7) TEOREMI SULLE OPERAZIONI CON FUNZIONI DERIVABILI

1)
Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in uno stesso punto x,
allora anche la loro somma $f(x)+g(x)$ è una funzione derivabile in quel punto,
e la derivata della funzione somma nel punto x è uguale alla somma delle derivate,
nello stesso punto, delle funzioni addizionate. Brevemente:

La derivata della somma di due funzioni derivabili esiste ed è uguale alla somma delle derivate”:

$$\boxed{y = f(x)+g(x) \to y' = f'(x)+g'(x)}$$

Altri modi di schematizzare il teorema possono essere:

$$(f+g)' = f'+g', \qquad D[f(x)+g(x)] = Df(x)+Dg(x)$$

Dimostrazione

$$D[f(x)+g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$$

Esempio: $y = x^2 + sen\,x + e^x \to y' = 2x + cos\,x + e^x$

2)

La derivata del prodotto di una costante per una funzione derivabile
esiste ed è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione:

$$\boxed{y = cf(x) \to y' = cf'(x)}$$

Altri modi di schematizzare il teorema possono essere:

$(cf)' = cf'$ *(se c è una costante ed f una funzione)*; $\quad D[c\cdot f(x)] = c\cdot Df(x)$

La *dimostrazione*, facilissima, è *lasciata al lettore*.

Esempio: $y = 7x^3 \to y' = 7\cdot 3x^2 = 21x^2$

Conseguenza notevole dei teoremi 1) e 2):

La derivata di una combinazione lineare di funzioni
è uguale alla combinazione lineare (ovviamente, con gli stessi coefficienti) delle derivate:
ciò si può esprimere dicendo che
“LA DERIVATA E’ UN OPERATORE LINEARE”

In simboli, possiamo scrivere:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\ldots+c_n f_n(x)\right) = c_1 f'_1(x)+c_2 f'_2(x)+\ldots+c_n f'_n(x)} \quad \text{o anche}$$

$$D\left(\sum_i c_i f_i(x)\right) = \sum_i c_i Df_i(x)$$

Esempi: $y = x^3+2x^2-3x-4 \to y' = 3x^2+4x-3$

$$y = 3ln\,x - 5\sqrt{x} \to y' = 3\cdot\frac{1}{x} - 5\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{x}-\frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{6-5\sqrt{x}}{2x}$$

Conseguenze notevoli del teorema 1) e del fatto che la derivata di una costante è 0 sono le seguenti:

Una costante additiva, nella derivazione, viene eliminata

$$\boxed{y = f(x)+c \to y' = f'(x) \quad \text{es}: \quad y = sen\,x+5 \to y' = cos\,x}$$

Se due funzioni differiscono per una costante additiva, allora hanno la stessa derivata

$$\boxed{f(x) = g(x)+c \to f'(x) = g'(x)}$$

3)
Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe derivabili in uno stesso punto x,
allora anche il loro prodotto $f(x)g(x)$ è una funzione derivabile in quel punto,
e la derivata di tale funzione prodotto nel punto x si ottiene applicando una regola particolare. Brevemente:

La derivata del prodotto di due funzioni derivabili esiste e si ottiene con la seguente regola:

$$\boxed{y = f(x)\cdot g(x) \to y' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$

Scioglilingua:
"derivata della prima per (= moltiplicato) **la seconda, più la prima per la derivata della seconda"**

Altri modi di schematizzare il teorema possono essere:

$$(fg)' = f'g + fg'; \qquad D[f(x)\cdot g(x)] = Df(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot Dg(x)$$

Dimostrazione

$$D[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} \overset{\text{NOTA}}{=} g(x)f'(x) + f(x)g'(x), \quad C.V.D.$$

NOTA
Quando facciamo tendere h a zero, siamo sicuri che $g(x+h) \to g(x)$
perché abbiamo supposto che la funzione g sia derivabile in x,
e un teorema noto ci assicura che
se una funzione è derivabile in un punto, allora è anche continua in quel punto.
Ricordiamo la definizione di continuità di una funzione in un punto:

$$f \text{ continua in } x_0 \xleftrightarrow{def.} \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \textit{o, equivalentemente,} \quad \exists \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Esempio: $y = x^2 \ln x \ \to\ y' = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$

La derivata del prodotto di più funzioni derivabili
è uguale alla somma dei prodotti della derivata di ciascuna funzione per tutte le altre:

$$\boxed{(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'}$$

Dimostrazione:

$$(fgh)' = ((fg)\cdot h)' = (fg)'\cdot h + (fg)\cdot h' = (f'g + fg')\cdot h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$$

