DERIVATE

1) DEFINIZIONE E SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA DERIVATA

Consideriamo la funzione

$\boxed{y = x^3 - x^2}$.

Desideriamo tracciarne il cosiddetto "grafico probabile"
ossia quell'abbozzo di grafico che si è in grado di disegnare dopo che si sono determinati:

1) il dominio;
2) le intersezioni con gli assi;
3) la "positività", cioè i valori di x per i quali la y corrispondente è positiva (il che permetterà di individuare pure, per esclusione, i valori di x per i quali la y corrispondente è negativa);
4) i limiti ai confini del dominio.

Pronti … via!

$\boxed{y = x^3 - x^2}$

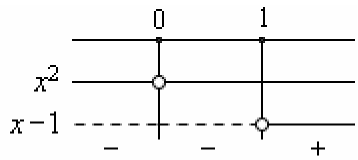
1) Il dominio è tutto $\mathbb{R}$

2) $x = 0 \;\to\; y = 0$ quindi l'intersezione con l'asse y è il punto (0, 0)

$y = 0 \leftrightarrow x^3 - x^2 = 0; \quad x^2(x-1) = 0; \quad x = 0 \vee x = 1$

quindi le intersezioni
con l'asse x
sono i punti (0, 0) e (1,0)

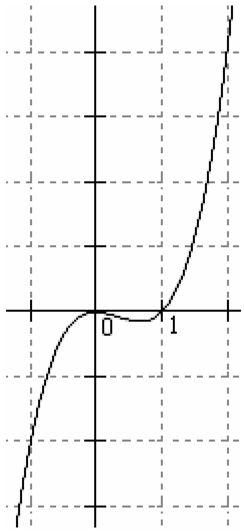
3) $y > 0 \leftrightarrow x^3 - x^2 > 0; \quad x^2(x-1) > 0; \quad x > 1$ (schema sottostante)



Linea continua = espressione positiva
Linea tratteggiata = espressione negativa
Pallino = espressione nulla

4) $\lim_{x \to -\infty} \left(x^3 - x^2\right) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(x^3 - x^2\right) = +\infty$

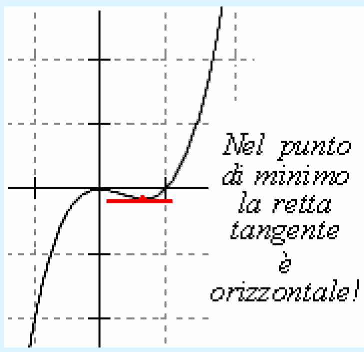
… *e dalle informazioni* 1), 2), 3) *e* 4) *si trae la figura qui a destra* →



Dal "grafico probabile" si desume con certezza che deve esserci un punto di minimo relativo, con ascissa compresa fra 0 e 1.

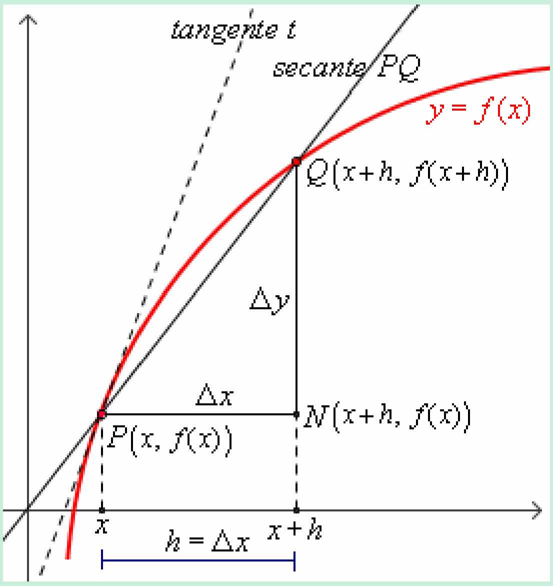
Sarebbe molto interessante riuscire a determinare in modo *PRECISO* le coordinate di questo punto.

Osserviamo che, nel punto di minimo, la retta tangente al grafico è orizzontale, quindi ha coefficiente angolare uguale a 0;



perciò

se noi riuscissimo a trovare una formula che, per ciascun valore di *x*, fornisca il coefficiente angolare della retta tangente alla nostra funzione nel punto di ascissa *x*, saremmo a posto, perché, **per trovare la *x* del punto di minimo, basterebbe poi risolvere l'equazione ottenibile uguagliando a 0 l'espressione trovata.**



Affrontiamo questo problema dapprima dal punto di vista generale.

Consideriamo (vedi figura qui a fianco) una funzione $y = f(x)$; sia x un'ascissa fissata; indichiamo con P il punto del grafico, avente ascissa x. Le coordinate di P saranno dunque $(x,\ f(x))$.

La retta tangente in P è definita come la posizione limite di una retta secante PQ (con Q punto sulla curva, distinto da P) quando il punto Q viene portato *vicinissimo* a P.

Indichiamo l'ascissa di Q con $x+h$ (essendo h un incremento che potrà essere *positivo* o anche *negativo*: si parla di "incremento *algebrico*").

