdot 9\cdot 8 = 81 + 648 = 729$ c) $990 - 18 = 972$ 18) $64\cdot(64-15) = 3136$

19) Detto x il numero degli esagoni, $12\cdot 5 = \frac{x\cdot 6}{2}$ da cui $x = 20$ 20) $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

21) $P_{10}^{(4,3,2,1)} = \frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!}$ 22) a) $5\cdot 4\cdot 3 = 60$ b) $\binom{5}{3} = 10$ c) $5! = 120$ d) $P_5^{(3,2)} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$ opp. $\binom{5}{3} = 10$

23) $2 + 2 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 64$

oppure: possono andare da $(0)_2$ (zero) a $(111111)_2$ (sessantatre) quindi sono in totale 64.

24) $5!\cdot 8!\cdot 5!$ 25) $P_{12}^{(3,4,5)} = \frac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!}$

26) a) Basta scegliere quali dita colorare in rosa! Le altre, per esclusione, verranno colorate in azzurro. Ora, questa scelta può essere effettuata in tanti modi, quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di 10 elementi, ossia in $2^{10} = 1024$ modi. Osserviamo che l'insieme vuoto corrisponde alla colorazione in azzurro di tutte le dita, l'insieme di 10 elementi corrisponde alla "tinta unica" rosa.

b) $\binom{10}{5} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 252$

27) a) $5!\cdot 5!\cdot 5!\cdot 3!$ b) $P_{15}^{(5,5,5)} = \frac{15!}{5!\cdot 5!\cdot 5!}$

28) a) Si accomodano gli 8 ragazzi, e lo possono fare in $\frac{8!}{8} = 7! = 5040$ modi.

A questo punto si accomodano i due insegnanti, e lo possono fare sedendosi in uno qualsiasi dei 8 spazi fra gli 8 ragazzi seduti. Poiché però il professore A può decidere se sedersi a sinistra oppure a destra di B, le possibilità di scelta finiscono per essere 16 e non 8.

In definitiva, $5040\cdot 16 = 80640$ modi.

b) Se invece, dopo che si sono sistemati i ragazzi (e lo possono fare, come abbiamo visto, in 5040 modi) i due insegnanti NON vogliono sedere uno a fianco dell'altro, A sceglierà uno degli 8 possibili spazi e successivamente B uno dei 7 spazi rimanenti, per un totale di $8\cdot 7 = 56$ possibilità di scelta per gli insegnanti e $5040\cdot 56 = 282240$ possibili tavolate.

OSSERVIAMO che è $282240 + 80640 = 362880 = 9!$

che è poi il numero possibile di tavolate, senza alcun vincolo nella disposizione.

28') a) Si accomodano gli 8 ragazzi, e lo possono fare in $\frac{8!}{8} = 7! = 5040$ modi.

A questo punto si accomodano i 4 insegnanti, e lo possono fare sedendosi in uno qualsiasi degli 8 spazi fra gli 8 ragazzi seduti, e disponendosi in uno fra i $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ordini possibili.
In definitiva, $7! \cdot 8 \cdot 4!$ modi.

b) Si accomodano gli 8 ragazzi, e lo possono fare in $\frac{8!}{8} = 7! = 5040$ modi.

A questo punto si accomodano i 4 insegnanti.
Ci sono 8 spazi a disposizione (ciascuno spazio è fra due ragazzi consecutivi) e il primo insegnante può scegliere uno qualsiasi di questi 8, il secondo uno qualsiasi degli altri 7, ecc. per un totale di $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ possibilità.
In definitiva, la risposta al quesito è: $7! \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ modi.

OSSERVAZIONE
Qui, sommando $7! \cdot 8 \cdot 4!$ con $7! \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$, NON si otterrebbe $11!$ ossia il numero di tutte le possibili tavolate senza alcun vincolo. E certo, perché le due situazioni

- ♪ "i 4 insegnanti tutti vicini"
- ♫ "nessuno fra i 4 insegnanti vicino ad un altro insegnante"

NON esauriscono tutti i casi possibili.

29) $\binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}$ (si scelgono i 4 del gruppo che salirà per primo, poi ...)

30) Sono tanti quanti sono i modi di scegliere 4 elementi dall'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (per poi disporli in ordine decrescente). La risposta è dunque $\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$.

31) I numeri, da 1 a 1000, divisibili o per 12 o per 18, sono $83 + 55 - 27 = 111$.
Perciò quelli che non sono divisibili né per 12 né per 18 saranno $1000 - 111 = 889$.

