

2.10 - Il binomio di Newton

Si chiama "**binomio di Newton**" la formula per lo sviluppo dell' n-esima potenza di un binomio. Essa è:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Il simbolo $\sum_{k=0}^n$ si chiama "simbolo di **sommatoria**".

Si legge "sommatoria, per k che va da 0 a n, di ..." e "funziona" in questo modo: si prende l'espressione a destra e in essa si pone $k=0$; poi $k=1$; poi $k=2$; ecc. ... fino a $k=n$. I termini così ottenuti vengono sommati algebricamente fra loro.

Dimostrazione della formula

$(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)$ dove a secondo membro abbiamo n fattori.

Bene! Si può pensare di effettuare la moltiplicazione

scegliendo, da ciascun fattore $(a+b)$, o il termine a, o il termine b, in tutti i modi possibili, per poi sommare algebricamente i prodotti così ottenuti.

Ora, se io scelgo, ad esempio, k volte il fattore b e $n-k$ volte il fattore a, avrò il monomio $a^{n-k}b^k$.

Ma QUANTE VOLTE comparirà, questo monomio, nella somma finale?

Tante volte quanti sono i modi coi quali, fra gli n fattori, posso selezionare quei k dai quali scegliere b.

E tali modi sono $\binom{n}{k}$. Di qui la formula.

Vediamo qualche esempio di applicazione:

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 = \\ &= 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + \frac{4 \cdot 3}{2!}a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^5 &= \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 = \\ &= 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4b + \frac{5 \cdot 4}{2!}a^3b^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}a^2b^3 + 5 \cdot ab^4 + 1 \cdot b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \end{aligned}$$

E' interessante come i coefficienti così ricavati per gli sviluppi delle potenze successive di un binomio $(a+b)^n$ coincidano con quelli che si possono ottenere con il noto schema chiamato "**triangolo di Tartaglia**", schema derivante da un ragionamento completamente diverso!

Per **costruire il Triangolo di Tartaglia**, possiamo immaginarlo come un **albero di Natale**. In alto, **sul cucuzzolo**, ci mettiamo un 1.

Ora **scendiamo lungo le pendici dell'albero**, scrivendo (seconda riga) un 1 e poi un altro 1.

Scendiamo ancora: siamo sulla **terza riga**; **come primo elemento della riga scriviamo un 1**; poi, dato che sopra di noi troviamo una coppia di 1, **scriviamo un 2** ($1+1=2$).

Terminiamo la riga con un 1.

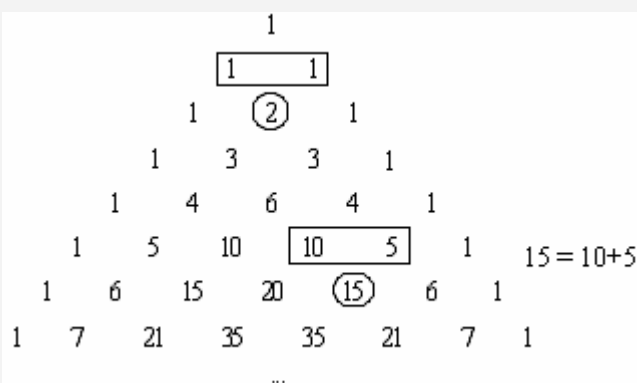
Abbiamo così costruito

i coefficienti (1, 2, 1) di $(a+b)^2$.

Scendiamo ancora, ed ecco che, **procedendo allo stesso modo**,

si generano i coefficienti (1, 3, 3, 1) di $(a+b)^3$.

E così per le righe successive.



$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3$$

$$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4$$

...

ESERCIZI

83) Quanto vale il 3° coefficiente dello sviluppo di $(a+b)^{100}$? E il 4° coefficiente di $(a+2b)^{101}$?

84) Scrivi gli sviluppi di $(a+b)^6$, $(a+b)^7$ e $(a-b)^{10}$.

Ricava i coefficienti sia con il binomio di Newton che col Triangolo di Tartaglia.

85) Considera il prodotto notevole $(x+y)^{18}$.

- a) Di quanti termini consta il suo sviluppo? b) Quanto vale il coefficiente del termine centrale?
c) E i coefficienti dei due termini che precedono e seguono questo?

86) Considera il prodotto notevole $(2x-5y)^{15}$.

- a) Di quanti termini consta il suo sviluppo? b) Quanto valgono i coefficienti dei due termini centrali?

87) Determina il 4° termine dello sviluppo di $(x+3)^{10}$

88) Determina il 7° termine dello sviluppo di $\left(-2x + \frac{y}{2}\right)^{11}$

89) Determina (senza svolgere i calcoli) l'espressione del coefficiente di a^{326} nello sviluppo di $(5a^5 - 2a^2)^{100}$

90) A partire dalla formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

dimostra che

$$\text{a) } \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad \text{b) } \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

RISPOSTE

$$83) \binom{100}{2} = 4950; \quad \binom{101}{3} \cdot 8 = 1333200 \quad 84) (a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6; \dots$$

$$85) \text{ a) } 19 \text{ termini} \quad \text{b) } \binom{18}{9} = 48620 \quad \text{c) } \binom{18}{8} = \binom{18}{10} = 43758 \quad 86) \text{ a) } 16 \quad \text{b) } -128700000000; +321750000000$$

$$87) 4^\circ \text{ termine} = \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 = \binom{10}{3}a^7b^3 = \binom{10}{3}x^7 \cdot 3^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}x^7 \cdot 27 = 3240x^7$$

$$88) 7^\circ \text{ termine} = \binom{n}{6}a^{n-6}b^6 = \binom{11}{6}a^5b^6 = \binom{11}{6} \cdot (-2x)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}y\right)^6 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}(-32x^5) \cdot \frac{1}{64}y^6 = -231x^5y^6$$

$$89) (5a^5 - 2a^2)^{100} = \binom{100}{0} \cdot 5^{100}a^{500} + \underbrace{\binom{100}{1} \cdot 5^{99}a^{495} \cdot (-2) \cdot a^2}_{\text{contiene } a^{497}} + \underbrace{\binom{100}{2} \cdot 5^{98}a^{490} \cdot (-2)^2a^4}_{\text{contiene } a^{494}} + \dots$$

Quindi,

- nel termine in cui compare il moltiplicatore $\binom{100}{0}$ l'esponente di a è 500,
- nel termine in cui compare il moltiplicatore $\binom{100}{1}$ è $500 - 3$,
- nel termine in cui compare il moltiplicatore $\binom{100}{2}$ è $500 - 6$,
- ... nel termine in cui compare il moltiplicatore $\binom{100}{k}$ è $500 - 3k$.

Il termine nel quale è presente la potenza a^{326} corrisponderà perciò al valore di k determinabile tramite la seguente equazione: $500 - 3k = 326$; $-3k = -174$; $k = 58$

Esso è perciò $\binom{100}{58} \cdot (5a^5)^{42} \cdot (-2a^2)^{58}$ e il relativo coefficiente numerico è uguale a $\binom{100}{58} \cdot 5^{42} \cdot 2^{58}$.

90) Si tratta semplicemente di svolgere, tramite la formula in questione, le operazioni $(1+1)^n$ e $(1-1)^n$