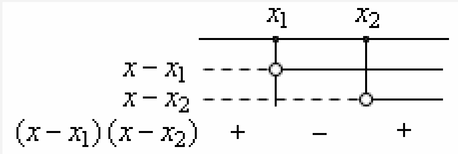
ANCORA SULLO STUDIO DEL SEGNO DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO

Abbiamo detto che il grafico di una funzione di 2° grado $y = ax^2 + bx + c$
è una curva che va "prima giù e poi su" oppure "prima su e poi giù", detta "parabola".
E' evidente che il discorso è generico: richiederebbe una impostazione più rigorosa,
e corredata da dimostrazioni di quanto affermato. Ciò è compito della "Geometria Analitica".

Ci limitiamo qui ad affermare che, **volendo, le regole per lo studio del segno di un trinomio di 2° grado potrebbero anche essere ricavate senza interpretazione grafica, ossia per pura via algebrica**.

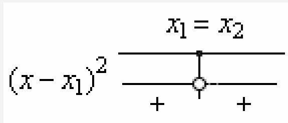
Sia infatti $ax^2 + bx + c$ un trinomio di 2° grado. Sappiamo che

1) se $\Delta > 0$, il trinomio è scomponibile in $a(x - x_1)(x - x_2)$, con x_1, x_2 soluzioni dell'equazione associata.
Ma in questo caso allora, dato che il fattore $x - x_1$
è $>, =, < 0$ a seconda che sia $x > x_1, x = x_1, x < x_1$,
e analogamente per il fattore $x - x_2$,
il prodotto $(x - x_1)(x - x_2)$
avrà, a seconda dei vari valori di x,
il segno che risulta dallo schema riportato qui a destra →
ed essendo dunque $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
se ne trae che il trinomio avrà
"**segno concorde con quello del suo primo coefficiente *a* per valori esterni, discorde per valori interni**"



tratteggio = negatività,
linea continua = positività

2) se $\Delta = 0$, il trinomio è scomponibile in $a(x - x_1)^2$, con $x_1\ (= x_2)$ unica soluzione dell'equaz. associata.
Poiché ora un quadrato è sempre > 0,
con la sola eccezione di essere $= 0$ se ne è $= 0$ la base,
se ne trae che **il trinomio avrà *sempre* segno concorde con quello del suo primo coefficiente *a* , *con una sola eccezione*:**
il trinomio infatti si annullerà per $x = x_1$, essendo $x_1\ (= x_2)$
l'unica soluzione che in questo caso possiede l'equazione associata.



linea continua = positività,
pallino = annullamento

3) se, infine, $\Delta < 0$, l'equazione associata è impossibile in campo reale,
e **il trinomio non è scomponibile in campo reale**;
in questo caso però possiamo scrivere

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} \underbrace{- \frac{\Delta}{4a^2}}_{>0}\right]$$

Siccome è $\Delta < 0$, il contenuto della parentesi quadra sarà strettamente positivo (>0)
perché somma di un termine non negativo (il quadrato) con un termine >0
$\left(-\frac{\Delta}{4a^2},\ \text{che è} > 0 \text{ perché è l'opposto del quoziente fra } \Delta < 0 \text{ e } 4a^2 > 0\right)$.
Ma il prodotto del coefficiente *a* per un numero strettamente positivo qualunque sia *x*,
ha sempre, per qualsiasi valore di *x*, lo stesso segno di *a*.

10. DISEQUAZIONI IN CUI COMPAIONO POTENZE

I) UNA POTENZA CON ESPONENTE PARI, CONFRONTATA CON LO ZERO

a) $(x-7)^4 > 0$ b) $(x-7)^4 < 0$ c) $(x-7)^4 \geq 0$ d) $(x-7)^4 \leq 0$

Per risolvere queste disequazioni basta ragionare così:

una quarta potenza (più in generale: UNA POTENZA CON ESPONENTE PARI)
NON PUO' MAI ESSERE NEGATIVA.
Essa è:
- **POSITIVA quando la BASE è DIVERSA DA 0;**
- **NULLA quando la BASE è UGUALE A 0.**

Perciò:

a) $(x-7)^4>0$ è verificata quando $x-7\neq 0$, ossia $x\neq 7$. Insieme delle soluzioni $= S=\mathbb{R}-\{7\}$

b) $(x-7)^4<0$ non è mai verificata, è **impossibile**: $S=\varnothing$

c) $(x-7)^4\geq 0$ è **sempre verificata**, per ogni *x*: $S=\mathbb{R}$

d) $(x-7)^4\leq 0$ è **verificata solo per *x* = 7**. $S=\{7\}$

E' chiaro che allo stesso modo avremmo potuto procedere
se al posto dell'esponente 4 ci fosse stato un qualunque esponente PARI.

