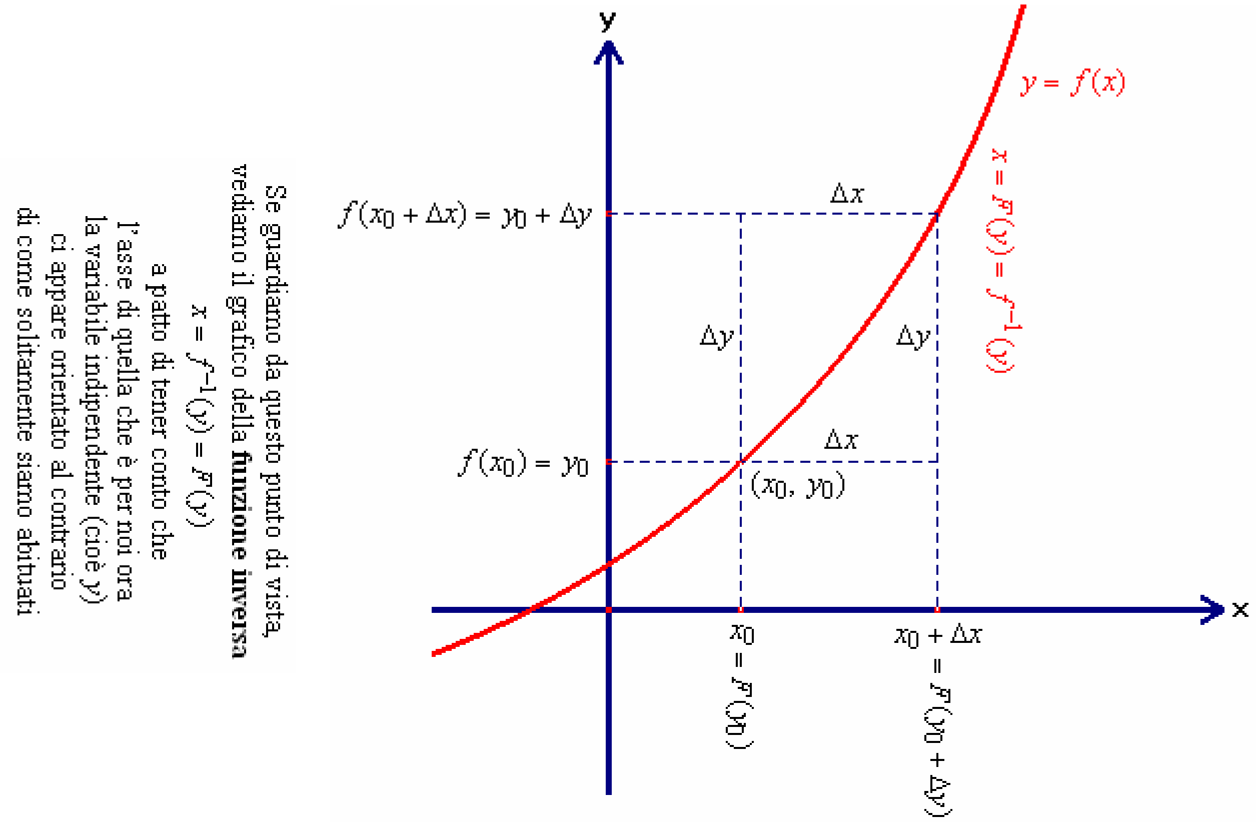
10) LA FORMULA PER LA DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

Sia $y = f(x)$ una funzione (**funzione diretta**),

e sia $x = f^{-1}(y) = F(y)$ la rispettiva **funzione inversa**

(osserviamo che
per il discorso che ci interessa in questo momento, sarebbe controproducente scambiare, nella funzione inversa, i nomi delle variabili come abbiamo invece fatto in altre occasioni!).