Esempi:

- $y = (x^2-1)\cdot \ln x \cdot \cos x$

  $y' = 2x\cdot\ln x\cdot\cos x + (x^2-1)\cdot\frac{1}{x}\cdot\cos x + (x^2-1)\cdot\ln x\cdot(-\operatorname{sen} x)$

- $y = 3x^4 + x(2^x + x)$

  $y' = 3\cdot 4x^3 + 1\cdot(2^x + x) + x\cdot(2^x\ln 2 + 1) = 12x^3 + 2^x + x + x\cdot 2^x\ln 2 + x = 12x^3 + 2^x + 2x + x\cdot 2^x \ln 2$

- $y = 5x^3 \operatorname{sen} x$

  Vedendola come $y = 5(x^3\operatorname{sen} x) \to y' = 5(3x^2\operatorname{sen} x + x^3\cos x)$

  Vedendola come $y = (5x^3)\operatorname{sen} x \to y' = 15x^2\operatorname{sen} x + 5x^3\cos x$

  Vedendola (*ma non conviene!*) *come* $y = 5\cdot x^3\cdot\operatorname{sen} x \to y' = 0\cdot x^3\cdot\operatorname{sen} x + 5\cdot 3x^2\cdot\operatorname{sen} x + 5\cdot x^3\cdot\cos x$

4)
Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe derivabili in uno stesso punto *x*,
allora anche il loro quoziente $f(x)/g(x)$ è una funzione derivabile in quel punto,
e la derivata di tale funzione quoziente nel punto *x* si ottiene applicando una regola particolare.
Brevemente:

La derivata del quoziente di due funzioni derivabili esiste e si ottiene con la seguente regola:

$$\boxed{y=\frac{f(x)}{g(x)} \to y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

Altri modi di schematizzare il teorema possono essere:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}; \qquad D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{Df(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot Dg(x)}{[g(x)]^2}$$

Dimostrazione:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\left\{g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\overset{\text{NOTA}}{=}$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\cdot\{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

NOTA - Anche in questo passaggio, come già nella dimostrazione del teorema sulla derivata di un prodotto, abbiamo utilizzato il fatto che la derivabilità di una funzione in un punto implica la continuità della stessa funzione in quel punto. Essendo, per HP, $g(x)$ derivabile nel punto *x*, $g(x)$ sarà anche continua in *x*, per cui si avrà $\lim_{h\to 0} g(x+h)=g(x)$

Esempio: $y=\frac{sen\,x}{x^3}\to y'=\frac{cos\,x\cdot x^3-sen\,x\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{x^2(x\,cos\,x-3\,sen\,x)}{x^6}=\frac{x\,cos\,x-3\,sen\,x}{x^4}$

$$y=tg\,x=\frac{sen\,x}{cos\,x}\quad\to\quad y'=\frac{cos\,x\cdot cos\,x-sen\,x\cdot(-sen\,x)}{cos^2x}=\frac{cos^2x+sen^2x}{cos^2x}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{1}{cos^2x}\\ \frac{cos^2x}{cos^2x}+\frac{sen^2x}{cos^2x}=1+tg^2x\end{array}\right.$$

Pertanto $\boxed{y=tg\,x\to y'=\frac{1}{cos^2x}\quad oppure\quad y'=1+tg^2x}$

e analogamente si può dimostrare che $\boxed{y=cotg\,x\to y'=-\frac{1}{sen^2x}\quad oppure\quad y'=-\left[1+cotg^2x\right]}$

5)

Derivata del reciproco di una funzione derivabile (e, naturalmente, non nulla nel punto considerato):

$$\boxed{y=\frac{1}{f(x)}\to y'=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}}$$

Dim.: Per il precedente teorema sulla derivata del quoziente di due funzioni, avremo, considerando $\frac{1}{f(x)}$ come quoziente fra la funzione costante 1 e la funzione $f(x)$: $\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{0\cdot f-1\cdot f'}{f^2}=-\frac{f'}{f^2}$

Esempio: $y=\frac{1}{\ln x}\to y'=-\frac{1/x}{(\ln x)^2}=-\frac{1}{x\ln^2 x}$

ESERCIZI Deriva le funzioni indicate:

1) $y = x^4 + 5x^3 - 3x^2 - x - 12$ 2) $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ 3) $y = ax^2 + bx + c$

4) $y = mx + q$ 5) $y = \frac{x^2 + 3x}{6}$ 6) $y = cx^{a+b}$

7) $y = \frac{4}{x}$ 8) $y = 4\sqrt[4]{x}$ 9) $y = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{6}$

