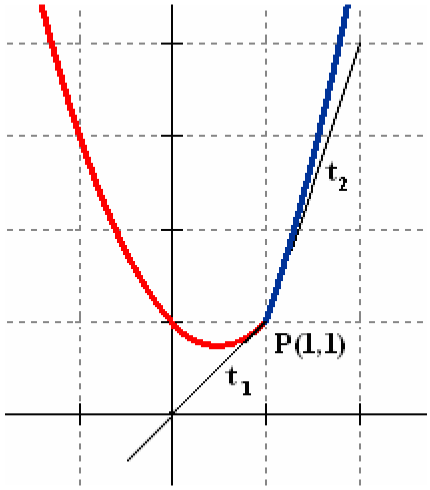
5) DERIVATA UNILATERALE

Consideriamo la funzione $\boxed{y = f(x) = x^2 + |x-1|}$.

Avremo

$$\begin{cases} con\ \boxed{x \le 1}, & \boxed{f(x) =}\ x^2 + (-x+1) = \boxed{x^2 - x + 1} \\ con\ \boxed{x \ge 1}, & \boxed{f(x) =}\ x^2 + (x-1) = \boxed{x^2 + x - 1} \end{cases}$$

Il grafico della funzione è costituito da "**due archi di parabola che si tengono per mano**".



Nel passaggio dalla sinistra alla destra dell'ascissa $x = 1$, cambia l'espressione analitica della funzione: tale espressione è $x^2 - x + 1$ con $x \le 1$, diventa invece $x^2 + x - 1$ con $x \ge 1$.
Il brusco cambiamento di espressione determina un altrettanto brusco cambiamento nell'inclinazione della curva. Si dice che il punto P, di ascissa 1, è un "**punto angoloso**".

La curva, per via dell' "angolosità", NON ammette retta tangente nel punto P(1,1) in cui si passa da un'espressione all'altra.

Potremmo però dire che,

- se consideriamo soltanto la parte del grafico che si trova "da P verso sinistra", avremo una retta tangente in P con una certa inclinazione;
- se invece consideriamo soltanto la parte di grafico che va "da P verso destra", avremo UN'ALTRA retta tangente con un'altra inclinazione.

Per questo motivo, nella figura abbiamo preferito disegnare solo due SEMIrette,
la semiretta t_1 "tangente in P verso sinistra" e la semiretta t_2 "tangente in P verso destra".

Quali saranno i coefficienti angolari di queste due semirette?

Per rispondere, osserviamo che

- t_1 può essere pensata come la posizione che una semiretta secante, con origine in P e passante per un altro punto Q del grafico, situato A SINISTRA di P, tende ad assumere quando Q viene fatto tendere a P;
- e analogamente, t_2 può essere pensata come la posizione limite di una semiretta secante PQ, con Q situato sul grafico, A DESTRA di P, e fatto tendere a P.

E' allora evidente che il coefficiente angolare di t_1 ("semitangente in P verso sinistra") potrà essere determinato calcolando il

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

mentre il coefficiente angolare di t_2 ("semitangente in P verso destra") coinciderà col

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Si parla, in casi come questo, di

- **"rapporto incrementale sinistro" e "derivata sinistra",**
- **"rapporto incrementale destro" e "derivata destra".**

In generale:

Sia data una funzione $y = f(x)$, e un punto x_0 nel quale la funzione sia definita.

- Si dice "**rapporto incrementale sinistro**" della $f(x)$ in x_0, l'espressione
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{con } h<0$$
- Si dice "**rapporto incrementale destro**" della $f(x)$ in x_0, l'espressione
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{con } h>0$$
- Se esiste finito il $\lim\limits_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$,
esso viene detto "**derivata sinistra**" della $f(x)$ in x_0, e indicato con $f'_-(x_0)$
- Se esiste finito il $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$,
esso viene detto "**derivata destra**" della $f(x)$ in x_0, e indicato con $f'_+(x_0)$

E' conseguenza immediata della definizione di "derivata" il teorema seguente:

$f(x)$ è derivabile in x_0 se e solo se ammette, in x_0,
tanto la derivata sinistra quanto la derivata destra, e queste sono uguali fra loro:

$$\boxed{\exists f'(x_0)} \leftrightarrow \boxed{\exists f'_-(x_0)} \wedge \boxed{\exists f'_+(x_0)} \wedge \boxed{f'_-(x_0) = f'_+(x_0)}$$

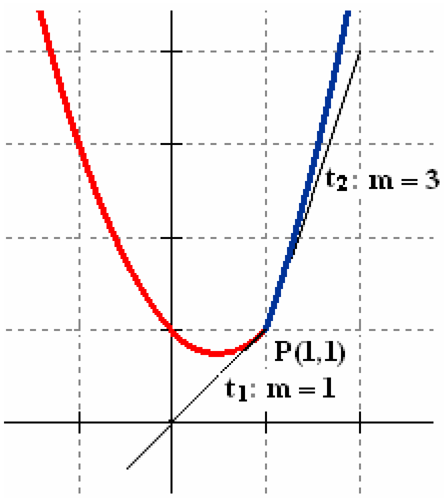
Ritornando ora all'esempio da cui eravamo partiti:

$$f(x) = x^2 + |x-1| = \left\langle \begin{array}{ll} x^2 - x + 1 & con\ x \le 1 \\ x^2 + x - 1 & con\ x \ge 1 \end{array} \right.$$

avremo:

$$\boxed{f'_-(1)} = \lim_{h\to 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \overset{\text{NOTA 1}}{=}$$
$$= \lim_{h\to 0-} \frac{\left((1+h)^2-(1+h)+1\right)-1}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0-} \frac{h^2+h}{h} = \lim_{h\to 0-} (h+1) = \boxed{1}$$

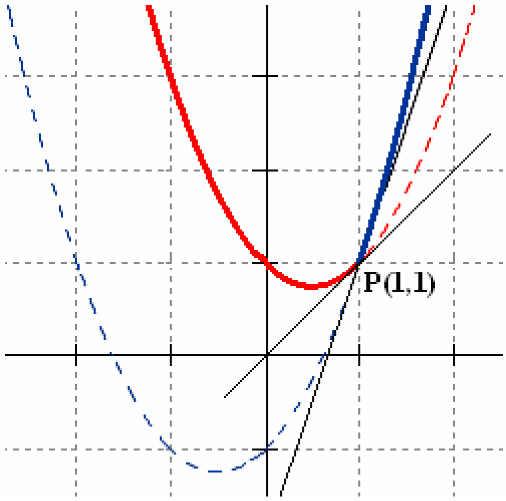
$$\boxed{f'_+(1)} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \overset{\text{NOTA 2}}{=}$$
$$= \lim_{h\to 0+} \frac{\left((1+h)^2+(1+h)-1\right)-1}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0+} \frac{h^2+3h}{h} = \lim_{h\to 0+} (h+3) = \boxed{3}$$



NOTA 1 – Qui per il calcolo di $f(1+h)$ utilizziamo l'espressione x^2-x+1, che vale a *sinistra* dell'ascissa 1, perché, essendo h negativo, $1+h$ si trova appunto a *sinistra* di 1

NOTA 2 – Qui per il calcolo di $f(1+h)$ utilizziamo l'espressione x^2+x-1, che vale a *destra* dell'ascissa 1, perché, essendo h positivo, $1+h$ si trova appunto a *destra* di 1

