11) LA FUNZIONE DERIVATA E LE DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE CONCAVITA' E CONVESSITA' DI UNA FUNZIONE

Data una funzione $y = f(x)$, derivabile su di un insieme E,
possiamo pensare alla sua funzione derivata $f'(x)$ come ad una nuova funzione
che, eventualmente, potrà essere a sua volta derivabile, magari soltanto su di un sottoinsieme di E .

La derivata della derivata prima si chiama "derivata seconda" e si indica con uno dei simboli:

$$f''(x),\quad y'',\quad D^2 f(x),\quad D^2 y,\quad \frac{d^2 y}{dx^2}$$ (leggi: derivata seconda di y fatta rispetto a x due volte)

A sua volta, la derivata seconda $f''(x)$, vista come funzione, potrà eventualmente essere derivabile
e in tal caso si parlerà di **derivata terza**; e così di seguito con la **derivata quarta**, la **derivata quinta**, ecc.

ESEMPIO 1: $y = \ln x \quad y' = \frac{1}{x} \quad y'' = -\frac{1}{x^2} \quad y''' = \frac{2}{x^3} \quad y^{IV} = -\frac{6}{x^4} \quad y^{V} = \frac{24}{x^5} \quad \ldots$

per cui avremo, ad es.: $y(1) = 0,\ \ y'(1) = 1,\ \ y''(1) = -1,\ \ y'''(1) = 2,\ \ y^{IV}(1) = -6,\ \ y^{(V)}(1) = 24,\ \ \ldots$

ESEMPIO 2: $f(x) = x^4 - x^3 \quad f'(x) = 4x^3 - 3x^2 \quad f''(x) = 12x^2 - 6x \quad f'''(x) = 24x - 6$

$f^{IV}(x) = 24 \quad f^{V}(x) = 0 \quad f^{VI}(x) = 0 \quad f^{VII}(x) = 0 \quad \ldots$ *insomma,* $f^{(k)}(x) = 0$ *per ogni* $k > 4$

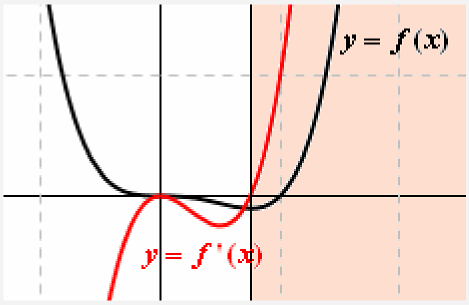
Il polinomio di 4° grado considerato ha tutte le derivate di ordine superiore al 4° uguali a 0.
In generale, preso un qualsivoglia polinomio di grado n, si vede che, ad ogni derivazione, esso si abbassa di un grado, perciò avrà come derivata di n-esimo ordine una costante, e tutte le derivate di ordine maggiore di n nulle.

Nella figura qui a fianco sono rappresentate la nostra funzione $f(x) = x^4 - x^3$ e la sua DERIVATA PRIMA $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$.

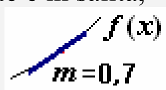
Laddove la derivata prima è positiva (risp.: negativa), la retta tangente al grafico della $f(x)$ è in salita (risp.: discesa) e quindi la $f(x)$ ha un andamento crescente (risp.: decrescente)

♥ ***derivata PRIMA positiva → funzione crescente ↗***
derivata PRIMA negativa → funzione decrescente ↘

Figura:
a destra dell'ascissa $x = 3/4$ la f' diventa positiva …
… e simultaneamente la f diventa crescente ↗.
Invece a sinistra dell'ascissa $x = 3/4$ la f' è negativa …
… e simultaneamente la f è decrescente ↘



$f' > 0$ significa che il coeff. angolare della tangente al grafico della f è >0, quindi che la retta tangente è in salita, quindi che la stessa f è CRESCENTE ↗

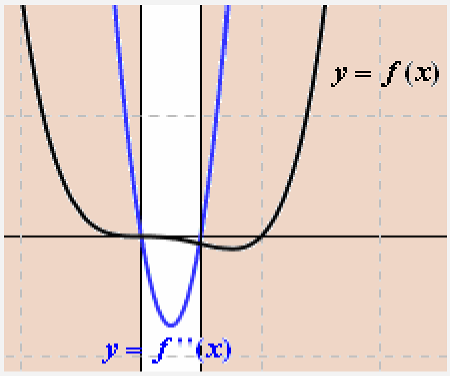


Nella seconda figura sono rappresentate la nostra funzione $f(x) = x^4 - x^3$ e la sua DERIVATA SECONDA $f''(x) = 12x^2 - 6x$.