Sia (x_0, y_0) un punto del grafico della funzione diretta f : $x_0 \xrightarrow{f} y_0$; $y_0 \xrightarrow{F=f^{-1}} x_0$



Se guardiamo da qui, vediamo la **funzione diretta** $y = f(x)$

$$\textit{rapporto incrementale della } F(= f^{-1}) \textit{ in } y_0 = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\textit{rapporto incrementale della } f \textit{ in } x_0}$$

Supponiamo ora f derivabile in x_0, con $f'(x_0) \neq 0$;
f sarà dunque anche continua in x_0;
di conseguenza, *per un teorema a noi noto*, anche la funzione inversa F sarà continua in $y_0 = f(x_0)$.
Quando perciò faremo tendere Δy a zero, anche Δx tenderà a zero.

Possiamo scrivere: $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)}{\Delta y} \overset{\text{NOTA}}{=} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

ossia $F'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

NOTA. Abbiamo già puntualizzato che quando Δy tende a zero, anche Δx tende a zero.
Δx può essere riguardata come quantità che dipende da Δy (= come funzione di Δy);
quindi possiamo pensare ad una composizione di funzioni,
sulla quale è applicabile il "*Teorema di sostituzione*".

Tutto ciò dimostra

(sostituendo, a questo punto, il simbolo x_0 col simbolo *x* e il simbolo y_0 col simbolo *y*, ma tenendo comunque sempre presente che *x*, *y* devono indicare due valori che "si corrispondono"),
il seguente

Teorema
La derivata di una funzione inversa
è uguale al reciproco della derivata della funzione diretta
(purché quest'ultima derivata esista e non sia nulla).

In simboli:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$F'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

essendo:

- **x un punto fissato;**
- **$F = f^{-1}$ funzione inversa di f ;**
- **$f'(x)$ esistente e non nulla;**
- **y immagine di x attraverso la f ;**
- **x controimmagine di y attraverso la f (o anche: immagine di y attraverso la $F = f^{-1}$)**

E' IMPORTANTISSIMO RICORDARE che
le due derivate che compaiono nella formula si intendono calcolate
in due punti CHE SI CORRISPONDONO!

$$y = f(x) \quad x = F(y) = f^{-1}(y)$$

ESEMPIO

Partiamo dalla funzione $y = f(x) = x^3 + 1$ (*funzione diretta*)

e, ricavando x dall'uguaglianza, otteniamo $x = f^{-1}(y) = F(y) = \sqrt[3]{y-1}$ (*funzione inversa*).

Abbiamo, ad esempio, che per $x = 2$ *la y corrispondente è* $y = f(2) = 8 + 1 = 9$

In questo caso, la formula darà: $F'(9) = \frac{1}{f'(2)}$. Andiamo a controllare se è vero!

Calcoliamo $F'(9)$: $\quad F'(y) = \frac{1}{3}(y-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}} \rightarrow \boxed{F'(9)} = \left[\frac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}}\right]_{y=9} = \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \boxed{\frac{1}{12}}$

Calcoliamo $f'(2)$: $\quad f'(x) = 3x^2 \rightarrow \boxed{f'(2)} = \left[3x^2\right]_{x=2} = \boxed{12}$

OK!!! $F'(9)$ *ed* $f'(2)$ *sono effettivamente numeri fra loro reciproci!*

ESERCIZIO SVOLTO

La funzione $y = 2x^2 + \ln x$ è definita per $x > 0$.
Essendo la somma di due funzioni crescenti, è monotona crescente, quindi invertibile.
La funzione inversa non è esprimibile elementarmente; tuttavia, è richiesto di calcolare
la derivata di detta funzione inversa, in corrispondenza del punto 2.

RISOLUZIONE

La formula da utilizzare è $F'(y) = \frac{1}{f'(x)}$: basta interpretarla correttamente, tenendo presente che

- F ed f sono funzioni inverse l'una dell'altra,
- ed x, y sono due punti che si corrispondono.