Le coordinate di Q saranno allora $(x+h,\ f(x+h))$ e avremo:

- **coefficiente angolare della secante PQ** $= \dfrac{\textit{differenza ordinate di Q e P}}{\textit{differenza ascisse di Q e P}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{NQ}{PN} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- **coefficiente angolare della tangente t** $= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

❑ **Il rapporto** $\boxed{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

si dice "rapporto incrementale" della funzione f, relativo al punto x e all'incremento h.
Esso è uguale al **coefficiente angolare della retta secante** che passa per i punti $(x, f(x))$ e $(x+h,\ f(x+h))$.

❑ **Il limite del rapporto incrementale, al tendere a zero dell'incremento *h*:**

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$ **(ammesso che esista e sia finito)**

si dice "derivata" della funzione f nel punto x, è indicato con il simbolo $\boxed{f\,'(x)}$,

ed è uguale al coeff. ang. della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x, f(x))$.

OSSERVAZIONI:

a) *se il limite non esiste*, si dice che "la f non è derivabile nel punto x"

b) *se il limite esiste, ma è infinito*, si dice ancora che "la f non è derivabile in x", ma contemporaneamente, se la funzione f è continua nell'ascissa x. si dice anche che "la f ha in x derivata infinita". La contraddizione sotto l'aspetto linguistico è evidente, ma è entrata nell'uso (anche perché, effettivamente, accettarla comporta alcuni vantaggi).

Evidentemente,

♪ il caso a) si verifica se e solo se il grafico della f *non ammette retta tangente* in P(x, $f(x)$)

♫ mentre il caso b) si verifica se e solo se *la posizione limite della retta secante PQ è verticale*; qui, tuttavia, la posizione limite della retta secante viene chiamata "retta tangente" *soltanto* qualora la funzione f sia *continua* nell'ascissa x.

- ESEMPIO: **calcolare la derivata della funzione $y = f(x) = (x-3)^2$ nel punto $x = 5$.**

Rapporto incrementale $= \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} =$

$$= \frac{(5+h-3)^2-(5-3)^2}{h} = \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \frac{\cancel{4}+4h+h^2\cancel{-4}}{h} = \frac{h^2+4h}{h} = \frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}} = h+4$$

Derivata $= f'(5) = \lim\limits_{h\to 0}(h+4) = 4$

Il coeff. ang. della retta tangente alla curva di equazione $y=(x-3)^2$ nel punto $x=5$ vale dunque 4 !

- **Esempio più generale:**
calcolare la derivata della funzione $y = f(x) = (x-3)^2$ nel generico punto di ascissa x.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-3)^2-(x-3)^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+h^2\cancel{+9}+2hx\cancel{-6x}-6h\cancel{-x^2}\cancel{+6x}\cancel{-9}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2hx-6h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+2x-6)}{\cancel{h}} = 2x-6 \qquad (NOTA)$$

NOTA: in esercizi di questo tipo, è IMPORTANTISSIMO tener presente
che la quantità tendente a 0 è l'incremento *h*, mentre l'ascissa *x* è FISSA.
Nel calcolo del limite, *x* va trattata come una costante, *h* come la variabile (tendente a 0).

In definitiva: $f'(x) = 2x-6$.
Il coeff. ang. della retta tangente alla curva $y=(x-3)^2$ nel punto di ascissa x vale dunque $2x-6$!
Perciò, ad esempio, si avrà: $f'(3)=0$; $f'(4)=2$; $f'(5)=4$ (come già sapevamo), ecc. ecc.

Torniamo ora al problema da cui avevamo preso le mosse.
Si trattava di trovare l'ascissa nella quale la funzione $y = f(x) = x^3 - x^2$ tocca il suo minimo relativo.

Avevamo osservato che in corrispondenza del punto in questione doveva annullarsi
il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione.

Calcoliamo l'espressione di tale coefficiente angolare in corrispondenza della generica ascissa *x*, ossia **calcoliamo la derivata $f'(x)$:**

$$\boxed{f'(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^3-(x+h)^2\right]-\left[x^3-x^2\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3}+3hx^2+3h^2x+h^3\cancel{-x^2}-2hx-h^2\cancel{-x^3}\cancel{+x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3hx^2+3h^2x+h^3-2hx-h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3x^2+3hx+h^2-2x-h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}\left(3x^2+3hx+h^2-2x-h\right) = \boxed{3x^2-2x}$$

Ora cerchiamo il valore di *x* per cui $f'(x)=0$:

$f'(x)=0$

$\boxed{3x^2-2x=0}$; $\quad x(3x-2)=0$; $\quad \boxed{x=0 \vee x=\frac{2}{3}}$

Delle due ascisse trovate, quella di minimo relativo è quella compresa fra 0 e 1, ossia $x=2/3$.
Perciò

$$\boxed{x_m=\frac{2}{3}}, \quad \text{da cui} \quad y_m=\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{4}{27}$$

L'altra soluzione x=0, evidentemente, è l'ascissa dell'altro punto
in corrispondenza del quale la retta tangente è orizzontale (l'origine).