ESERCIZI

1) $(2x-1)^6<0$ 2) $(3x-8)^8>0$ 3) $(x^2-3)^4>0$ 4) $(6x^2-18x+5)^2\geq 0$

5) $(4-x)^6\leq 0$ 6) $x^{10}>0$ 7) $(3x^2-2x-1)^2>0$ 8) $(3-7x)^4<0$ 9) $(3-7x)^4\leq 0$

SOLUZIONI

1) imposs. 2) $x\neq 8/3$ 3) $x\neq \pm\sqrt{3}$ 4) $\forall x\in\mathbb{R}$

5) $x=4$ 6) $x\neq 0$ 7) $x\neq -\frac{1}{3}\wedge x\neq 1$ 8) imposs. 9) $x=\frac{3}{7}$

II) UNA POTENZA CON ESPONENTE DISPARI, CONFRONTATA CON LO ZERO

e) $(x-7)^5>0$ f) $(x-7)^5<0$ g) $(x-7)^5\geq 0$ h) $(x-7)^5\leq 0$

Per risolvere queste disequazioni basta osservare che

una quinta potenza
(più in generale: UNA POTENZA CON ESPONENTE DISPARI)
HA SEMPRE LO STESSO SEGNO DELLA SUA BASE, ossia è:

- **positiva quando la base è positiva;**
- **negativa quando la base è negativa;**
- **nulla quando la base è nulla.**

Perciò:

e) $(x-7)^5>0$ è verificata quando $x-7>0$, ossia $x>7$. Insieme delle soluzioni: $S=(7,+\infty)$

f) $(x-7)^5<0$ è verificata quando $x-7<0$, ossia $x<7$. $S=(-\infty,7)$

g) $(x-7)^5\geq 0$ è verificata quando $x-7\geq 0$, ossia $x\geq 7$. $S=[7,+\infty)$

h) $(x-7)^5\leq 0$ è verificata quando $x-7\leq 0$, ossia $x\leq 7$. $S=(-\infty,7]$

E allo stesso modo, ovviamente, si sarebbe potuto ragionare
se al posto dell'esponente 5 avessimo trovato un qualsiasi altro esponente DISPARI.

ESERCIZI

10) $(3x-2)^5>0$ 11) $(4-x)^5\geq 0$ 12) $(x^2-3)^5>0$ 13) $x^7<0$

14) $(3x^2-2x-1)^3<0$ 15) $(x+7)^5\geq 0$ 16) $(x^2+7)^5>0$ 17) $(3x^2-2x-1)^4\geq 0$

18) $(x^2+2x\sqrt{6}+6)^3>0$ 19) $(4x^2-1)^3>0$ 20) $(9x^2-6x+1)^3<0$ 21) $\left[(7x+5)^4+1\right]^3>0$

SOLUZIONI

10) $x>2/3$ 11) $x\leq 4$ 12) $x<-\sqrt{3}\vee x>\sqrt{3}$ 13) $x<0$ 14) $-1/3<x<1$ 15) $x\geq -7$

16) $\forall x\in\mathbb{R}$ 17) $\forall x\in\mathbb{R}$ 18) $x\neq -\sqrt{6}$ 19) $x<-\frac{1}{2}\vee x>\frac{1}{2}$ 20) imposs. 21) $\forall x\in\mathbb{R}$

III) DISEQUAZIONI RISOLUBILI ESTRAENDO UNA RADICE CON INDICE PARI

**L'elevamento ad esponente PARI dei due membri di una disuguaglianza,
o l'estrazione di radice con indice PARI dei due membri di una disuguaglianza,
sono leciti SOLTANTO QUANDO I DUE MEMBRI SONO NUMERI POSITIVI O NULLI.**

Infatti, indicato con 2n un intero PARI, e con a, b due numeri reali POSITIVI O NULLI, si ha:

$$a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}; \qquad a < b \Leftrightarrow \sqrt[2n]{a} < \sqrt[2n]{b}$$

Invece, se due numeri che *non* sono entrambi positivi sono disuguali, *non* è detto che i loro quadrati (ad esempio) siano disuguali nello stesso senso: potrebbero esserlo, o non esserlo.

$$-2 < 3 \;\; e \;\; 4 < 9$$
$$-5 < 3 \;\; \text{MA} \;\; \cancel{25 < 9}$$
$$-8 < -5 \;\; \text{MA} \;\; \cancel{64 < 25}$$

Nel risolvere una disequazione mediante estrazione di radice con indice pari, ci vuole cautela!!!