32) 234.256.000

33a) $$n\binom{n-1}{k-1} = n \cdot \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot((n-1)-(k-1)+1)}{(k-1)!} = n \cdot \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot(n\cancel{-1}-k\cancel{+1}+1)}{(k-1)!} =$$
$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot(n-k+1)}{(k-1)!} = k \cdot \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot(n-k+1)}{k \cdot (k-1)!} = k \cdot \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot(n-k+1)}{k!} = k\binom{n}{k}$$

33b) Si utilizzano le identità $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ e $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ tramite la catena
$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n\binom{n-1}{0} + n\binom{n-1}{1} + n\binom{n-1}{2} + \ldots + n\binom{n-1}{n-1} =$$
$$= n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{n-1}{n-1}\right] = n \cdot 2^{n-1}$$

34) $n = 6 \rightarrow 78$ *triangoli* $\qquad n = 8 \rightarrow 170$ *triangoli*
Ti invito a completare la tabella sottostante, tratta dal sito www.threes.com.
Essa potrebbe servire ad avviare una riflessione molto impegnativa, ma interessante: in che relazione sta il numero di triangoli equilateri che si ottengono per un certo valore di *n*, col numero dei triangoli che si avevano per il valore precedente $n-1$?
Ancora: esisterà una formula che a partire da *n* possa permettere di calcolare il numero di triangoli?
SEI AVVISATO ☺: l'argomento è parecchio avvincente, ma non è affatto semplice.
Dopo averci meditato a sufficienza per conto tuo, potresti trovare approfondimenti sul web se ad esempio imposti una ricerca con la chiave "How many triangles?"

b = Number of triangles in the base
l = Number of little triangles
f = Next largest triangle (contains 4)
n = Next largest triangle (contains 9)
s = Next largest triangle (contains 16)
T = Total number of triangles

b	l	f	n	s	T
1	1	0	0	0	1
2	4	1	0	0	5
3	9	3	1	0	13
4	16	7	3	1	27
5	25	?	?	?	48
6	36	?	?	?	78
7	49	?	?	?	118
8	64	?	?	?	170

35) 10^{10}; $10\cdot 9^9$ 36) $4\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{9}{3}$; $4\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{9}{2}$ 37) $5!\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12$ 38) $8\cdot 7\cdot 6=336;\ 7\cdot 2\cdot 6=84$

39) $\binom{10}{5}$; $\binom{10}{5}-\binom{6}{5}-\binom{6}{4}\cdot\binom{4}{1}$ 40) $n^3\geq 340$ da cui $n=7$; $5^k\geq 3000$ da cui $k=5$ 41) $\frac{13!}{13}=12!$

42) a) $\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$ b) $\binom{10}{3}-\binom{8}{3}=120-\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=120-56=64$ c) 220

43) $\binom{10}{5}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=252$ Evidentemente, contiamo il numero di modi in cui possono essere scelti 5 fiori su quei 10; non ci interessa *quale particolare ape* va su di un determinato fiore.

44) $\binom{10}{3}\cdot\binom{6}{3}$ 45) 15 46) a) 1 b) 1 o 2 47) a) 1 b) 22

48) $\binom{6}{3}=20$ oppure $\frac{\binom{8}{4}-\binom{6}{2}-\binom{6}{4}}{2}=20$ 49) a) $5!$ b) $5!\cdot 5!$ c) $5!\cdot 5!\cdot 2^5$

50) In 4096 modi 51a) $\frac{n(n-3)}{2}=170$ da cui: 20 lati 51b) $\frac{(n-2)(n-3)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}-21$ da cui: 12 atleti

52) Tenendo conto di ovvie identità tipo $\boxed{k!=k(k-1)!}$ avremo

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n\cancel{-1}-k\cancel{+1})}{k!}+\frac{(n-1)(n-2)\dots(n\cancel{-1}-(k-1)\cancel{+1})}{(k-1)!}=$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!}+\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-1)!}=$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)+k\cdot(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\overset{\textit{raccogliendo}}{\underset{\substack{\textit{il prodotto}\\(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}}{=}}$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n\cancel{-k}\cancel{+k})}{k!}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{k}\quad \text{C.V.D.}$$

oppure

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=$$
$$=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n\cancel{-1}-k\cancel{+1})!}=$$
$$=\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{(n-k)(n-1)!+k(n-1)!}{k!(n-k)!}=$$
$$=\frac{(n-1)!(n\cancel{-k}\cancel{+k})}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}\quad \text{C.V.D.}$$

53) 109736 54) 306 55) $3^4=81$

56) $n°\ chicchi=1+2+4+\dots+2^{63}=\frac{2^{64}-1}{2-1}$

Si tratta ora di calcolare il numero $2^{64}-1\approx 2^{64}$, moltiplicando il quale per $38\cdot 10^{-9}$ si risponde al quesito; ora, se si approssima $2^{10}=1024$ con $1000=10^3$, il calcolo è molto agevole e si ottiene un valore superiore a 600 miliardi di tonnellate; tuttavia, il risultato esatto è addirittura > 700 miliardi di tonnellate.

57) Basta considerare lo sviluppo $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\binom{n}{n}b^n$ e pensare al caso part. $a=b=1$

58) $n=6,\ n=10$ 59) $n=7$ 61) 32