

2) DERIVABILITA' E CONTINUITA'

TEOREMA: se una funzione è derivabile in un punto, allora è continua in quel punto.

Schematicamente: f derivabile in $x_0 \rightarrow f$ continua in x_0

(ho preferito usare qui il simbolo x_0 al posto di x per render meglio l'idea di un'ascissa FISSATA. In questo paragrafo il simbolo x ritorna invece ad indicare un'ascissa VARIABILE).

Ipotesi: esiste ed è finito il $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Tesi: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ o, in alternativa, $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Dimostrazione

L'ipotesi è che

esista finito il $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

Poniamo dunque $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \varepsilon(h)$

e avremo che $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$.

Adesso possiamo scrivere:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \varepsilon(h)$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0) = h \cdot \varepsilon(h)$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h[f'(x_0) + \varepsilon(h)]$$

Dall'ultima uguaglianza,

passando al limite per $h \rightarrow 0$, otteniamo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \{f(x_0) + h[f'(x_0) + \varepsilon(h)]\} = f(x_0)$$

C.V.D.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE:

il teorema non è invertibile, cioè non è vero che la continuità in un punto implichi per forza la derivabilità in quel punto.

Due controesempi:

$$\text{♩ } y = \sqrt[3]{x}$$

è continua nell'origine ma non è ivi derivabile, perché "ha derivata infinita"

$$\text{♩ } y = |x - 3|$$

non è derivabile nel punto $x = 3$ perché il rapporto incrementale in $x = 3$ tende a due limiti distinti a seconda che l'incremento tenda a 0^+ o a 0^- .

Insomma:

la continuità in un punto è condizione NECESSARIA, ma NON SUFFICIENTE, per la derivabilità in quel punto.

3) INFINITESIMI, INFINITI; "SCRITTURA FUORI DAL SEGNO DI LIMITE"

- Della quantità $\varepsilon(h)$, introdotta nel Teorema precedente, si può dire che è "un infinitesimo".

In Analisi matematica il termine "**infinitesimo**" viene spesso utilizzato per indicare

"**una funzione o quantità che tende a zero, nel contesto di cui ci si sta occupando**". Altri esempi:

♩ la funzione $y = \frac{1}{x^2}$ è un infinitesimo per $x \rightarrow \infty$

♩ $y = \sin x$ e $y = 1 - \cos x$ sono infinitesimi per $x \rightarrow 0$

♩ $e^{1/x}$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 0^-$

- Analogamente, viene usata la parola "**infinito**" per indicare **una funzione o quantità che tende all'infinito, nel contesto di cui ci si sta occupando**; es.

♩ $y = \tan x$ è un infinito per $x \rightarrow \pi/2$

♩ $\ln x$ è un infinito per $x \rightarrow +\infty$

♩ $\frac{1}{x-2}$ è un infinito per $x \rightarrow 2$

♩ $e^{1/x}$ è un infinito per $x \rightarrow 0^+$

- Per "**scrittura fuori dal segno di limite**" si intende la possibilità, nel caso si abbia

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, di esprimere la funzione come somma del limite più un infinitesimo:

$$f(x) = \ell + \varepsilon(x) \text{ essendo } \varepsilon(x) \text{ un infinitesimo quando } x \rightarrow \ell.$$

In effetti, posto $\varepsilon(x) = f(x) - \ell$, si ha banalmente $f(x) = \ell + (f(x) - \ell) = \ell + \varepsilon(x)$ e $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ (in pratica, la quantità $\varepsilon(x)$ che compare nella scrittura non è altro che la differenza $f(x) - \ell$).