- ♪ Innanzitutto, ribadiamolo ancora, **il passaggio è possibile solo quando i due membri sono positivi (in senso lato: ≥ 0) sempre, ossia per ogni valore di x;**
- ♫ inoltre, **è indispensabile ricordare** (Volume 2, Radicali) **che l'estrazione di radice con indice pari costringe, spesso, a introdurre un simbolo di valore assoluto**:
  ad esempio, l'uguaglianza che vale qualunque sia il segno di x NON è $\sqrt{x^2} = x$, bensì $\sqrt{x^2} = |x|$!!!

Esempio 1 $\boxed{x^4 > 625}$

Possiamo estrarre le radici quarte perché i due membri sono sempre ≥ 0, $\forall x$:

$\sqrt[4]{x^4} > \sqrt[4]{625}$

OCCHIO ADESSO! Deve per forza intervenire il simbolo di valore assoluto, e si ottiene

$|x| > 5$

Ma quali sono i numeri reali il cui valore assoluto è maggiore di 5?
Il valore assoluto di un numero non è altro che la distanza dall'origine del punto che, sulla *number line*, rappresenta quel numero!
E allora

$|x| > 5 \Leftrightarrow \boxed{x < -5 \vee x > 5}$ (i numeri, la cui distanza dall'origine sulla *number line* è >5, sono quelli a destra del +5 ma anche quelli a sinistra del -5)

Es. 2 $\boxed{(5x-3)^4 < 16}$

$\sqrt[4]{(5x-3)^4} < \sqrt[4]{16}$

$|5x-3| < 2$

$-2 < 5x - 3 < 2$

(i numeri il cui val. ass. è <2 sono quelli la cui "distanza dall'origine" è <2, ossia quelli compresi fra –2 e +2).

Aggiungendo ora 3 ad ogni anello della catena si ha

$1 < 5x < 5$

e dividendo infine per 5

$\boxed{\frac{1}{5} < x < 1}$

Es. 3 $\boxed{(x-7)^6 > 64}$

$\sqrt[6]{(x-7)^6} > \sqrt[6]{64}$

$|x-7| > 2$

$x-7 < -2 \;\vee\; x-7 > 2$

$\boxed{x < 5 \;\vee\; x > 9}$

Es. 4 $\boxed{(x^2-10x)^2 < 576}$

$\sqrt{(x^2-10x)^2} < \sqrt{576}$

$|x^2-10x| < 24$

$-24 < x^2 - 10x < 24$

Qui però *non* si può isolare x operando direttamente sulla catena.
La doppia limitazione equivale a domandarsi per quali valori di x sono verificate *simultaneamente entrambe* le condizioni

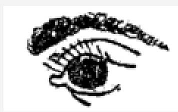
$-24 < x^2 - 10x$ (*o anche* $x^2 - 10x > -24$) e $x^2 - 10x < 24$

quindi a risolvere il SISTEMA $\begin{cases} x^2 - 10x > -24 \\ x^2 - 10x < 24 \end{cases}$.

La 1ª disequaz. è verificata per $x < 4 \vee x > 6$, la 2ª per $-2 < x < 12$, quindi il sistema ha per soluzioni i valori $\boxed{-2 < x < 4 \vee 6 < x < 12}$; comunque, dell'argomento si occuperà un capitolo successivo.

Es. 5 $\boxed{x^4 > -16}$

OCCHIO!!!



Qui 2° membro è negativo, perciò NON si possono estrarre le radici quarte.

Siamo *bloccati*, dobbiamo procedere diversamente.
Ma basta osservare che il risultato dell'operazione x^4 è sempre (qualunque sia x) positivo (≥ 0), per concludere che la disequazione proposta è $\boxed{\text{sempre verificata, } \forall x \in \mathbb{R}}$.