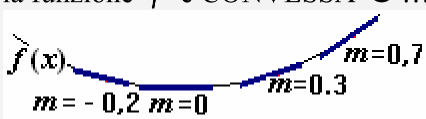
La derivata seconda è la derivata della derivata prima; allora, laddove la derivata seconda è positiva (risp.: negativa), la derivata prima è crescente (risp.: decrescente), e dunque il coefficiente angolare (= inclinazione!) della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ cresce (risp.: decresce), al crescere dell'ascissa … ma ciò comporta che la forma del grafico della $f(x)$ sia convessa ∪ (risp.: concava ∩)

♥ ***derivata SECONDA positiva → funzione convessa ∪***
derivata SECONDA negativa → funzione concava ∩

Figura:
a sinistra dell'ascissa 0, e a destra dell'ascissa $1/2$,
la f'' è positiva … e simultaneamente la f è convessa ∪
Invece fra l'ascissa 0 e l'ascissa $1/2$
la f'' è negativa … e simultaneamente la f è concava ∩



$f'' > 0$ significa f' crescente, quindi significa che spostando l'occhio da sinistra a destra … … il coefficiente angolare cresce, l'inclinazione cresce, la funzione f è CONVESSA ∪ !!!



ESERCIZI

ESEMPIO SVOLTO. Studia la funzione $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, determinandone:

a) il dominio;

b) le intersezioni con gli assi;

c) la "positività", cioè i valori di x per i quali la y corrispondente è positiva (il che permetterà di individuare pure, per esclusione, i valori di x per i quali la y corrispondente è negativa);

d) i limiti ai confini del dominio

e) la derivata prima $f'(x)$ e
i valori di x per i quali questa si annulla (equazione $f'(x) = 0$)
nonché gli intervalli in cui è positiva (disequazione $f'(x) > 0$)

f) la derivata seconda $f''(x)$ e gli intervalli in cui questa è positiva (disequazione $f''(x) > 0$)

Tenendo presente che ***derivata PRIMA positiva → funzione crescente*** ↗
derivata PRIMA negativa → funzione decrescente ↘
derivata SECONDA positiva → funzione convessa $\cup$
derivata SECONDA negativa → funzione concava $\cap$

traccia il grafico della funzione considerata.

SVOLGIMENTO

a) Il dominio è tutto $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$;

b) Intersezione con l'asse *y*: pongo $x = 0$ e ottengo $y = 0$; punto $(0,0)$
Intersezione con l'asse *x*: pongo $y = 0$ e ottengo l'equazione
$x^3 - 2x^2 + x = 0;\ \ x\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0;\ \ x(x-1)^2 = 0;\ \ x = 0 \vee x = 1$; punti $(0,0)$ e $(1,0)$

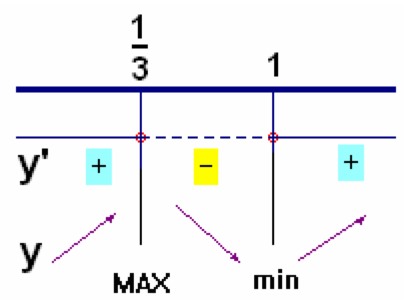
c) Positività: imposto la disequazione $f(x) > 0$
$x^3 - 2x^2 + x > 0;\ \ x\left(x^2 - 2x + 1\right) > 0;\ \ x(x-1)^2 > 0;\ \ x > 0\ ma\ x \neq 1$

d) Limiti ai confini del dominio: $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(x^3 - 2x^2 + x\right) = -\infty,\ \ \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^3 - 2x^2 + x\right) = +\infty$

e) Derivata prima: $y' = 3x^2 - 4x + 1$

Valori di x per i quali la derivata prima si annulla: $3x^2 - 4x^2 + 1 = 0 \quad x = \frac{1}{3} \vee x = 1)$

