

11. LA RISOLUZIONE GRAFICA DI UNA DISEQUAZIONE

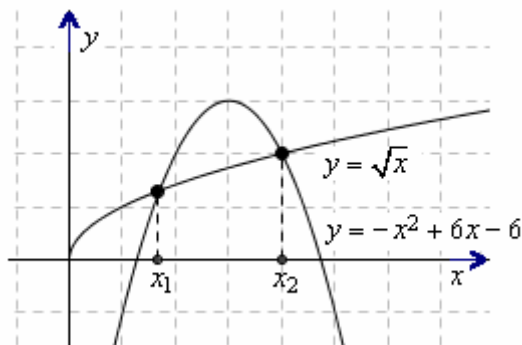
- Per risolvere graficamente una disequazione come

$$-x^2 + 6x - 6 > \sqrt{x}$$

si tracciano innanzitutto, in uno stesso riferimento cartesiano, i grafici delle due funzioni a 1° e a 2° membro

$$y = -x^2 + 6x - 6;$$

$$y = \sqrt{x}$$

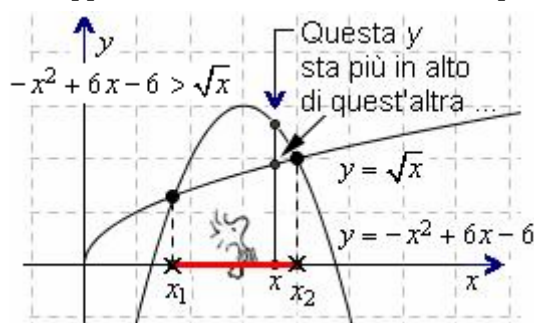


A questo punto, la disequazione ci “chiede” di determinare per quali valori di x la y della prima funzione è maggiore, quindi sta più in alto, della y della seconda.

Viaggiamo quindi, con gli occhi della mente, lungo l'asse delle x : quali sono i valori di x in corrispondenza dei quali

la “ y ” della funzione a 1° membro $y = -x^2 + 6x - 6$ sta più in alto?

Sono, evidentemente, gli x compresi fra quei due puntini, sull'asse orizzontale, che rappresentano le ascisse x_1 e x_2 dei punti di intersezione fra le due curve.



La x evidenziata, vicino alle zampette dell'uccello Woodstock, vale circa 3,6.

La y che corrisponde a questa x sulla curva $y = -x^2 + 6x - 6$ vale circa 2,7 ed è maggiore dell'altra y , quella sulla curva $y = \sqrt{x}$, che vale meno di 2.

Possiamo così concludere che le soluzioni della disequazione data sono i valori di x tali che $x_1 < x < x_2$ (le crocette che abbiamo messo in figura servono proprio per escludere gli estremi).

Ora, per quanto riguarda x_2 sembrerebbe dalla figura che valga esattamente 4, e in effetti, se sostituiamo il valore 4 al posto di x nelle due equazioni $y = -x^2 + 6x - 6$ e $y = \sqrt{x}$, vediamo che si ottiene la stessa y :

$$\left[y = -x^2 + 6x - 6 \right]_{x=4} = -16 + 24 - 6 = 2 \quad \text{e anche} \quad \left[\sqrt{x} \right]_{x=4} = 2.$$

Per determinare x_1 occorre invece risolvere l'equazione

$$-x^2 + 6x - 6 = \sqrt{x}.$$

Elevando al quadrato, si ottiene un'equazione di 4° grado di cui già sappiamo che è verificata con $x = 4$;

caso vuole, si tratta di un'equazione risolvibile per scomposizione in fattori col metodo di Ruffini ... e tuttavia, indipendentemente da questa circostanza, potremmo anche fermarci qui accontentandoci di concludere che la nostra disequazione

$$-x^2 + 6x - 6 > \sqrt{x}$$

è verificata per

$$x_1 < x < 4,$$

dove x_1 è un determinato valore compreso fra 1,5 e 2.

□ Un altro esempio.

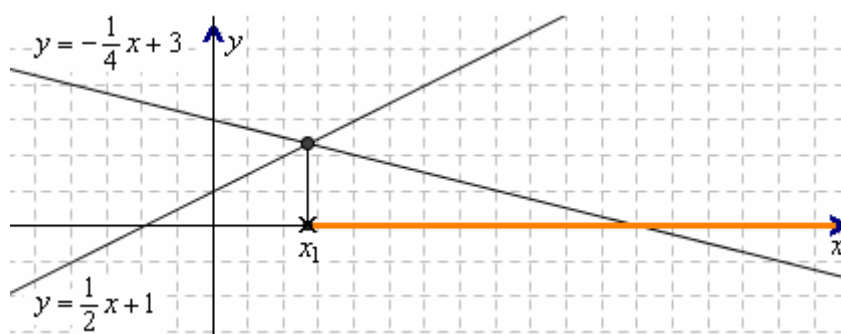
Volendo risolvere graficamente la disequazione

$$-\frac{1}{4}x + 3 < \frac{1}{2}x + 1,$$

disegneremo i grafici delle due funzioni lineari

$$y = -\frac{1}{4}x + 3 \text{ (retta in discesa)}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \text{ (retta in salita)}$$



per andare a vedere per quali valori di x accade che l'ordinata corrispondente sulla prima retta è minore, è più bassa, dell'ordinata corrispondente sulla seconda retta.