Per determinare, come è richiesto, la derivata della funzione inversa F nel punto 2,
dovremo innanzitutto trovare a quale valore di x corrisponde, attraverso la funz. diretta f, il valore $y = 2$.
Insomma, dovremo cercare per quale x si ha $2x^2 + \ln x = 2$;
l'equazione si risolve per tentativi e si trova facilmente $x = 1$.

Allora: $\boxed{F'(2)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\left[4x + \frac{1}{x}\right]_{x=1}} = \boxed{\frac{1}{5}}$

Le derivate delle funzioni goniometriche inverse

Come applicazione importante, siamo ora in grado di calcolare le derivate delle funz. goniometriche inverse $arc\,sen\,x,\quad arc\cos x,\quad arc\,tg\,x$.

Cominciamo dalla prima.
Consideriamo

$y = arc\,sen\,x = f(x)$ come funzione diretta (infatti è QUESTA la funzione che innanzitutto ci interessa ora),
$x = sen\,y = F(y)$ come la rispettiva funzione inversa.

Essendo, per il teorema appena stabilito, $F'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, avremo

$$f'(x) = \frac{1}{F'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(arc\,sen\,x)} \overset{\text{NOTA}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

NOTA $\cos y = \cos(arc\,sen\,x)$.
Ma l'arco il cui seno è x ha come coseno $\sqrt{1-x^2}$
(l'assenza del $\pm$ è dovuta al fatto che la scrittura $arc\,sen\,x$ indica sempre un arco compreso fra $-\pi/2$ e $\pi/2$, quindi con coseno positivo).

Abbiamo dunque dimostrato che è

$$D(arc\,sen\,x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Con procedimenti dimostrativi analoghi si può provare (fallo anche tu come esercizio!) che è

$$D(arc\cos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D(arc\,tg\,x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad D(arc\,cotg\,x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

ESEMPIO **Se è $y = arc\,tg\frac{x^2}{x+1}$, calcolare y'.**

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2} \cdot D\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = \frac{1}{1+\frac{x^4}{x^2+2x+1}} \cdot \frac{2x\cdot(x+1) - x^2\cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{x^4+x^2+2x+1}{x^2+2x+1}} \cdot \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{x^2+2x+1}}{x^4+x^2+2x+1} \cdot \frac{x^2+2x}{\cancel{(x+1)^2}} = \frac{x(x+2)}{x^4+x^2+2x+1}$$

ESERCIZIO SVOLTO **Dalla formula per la derivazione dell'esponenziale: $De^x = e^x$, dedurre quella per la derivazione del logaritmo.**

Prendiamo come funzione diretta $y = e^x \; (= f(x))$. *Invertendo, si ha* $x = \ln y = f^{-1}(y) = F(y)$.

Ora, $F'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$. *Insomma,* $D(\ln y) = \frac{1}{y}$ *come era richiesto di ottenere.*

NOTA.
Si poteva anche assumere il logaritmo come funzione diretta, e l'esponenziale come la rispettiva inversa (in questo modo d'altronde ci eravamo comportati nel corso della dimostrazione del Teorema):
si sarebbe ottenuta la stessa relazione, ma, come è più consueto, con x al posto di y: $D(\ln x) = \frac{1}{x}$.

D'altronde, dire che $D(\ln y) = \frac{1}{y}\ \ \forall y$ equivale in tutto e per tutto ad affermare che $D(\ln x) = \frac{1}{x}\ \ \forall x$.

ESERCIZI

Determina le derivate delle funzioni seguenti: $a)\ y = arc\,tg\,x^2 \qquad b)\ y = (arc\,tg\,x)^2 \qquad c)\ y = arc\,sen(2x-1)$

RISPOSTE: $a)\ y' = \frac{2x}{1+x^4} \qquad b)\ y' = \frac{2x}{1+x^2}arc\,tg\,x \qquad c)\ y' = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$