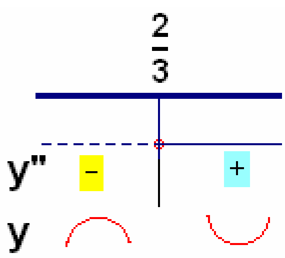
Intervalli in cui la derivata prima è positiva: $3x^2 - 4x^2 + 1 > 0 \quad x < \frac{1}{3} \vee x > 1$



$x = \frac{1}{3} \to y = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$ MAX$\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$

$x = 1 \to y = 0$ min(1, 0)

f) Derivata seconda: $y'' = 6x - 4$
i valori di x per i quali la derivata seconda è positiva: $6x - 4 > 0 \quad x > 2/3$

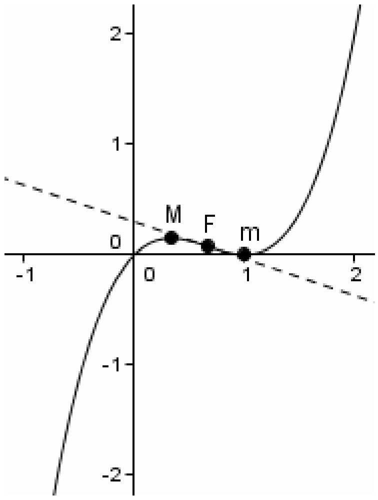


$x = \frac{2}{3} \to y = \frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$ FLEX$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{27}\right)$

Nel punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{27}\right)$ la funzione passa da concava $\cap$ a convessa $\cup$:
di dice che il punto è di "FLESSO". In un punto di flesso il grafico passa da una parte all'altra rispetto alla retta tangente nel punto.
In questo caso la retta tangente nel flesso ha coefficiente angolare

$$y'\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$$

Ed ecco il grafico!



ESERCIZI DA SVOLGERE

Per ciascuna delle seguenti funzioni, determina:

a) il dominio;

b) le intersezioni con gli assi;

c) la "positività"

d) i limiti ai confini del dominio

e) i punti di massimo, minimo e flesso tramite lo studio delle derivate prima e seconda

Controlla infine le tue conclusioni tramite il freeware GeoGebra.

1) $y = x^3 - 6x^2 - 15x - 6$

2) $y = 4x^3 + 6x^2 - 24x$

3) $y = x^4 - 6x^2 - 40$

4) $y = x^2 - \dfrac{16}{x}$

5) $y = xe^x$

6) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ("*seno iperbolico*")

7) $y = \dfrac{x}{e^x} = xe^{-x}$

8) $y = x - \ln x$

9) $y = x^2 - 4\ln x^2$

10) $y = 1 - 2 \, sen\, x \cos x \ \left(su\ [0,\, 2\pi]\right)$

11) $y = e^{-x} sen\, x$

Questi esercizi sono tratti dal libro "public domain"

THE CALCULUS, di Ellery Williams Davis e William Charles Brenke, New York 1924

RISPOSTE

1) *Max con* $x = -1$, *min con* $x = 5$, *flesso con* $x = 2$

2) *Max con* $x = -11/6$, *min con* $x = 5/6$, *flesso con* $x = -1/2$

3) *Max con* $x = 0$, *min con* $x = \pm\sqrt{3}$, *flessi con* $x = \pm 1$

4) *nessun massimo, min con* $x = -2$, *flesso con* $x = 2\sqrt[3]{2}$

5) *nessun massimo, min con* $x = -1$, *flesso con* $x = -2$

6) *nessun massimo, nessun minimo, flesso con* $x = 0$

7) *Max con* $x = 1$, *nessun minimo, flesso con* $x = 2$

8) *nessun massimo, min con* $x = 1$, *nessun flesso*

9) *nessun massimo, min con* $x = \pm 2$, *nessun flesso*

10) *Max con* $x = \dfrac{3}{4}\pi,\ x = \dfrac{7}{4}\pi$, *min con* $x = \dfrac{\pi}{4},\ x = \dfrac{5}{4}\pi$, *flessi con* $x = \dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{3}{2}\pi$

11) *Max con* $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, *min con* $x = \dfrac{5}{4}\pi + 2k\pi$, *flessi con* $x = k\pi$