OSSERVAZIONE ANTICIPATRICE.
A dire il vero, quando determineremo e impareremo a memoria le regole per le derivate delle funzioni elementari, di fronte ad un problema di questo tipo, preferiremo comportarci in un modo diverso.
Ragioneremo così:
la derivata sinistra coincide col coeff. ang. che avrebbe, nell'ascissa 1, la retta tangente al grafico della funzione, se la funzione stessa mantenesse, anche a destra dell'ascissa 1, la medesima espressione analitica che è valida con $x \le 1$, ossia $x^2 - x + 1$
… e discorso analogo per la derivata destra (vedi figura).
Quindi, in modo molto più rapido ed efficiente:



$$f'_-(1) = \left[D(x^2 - x + 1)\right]_{x=1} \overset{\text{NOTA}}{=} \left[2x - 1\right]_{x=1} = 2 - 1 = 1$$

$$f'_+(1) = \left[D(x^2 + x - 1)\right]_{x=1} \overset{\text{NOTA}}{=} \left[2x + 1\right]_{x=1} = 2 + 1 = 3$$

NOTA : quando avremo imparato la regola per la derivata di un polinomio,
ci metteremo un decimo di secondo a ricavare: $D(x^2 - x + 1) = 2x - 1$ e $D(x^2 + x - 1) = 2x + 1$

Altro esempio

La funzione $y = f(x) = e^{1/x}$ è definita per $x \ne 0$.

Essa presenta, curiosamente, due comportamenti del tutto diversi a sinistra e a destra dell'ascissa 0: infatti è

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0^+ \ (\textit{perché l'esponente tende a } -\infty); \quad \lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty \ (\textit{perché l'esponente tende a } +\infty)$$

Da sinistra, la funzione **"si tuffa"** dunque **nell'origine**;
ma – ci chiediamo – **secondo quale inclinazione avviene il "tuffo"?**

Per rispondere a questa domanda, potremmo procedere come segue:
"completiamo per continuità" la definizione della funzione, ottenendo

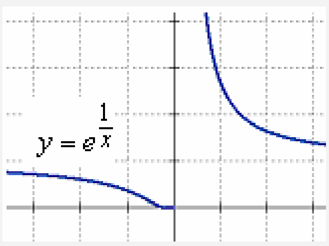
$$F(x) = \begin{cases} e^{1/x} & per\ x \ne 0 \\ 0 & per\ x = 0 \end{cases}$$

La funzione $F(x)$ è "figlia" della $f(x)$, ma rispetto alla funzione "madre" ha, in più,
la proprietà di essere definita nell'ascissa 0 e ivi CONTINUA A SINISTRA.
E' evidente che l'inclinazione con cui la funzione madre f "si tuffa" nell'origine, provenendo dalla sinistra, è la stessa inclinazione con la quale fa lo stesso "tuffo" la funzione figlia F.
Calcoliamo quindi il rapporto incrementale SINISTRO della $F(x)$ nell'ascissa 0, e cerchiamone poi il limite quando l'incremento h tende a 0; insomma, andiamo a calcolare la DERIVATA SINISTRA DELLA $F(x)$.
Dunque:

$$F'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{e^{1/h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{e^{1/h}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h} e^{1/h} = \lim_{z \to -\infty} z e^z \overset{\text{NOTA}}{=} 0^-$$

NOTA. Quest'ultimo limite (si ha una Forma di Indecisione "infinito moltiplicato zero") sarà dimostrato uguale a 0 nel capitolo sul Teorema di De L'Hospital, che vedremo successivamente. Tuttavia, dal punto di vista intuitivo, la grande rapidità con cui sappiamo tendere a zero l'esponenziale al tendere dell'esponente a $-\infty$*, ci fa "sentire" fin d'ora come ampiamente plausibile il risultato 0.*

Pertanto, **da tutto quanto visto si trae che la funzione** $y = f(x) = e^{1/x}$ **si "tuffa" nell'origine, DA SINISTRA, con inclinazione di coeff. ang. 0** (tutt'altro che un tuffo "di testa" quindi ! … **un tuffo "orizzontale"**, invece!), come un grafico tracciato con software matematico potrebbe confermare $\to$.



OSSERVAZIONE
Si poteva giungere alla stessa conclusione anche calcolando il
$\lim_{x \to 0^-} f'(x)$;
ci ritorneremo quando, parlando di "Studio di funzione", tratteremo il "Criterio sufficiente di derivabilità".