

12. PROBLEMI CHE HANNO COME MODELLO UNA O PIU' DISEQUAZIONI

- A) I minibus che il Comune ha predisposto per trasportare la gente ad una festa campestre, cui si è deciso di vietare l'accesso in automobile, possono trasportare ciascuno al massimo 24 passeggeri. E si sono prenotate 440 persone. Quanti servizi devono effettuare al minimo?

Il problema è SEMPLICISSIMO e potremmo pure fare a meno di disequazioni.

Comunque, detto x il numero minimo di viaggi che è richiesto di determinare, potremo scrivere $24x \geq 440$ da cui $x \geq 18,3...$ e la risposta è dunque: "minimo 19 viaggi".

- B) Il prodotto di due multipli di 72 consecutivi non raggiunge 200000. Quanto possono valere, al massimo, quei due numeri?

Facile anche questo! Potremmo benissimo procedere per tentativi ...

... Tuttavia, come possiamo indicare due multipli di 72 consecutivi?

Con x e $x+72$, ad esempio, intendendo che x sia multiplo di 72;

oppure con $72n$ e $72(n+1)$, dove n è un intero positivo.

Con la prima scelta (x e $x+72$), avremo

$x(x+72) < 200000$; $x^2 + 72x - 200000 < 0$ da cui $-484,7 < x < 412,7$ (valori approssimati).

x sarà perciò il multiplo di 72 più vicino, per difetto, a 412,7.

Possiamo determinarlo andando a vedere quante volte il 72 sta nel 412,7.

La divisione $412,7:72$ dà circa 5,7 quindi ci sta 5 volte e il multiplo cercato è $72 \cdot 5 = 360$.

I due numeri in questione sono dunque 360 e 432.

ESERCIZI (risposte a pagina 21)

- L'attempato Riccardo ha fatto oggi il suo solito allenamento, alla velocità costante di 250 m al minuto, senza però riuscire, per via dei crampi, a coprire i 12 km che si era proposto come distanza minima. Per quanti minuti può, al massimo, aver corso? Scrivi e risolvi la disequazione che risponde a questa domanda.
- La signora Tiziana ha 3 figlioli gemelli ai quali concede come paghetta mensile una somma, data da un numero intero di euro per ciascuno, e che non deve superare 100 € per tutti e 3. Se questa settimana si è deciso in famiglia che uno dei fratelli debba ricevere 5 € in meno di un altro, e questi a sua volta 5 euro in meno del terzo, per via della diversa collaborazione nei lavori domestici, stabilisci attraverso una disequazione quanti euro potrà al massimo ricevere il più bravo.
- Giuliana e Gaia sono bravissime a confezionare piccole crostate, che vendono con successo ai compagni di scuola, durante l'intervallo, al prezzo di 3 euro e 50 centesimi l'una. Questo mese hanno deciso di donare il 75% delle loro entrate in beneficenza, e desidererebbero destinare a tale scopo non meno di 100 euro. Scrivi e risolvi la disequazione che porta a stabilire il numero minimo di crostatine da vendere per realizzare il lodevole proposito.
- Se uno studente ha totalizzato 76 punti su 100 alla prima prova, 81 alla seconda, 75 alla terza, e 74 alla quarta, quale punteggio dovrebbe far registrare, al minimo, alla quinta e ultima prova perché la sua media complessiva non sia inferiore a 80?
- Un pugile ha vinto 30 fra le 40 sfide finora disputate. Nel prossimo anno sono previsti 8 altri match, dopodiché il boxeur intende ritirarsi: tuttavia, desidererebbe aver concluso vittoriosamente almeno l'80% degli incontri. A tale scopo, quanti fra gli 8 combattimenti dovrebbe vincere, al minimo?
- Due ciclisti partono nello stesso istante a distanza di 2 km l'uno dall'altro, venendosi incontro; a un certo punto, si incrociano e si saluteranno, proseguendo a pedalare. La bici di Anselmo procede alla velocità costante di 18 km all'ora, quella di Beniamino ai 14 km/h. Quanto tempo deve passare, al minimo, perché la loro distanza sia maggiore di 2 km? Scrivi la disequazione che permette di rispondere.
[Immagina una *number line* ... Anselmo parte dall'origine e Beniamino dal punto di ascissa 2 ...]
- Determina tutte le terne di multipli di 4 consecutivi, la cui somma sia inferiore a 1000.
- Da www.sinclair.edu
You rent a car and are offered 2 payment options.
 - You can pay \$25 a day plus 15 cents a mile (option A)
 - or you can pay \$10 a day plus 40 cents a mile (option B).
 For what amount of daily miles will option A be the cheaper plan?





Moglie e marito stanno partendo per le ferie, verso una località di mare piuttosto lontana. Va detto che la moglie è molto prudente e timorosa, per cui vuole mantenere la velocità costante di 80 km/h, mentre il marito, più esperto e sicuro, è abituato a viaggiare ai 100 km/h. Poiché non intendono, per la prima giornata, restare al volante complessivamente più di 8 ore, ma in compenso desiderano percorrere non meno di 700 km, traccia un diagramma che mostri il numero di ore x e il numero di ore y che ciascuno dei due potrà, teoricamente, passare alla guida. Per quante ore dovrà guidare, al minimo, il marito?