- ALTRO ESEMPIO. **Calcolare la derivata, nel generico punto *x*, della funzione $y = f(x) = sen\,x$**

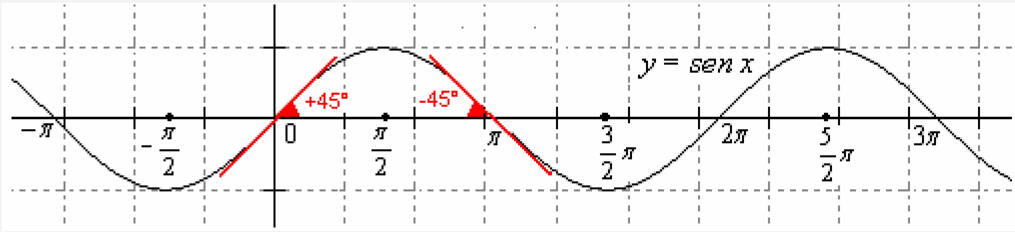
$$\boxed{f'(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen\,x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{sen\,x\,cos\,h + cos\,x\,sen\,h - sen\,x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{sen\,x(cos\,h-1)+cos\,x\,sen\,h}{h} = \lim_{h\to 0}\left(sen\,x\frac{cos\,h-1}{h}+cos\,x\frac{sen\,h}{h}\right) = sen\,x\cdot 0 + cos\,x\cdot 1 = \boxed{cos\,x}$$

Abbiamo dunque dimostrato che **la derivata della funzione $sen\,x$ è uguale a $cos\,x$**

1) Osserviamo che tale derivata $cos\,x$ si annulla quando $x=\frac{\pi}{2},\quad x=\frac{3}{2}\pi....$,

   insomma: quando $x=\frac{\pi}{2}+k\pi=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ con\ k\in\mathbb{Z}$ (multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$).
   Ma ciò va perfettamente d'accordo col fatto che pensando al grafico della funzione $y = sen\,x$,
   i punti in cui la tangente alla curva è orizzontale sono quelli in cui la funzione
   tocca il suo massimo oppure il suo minimo, ovvero proprio i multipli dispari di $\pi/2$.



2) Osserviamo inoltre che $f'(0)=\left[cos\,x\right]_{x=0}=1$, il che significa che
   la sinusoide $y = sen\,x$ attraversa l'origine con inclinazione di coeff. ang. 1 quindi di +45°.

3) Analogamente si ha: $f'(\pi)=-1,\quad f'(2\pi)=1,\quad f'(3\pi)=-1$, ecc. ecc.
   con ovvia interpretazione in termini di inclinazione del grafico della $y = sen\,x$.

ESERCIZI (alcune risposte alla fine)

1) Dimostra che la derivata della funzione $y = f(x) = x^5$, nel punto $x=1$, è uguale a 5
   mentre nel punto $x=2$ è uguale a 80 e nel punto $x=3$ è uguale a 405.
   A cosa si devono valori così alti?

2) Dimostra che la derivata della funzione $y = f(x) = x^5$, nel punto di ascissa *x*, è $f'(x)=5x^4$.
   Tale derivata si annulla quando $x=0$: cosa possiamo dedurne, riguardo al grafico della $f(x)$?

3) Dimostra che la derivata della funzione $y = f(x) = \frac{1}{x}$, nel punto di ascissa 2, vale $-\frac{1}{4}$.

4) Dimostra che la derivata della funzione $y = f(x) = \frac{1}{x}$, nel punto di ascissa *x*, è $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

   Tale derivata non si annulla per nessun valore di *x*, anzi: è *negativa* per ogni valore di *x*.
   E infatti il grafico della $f(x)$ ha la caratteristica di essere …

5) Dimostra che la derivata della funzione $y = f(x) = 2x^3-9x^2+12x$ è $f'(x)=6x^2-18x+12$.
   Successivamente, analizza la funzione $f(x)$, determinando:
   - il dominio;
   - le intersezioni con gli assi;
   - la "positività", cioè i valori di *x* per i quali la *y* corrispondente è positiva
   - i limiti ai confini del dominio
   - i valori di *x* per i quali la retta tangente al grafico è orizzontale.

   Traccia un abbozzo di grafico per la $f(x)$ e verificalo con un software matematico.

RISPOSTE 1) Valori molto alti perché la derivata esprime il coefficiente angolare della retta tangente quindi esprime l'inclinazione del grafico, e questo grafico si "impenna" molto rapidamente, al crescere di *x*
2) Ne deduciamo che il grafico ha per *x* = 0 retta tangente orizzontale. In questo caso, tale tang. orizzontale viene *attraversata* dal grafico 4) … sempre decrescente (retta tangente con coeff. angolare <0 vuol dire retta tangente in discesa, quindi funzione in discesa) 5) Si ha una tangente orizzontale con *x* = 1 e *x* = 2