10) $y = ax^{\alpha} + bx^{-\beta}$ 11) $y = 2\,sen\,x - 3\cos x$ 12) $y = 2e^x + x$

13) $y = x^2 + 3\ln x$ 14) $y = x^3 \cdot \ln x$ 15) $y = sen\,x \cos x$

16) $y = 4e^x \cos x$ 17) $y = \left(x^2 + x - 2\right)e^x$ 18) $y = \left(2x^2 + 5x - 2\right)\left(sen\,x + 1\right)$

19) $y = \frac{2x+3}{4x+5}$ 20) $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 5}$ 21) $\frac{x^2 - 5}{x^2 - 3x}$

22) $y = \frac{sen\,x}{x}$ 23) $y = \frac{x^3}{\ln x}$ 24) $\frac{\ln x + 2}{x + 2}$

25) $\frac{2x + 3e^x}{x^2}$ 26) $y = \frac{x - sen\,x}{x - \cos x}$ 27) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$

28) $y = \frac{1}{\ln x}$ 29) $y = \frac{7}{x^2 + 1}$ 30) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}$

31) $y = ax + b + \frac{1}{ax + b}$ 32) $y = x e^x \cos x$ 33) $y = x^2 \cdot \left(e^x - 2\right)\ln x$

34) $y = x\left(x + sen\,x\right)\left(x + \cos x\right)$ 35) $\frac{x+1}{x^2} sen\,x\left(2\cos x + 1\right)$

RISPOSTE

1) $y' = 4x^3 + 15x^2 - 6x - 1$ 2) $y' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$ 3) $y' = 2ax + b$ 4) $y' = m$

5) $y' = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} = \frac{2x+3}{6}$ 6) $y' = c\left(a+b\right)x^{a+b-1}$ 7) $y' = -\frac{4}{x^2}$ 8) $y' = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

9) $y' = \frac{1}{8\sqrt[4]{x}}$ 10) $y' = a\alpha x^{\alpha-1} - \frac{b\beta}{x^{\beta+1}}$ 11) $y' = 2\cos x + 3\,sen\,x$ 12) $y' = 2e^x + 1$

13) $y' = 2x + \frac{3}{x}$ 14) $y' = 3x^2 \cdot \ln x + x^2 = x^2\left(3\ln x + 1\right)$ 15) $y' = \cos^2 x - sen^2 x$

16) $y' = 4e^x\left(\cos x - sen\,x\right)$ 17) $y' = \left(2x+1\right)e^x + \left(x^2 + x - 2\right)e^x = \left(x^2 + 3x - 1\right)e^x$

18) $y' = \left(4x+5\right)\left(sen\,x + 1\right) + \left(2x^2 + 5x - 2\right)\cos x$ 19) $y' = -\frac{2}{\left(4x+5\right)^2}$ 20) $y' = \frac{3x^2 - 10x + 15}{\left(x^2 - 5\right)^2}$

21) $y' = -\frac{3x^2 - 10x + 15}{\left(x^2 - 3x\right)^2}$ 22) $y' = \frac{x\cos x - sen\,x}{x^2}$ 23) $y' = \frac{x^2\left(3\ln x - 1\right)}{\ln^2 x}$ 24) $y' = \frac{2 - x - x\ln x}{x\left(x+2\right)^2}$

25) $y' = \frac{3x^2e^x - 6xe^x - 2x^2}{x^4}$ 26) $y' = \frac{1 + sen\,x - \cos x - x\left(sen\,x + \cos x\right)}{\left(x - \cos x\right)^2}$ 27) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(2 + \sqrt{x}\right)^2}$

28) $y' = -\frac{1}{x\ln^2 x}$ 29) $y' = -\frac{14x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$ 30) $y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$ 31) $y' = a - \frac{a}{\left(ax + b\right)^2}$

32) $y' = e^x \cos x + x e^x \cos x - x e^x\,sen\,x$ 33) $y' = 2x \cdot \left(e^x - 2\right)\ln x + x^2 \cdot e^x \ln x + x \cdot \left(e^x - 2\right)$

34) $y' = \left(x + sen\,x\right)\left(x + \cos x\right) + x\left(1 + \cos x\right)\left(x + \cos x\right) + x\left(x + sen\,x\right)\left(1 - sen\,x\right)$

35) $y' = -\frac{x+2}{x^3} sen\,x\left(2\cos x + 1\right) + \frac{x+1}{x^2}\cos x\left(2\cos x + 1\right) + \frac{x+1}{x^2} sen\,x\left(1 - 2\,sen\,x\right)$