IV) DISEQUAZIONI RISOLUBILI ESTRAENDO UNA RADICE CON INDICE DISPARI

L'elevamento ad esponente DISPARI, o l'estrazione di radice con indice DISPARI, è un passaggio SEMPRE LECITO in una disequazione:

infatti, qualunque siano i segni dei due numeri reali a, b, valgono le doppie implicazioni

$$a<b \Leftrightarrow a^{2n+1}<b^{2n+1} \qquad a<b \Leftrightarrow \sqrt[2n+1]{a}<\sqrt[2n+1]{b}$$

Esempio 1

$x^3<8$
$\sqrt[3]{x^3}<\sqrt[3]{8}$
$x<2$

Esempio 2

$x^5-3>0$
$x^5>3$
$x>\sqrt[5]{3}$

Esempio 3

$(x-7)^3-27\le 0$
$(x-7)^3\le 27$
$x-7\le 3$
$x\le 10$

Esempio 4

$(x-1)^3<-2$
$x-1<\sqrt[3]{-2}$
$x-1<-\sqrt[3]{2}$
$x<1-\sqrt[3]{2}$

Esempio 5

$(x^2-x-1)^3>1$
$x^2-x-1>1$
$x^2-x-2>0$
$(x+1)(x-2)>0$
$x<-1 \vee x>2$

ESERCIZI (se c'è la freccia, cliccando potrai vedere la correzione)

22) $x^4>16$ 23) $x^3>8$ 24) $625x^4-1<0$ 25) $625x^4+1>0$
26) $8x^3-1<0$ 27) $8x^3+1<0$ 28) $25x^4-49\ge 0$ 29) $x^6-1<0$
30) $x^6-4<0$ 31) $x^6+4<0$ 32) $x^8+3>0$ 33) $x^8-3>0$
34) $(x-1)^3<8$ 35) $(x-1)^4<16$ 36) $(2x+1)^4-1>0$ 37) $(6x+1)^3+8>0$
38) $x^6+1\ge 0$ 39) $8x^3+3\ge 0$ 40) $8x^4+3\ge 0$ 41) $x^3+16\le 0$ 42) $x^4+16\le 0$
43) $(x-1)^2+(x-2)^2>0$ ⇨ 44) $(x-1)^3+(x-2)^3>0$ ⇨ 45) $(x+1)^2+(x^2-1)^2\le 0$ ⇨
46) $(2x-1)^4<0$ 47) $(2x-1)^4>0$ 48) $(2x-1)^3<0$ 49) $(2x-1)^3>0$
50) $(2x-1)^4<1$ 51) $(2x-1)^4>1$ 52) $(2x-1)^3<1$ 53) $(2x-1)^3>1$
54) $(4x+1)^4<3$ ⇨ 55) $(1-x)^6<64$ ⇨ 56) $(4x-3)^4>81$ ⇨

SOLUZIONI

22) $x<-2 \vee x>2$ 23) $x>2$ 24) $-1/5<x<1/5$ 25) $\forall x\in\mathbb{R}$
26) $x<\frac{1}{2}$ 27) $x<-\frac{1}{2}$ 28) $x\le-\sqrt{\frac{7}{5}} \vee x\ge\sqrt{\frac{7}{5}}$ 29) $-1<x<1$
30) $-\sqrt[3]{2}<x<\sqrt[3]{2}$ 31) imposs. 32) $\forall x\in\mathbb{R}$ 33) $x<-\sqrt[8]{3} \vee x>\sqrt[8]{3}$
34) $x<3$ 35) $-1<x<3$ 36) $x<-1 \vee x>0$ 37) $x>-1/2$
38) $\forall x\in\mathbb{R}$ 39) $x\ge-\sqrt[3]{3}/2$ 40) $\forall x\in\mathbb{R}$ 41) $x\le-2\sqrt[3]{2}$ 42) imposs.
43) $\forall x\in\mathbb{R}$ 44) $x>3/2$ 45) $x=-1$
46) imposs. 47) $x\ne 1/2$ 48) $x<1/2$ 49) $x>1/2$
50) $0<x<1$ 51) $x<0 \vee x>1$ 52) $x<1$ 53) $x>1$
54) $-\frac{\sqrt[4]{3}+1}{4}<x<\frac{\sqrt[4]{3}-1}{4}$ 55) $-1<x<3$ 56) $x<0 \vee x>3/2$

CENNI ALLE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Sono quelle che **contengono l'incognita sotto il segno di radice**.
Ci si libera dalle radici elevando a potenza; e tuttavia,
mentre l'elevamento a esponente dispari è un'operazione "tranquillissima",
perché sempre lecita e sempre tale da mutare la disequazione di partenza in un'altra ad essa equivalente,
invece **l'elevamento ad esponente pari**, necessario ad esempio per sbarazzarsi da una radice quadrata,
è un passaggio estremamente problematico, possibile solo a condizione che i due membri siano positivi per tutti i valori di *x*, o almeno "per tutti i valori di *x* ai quali ci si sta riferendo".

Tutto ciò costringe ad elaborare una teoria non semplicissima,
che fa parte di uno studio più avanzato.