Ciò avviene per $x > x_1$, ma quanto vale x_1 ?

Dalla figura si può solo vedere che è compresa fra 2 e 3 (più vicina a 3 che a 2 ...)

Per rispondere, risolviamo l'equazione $-\frac{1}{4}x + 3 = \frac{1}{2}x + 1$. Otterremo $x = \frac{8}{3} = 2,6$.

Quindi in definitiva la nostra disequazione è verificata con $x > 8/3$.

□ La figura qui a fianco si riferisce alla disequazione

$$\frac{3}{x} \geq x^2 + 4x$$

e mostra che essa è verificata quando

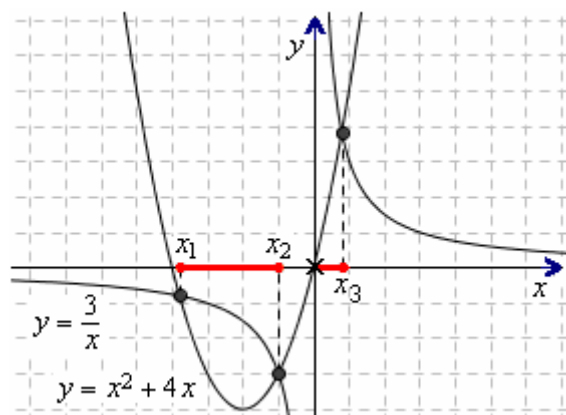
$$x_1 \leq x \leq x_2 \vee 0 < x \leq x_3$$

dove

$$x_2 = -1$$

come il disegno suggerisce e come si può verificare:

$$\left[\frac{3}{x}\right]_{x=-1} = -3 \quad [x^2 + 4x]_{x=-1} = -3$$



Quanto alle altre due soluzioni x_1, x_3

dell' "equazione associata" $\frac{3}{x} = x^2 + 4x$,

si possono facilmente determinare scomponendo col metodo di Ruffini

il polinomio di 3° grado che si ottiene dopo aver eliminato il denominatore.

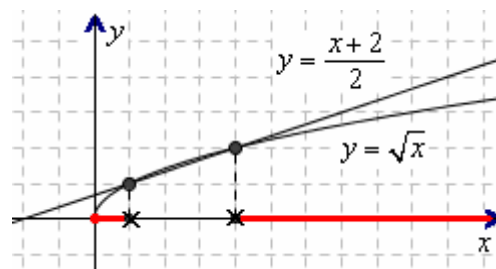
In definitiva si ha $\frac{-3-\sqrt{21}}{2} \leq x \leq -1 \vee 0 < x \leq \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$

□ A volte quando si risolve graficamente una disequazione occorre anche tenere conto del "**campo di esistenza**" delle funzioni coinvolte.

Facciamo un esempio:

$$\text{la disequazione } \sqrt{x} < \frac{x+2}{2}$$

è verificata per $0 \leq x < 1 \vee x > 4$



ESERCIZI

Risolvi graficamente le disequazioni che seguono.

1) $7 - x < 3x$ 2) $3 - 2x > 0$ 3) $x^2 < x + 6$ 4) $\frac{4}{x} > 1 - x$ 5) $3x + 1 \leq 2x + 5$ 6) $3x - 1 < 5x$

7) $x^2 + x > 12$ 8) $0,5x^2 + 1 < 6/x$ 9) $x^3 \leq 2 - x$ 10) $\sqrt{x} < 4 - 3x$ 11) $x^3 > x^2 - 1$ 12) $\sqrt[3]{x} > x^2 - 2$

RISPOSTE

1) $x > \frac{7}{4}$ 2) $x < \frac{3}{2}$ 3) $-2 < x < 3$ 4) $x > 0$ 5) $x \leq 4$ 6) $x > -\frac{1}{2}$ 7) $x < -4 \vee x > 3$

8) $0 < x < 2$ 9) $x \leq 1$ 10) $0 \leq x < 1$ 11) $x > x_1$, con $-1 < x_1 < -0,5$ 12) $-1 < x < x_2$, con $1,5 < x_2 < 2$