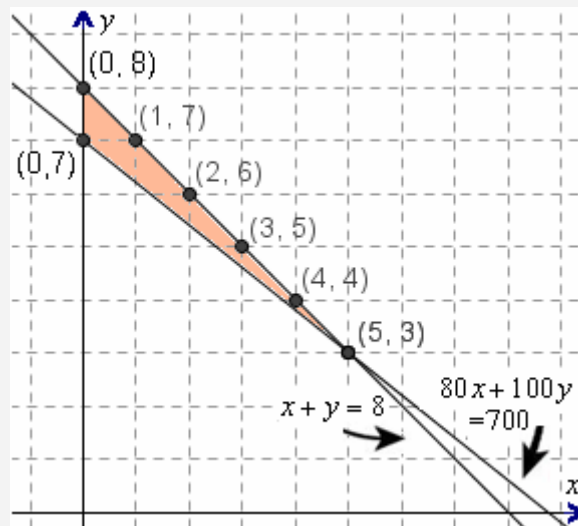
Innanzitutto si ha $x + y \leq 8$, $80x + 100y \geq 700$

Ora, la condizione $x + y \leq 8$ equivale a $y \leq 8 - x$ ed è verificata dalle coordinate (x, y) di quei punti che si trovano AL DI SOTTO della retta di equazione $y = 8 - x$.

Allo stesso modo, la condizione $80x + 100y \geq 700$ è verificata dalle coppie (x, y) che sono coordinate di punti situati AL DI SOPRA della retta $80x + 100y = 700$ ($y = 7 - 0,8x$).

In figura è ombreggiata la regione di piano nella quale sono verificate simultaneamente ENTRAMBE le condizioni in gioco.

Le soluzioni del problema sono le coordinate dei punti che appartengono a quella regione: abbiamo evidenziato solo quelli a coordinate intere.



La signora potrà, ad esempio, guidare 0 ore e il marito 7 ore, oppure anche 8; o in alternativa 1 ora la signora e 7 il marito, ecc. ecc., comprese le soluzioni non intere: in tutti questi casi saranno verificate entrambe le condizioni richieste, ossia:

a) tempo di guida complessivo non superiore a 8 h b) distanza percorsa non inferiore a 700 km

Tieni dunque presente che sul piano cartesiano l'insieme delle coppie (x, y) , che sono soluzione di una DISEQUAZIONE DI 1° GRADO IN DUE INCOGNITE, costituisce un SEMIPIANO (ovviamente, nell'esempio, dall'intersezione dei due semipiani abbiamo comunque tolto le coppie con $x < 0$, che non interessavano dato il contesto).

Dal diagramma si vede anche che il marito dovrà guidare al minimo per 3 ore, mentre la moglie potrebbe anche, volendo, fare 0 ore di guida, lasciando il volante a suo marito per un numero di ore da 7 fino a 8.

CHE COS'È LA “RICERCA OPERATIVA”

In Matematica, si dice “ricerca operativa” (*operational research*), o anche “teoria delle decisioni”, un insieme di strumenti che possono servire ad ottimizzare scelte gestionali, magari per massimizzare oppure minimizzare una “funzione obiettivo”, come ad esempio un guadagno o un costo.

Essa insegna ad elaborare un “modello matematico” di un dato problema, e a partire da questo a ricercare la soluzione ottima o, quando ciò non sia possibile, “subottima”, per il problema medesimo.

I quesiti di cui ci stiamo occupando possono rappresentarne dei semplicissimi esempi introduttivi.

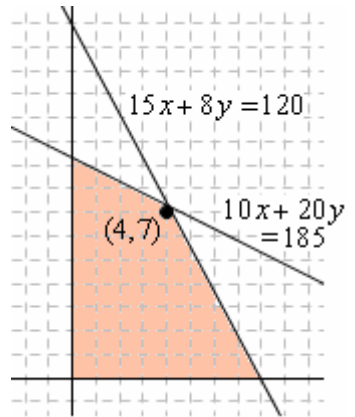
- 9) Nadia l'estate scorsa è stata in villeggiatura a Rimini, dove ha fatto amicizia con un pasticciere che le ha confidato il segreto di due ricette veramente fantastiche per preparare bomboloni e croissant. Le è stato raccomandato di dosare gli ingredienti alla perfezione, altrimenti il rischio di fallire è alto. In particolare, un singolo bombolone richiede 15 grammi esatti di zucchero e 10 grammi di burro, mentre per un croissant ci vogliono precisamente 8 grammi di zucchero più 20 di burro. Un bel giorno la nostra Nadia, mentre si trova nella baita di famiglia in montagna, riceve una telefonata che le annuncia la visita, la mattina dopo, di un gruppetto di amici escursionisti. Messa giù la cornetta, si precipita subito tutta contenta in cucina per preparare le sue prelibatezze ... ma si rende conto che le sono rimasti solo 120 grammi di zucchero e 185 di burro, mentre è del tutto evidente l'impossibilità di fare acquisti in paese in tempo utile. La aiuteresti, con l'impiego di un diagramma cartesiano, a determinare qual è il numero massimo di dolci che potrà offrire ai suoi ospiti?

- 10) Con un liquido X, contenente il 20% di alcool, e un altro liquido Y, che contiene il 30% di alcool, si vuole fare una miscela che:
- contenga almeno il 22% di alcool;
 - ci stia in un bottiglione da 8 litri.
- Disegna un grafico dal quale risulti come si possono scegliere x e y in modo che mescolando x di litri di X e y di litri di Y siano rispettati questi vincoli. Stabilisci infine quanti litri di liquido X si possono utilizzare, al massimo, nella miscela.
- 11) Osvaldo ha 16000 euro di risparmi, e intende investirli, tutti o in parte, coi vincoli seguenti:
- almeno 4000 euro in un fondo ad alto rischio-alto rendimento;
 - e almeno il doppio, in titoli di Stato.
- Disegna un diagramma che illustri la possibile ripartizione fra le x migliaia di euro per l'investimento nel fondo e le y migliaia di euro per quello in titoli. Stabilisci anche qual è la massima cifra possibile per il primo investimento, quello più rischioso.
- 12) Il medico specialista mi ha prescritto degli integratori alimentari per il fatto che dai miei esami del sangue è emersa la carenza di due certe sostanze A e B. In commercio sono disponibili due parafarmaci utili a questo scopo, Vitalyn ed Energex, che hanno anche ugual prezzo (ed entrambi sono, a dire il vero, scandalosamente cari ...)
- Una fiala di soluzione Vitalyn contiene 3 milligrammi di A e 2 milligrammi di B.
Una fiala di Energex contiene invece 2 milligrammi di A e 4 di B.
- L'indicazione del dottore è che io assuma complessivamente, nell'arco di un mese, almeno 20 mg di A e 20 di B; non ha importanza se la dose viene superata, basta che sia assicurato quel minimo. Quante fiale di Vitalyn e quante di Energex devo acquistare, per ridurre il più possibile la spesa?
- 13) Una confezione di preparato dietetico a base di riso integrale e di farro dovrebbe fornire almeno 50 grammi di proteine e non più di 10 grammi di grassi. Ora, un etto di riso integrale fornisce 7,5 grammi di proteine e 2 grammi di grassi; mentre un etto di farro 15 grammi di proteine e 2,5 grammi di grassi. E perché il piatto abbia un buon sapore, la dose di farro dev'essere almeno il doppio di quella di riso, ma anche non più del quadruplo. Determina le quantità di riso e di farro che a) minimizzino b) massimizzino il peso della confezione.
- 14) Un emporio specializzato in blue jeans si rifornisce dai due laboratori artigianali di Anna e di Barbara. Tuttavia, dopo ciascun approvvigionamento il direttore dell'emporio esegue una cernita accurata dei capi, per distinguere fra quelli di qualità ottima, buona, e accettabile. Ora, l'emporio prevede, per il prossimo inverno, di doversi procurare almeno 100 blue jeans di ottima qualità e almeno 150 di buona qualità. Diciamo che le forniture di Anna sono mediamente tali che il 50% dei suoi pezzi è giudicato ottimo, il 30% buono e il 20% accettabile; mentre per il laboratorio di Barbara queste percentuali sono rispettivamente del 30%, 60% e 10%. Poiché entrambe le imprenditrici fanno pagare i propri jeans 24 euro l'uno, determina quanti jeans dovrebbero essere acquistati presso Anna e quanti presso Barbara per realizzare la scorta minima desiderata, e nel contempo spendere il meno possibile. [Utilizza GEOGEBRA per il diagramma ...]
- 15) Una confezione da 1 Kg di anticrittogamico S1 contiene 6 hg di una data sostanza A, e 3 hg di un'altra sostanza B (l'hg restante si deve a un eccipiente). E una confezione da 1 Kg di S2 contiene 2 hg di A, e 6 hg di B. Ora, il preparato S1 costa 3 euro la confezione, e 5 euro invece S2. L'agricoltore Gilberto necessita di almeno 3 kg di A e di almeno 4 kg di B: aiutalo a determinare quante confezioni di S1 e quante di S2 dovrebbe acquistare per spendere la cifra più bassa possibile. Se il prezzo di S2 scattasse improvvisamente a 7 euro la confezione, la risposta rimarrebbe la stessa?
- 16) Un esame si svolge con modalità molto particolari. C'è un set di 20 problemi di Media difficoltà, e un altro set di 20 problemi di difficoltà Elevata; il candidato deve scegliere non più di 20 problemi complessivamente, e cercare di rispondere in un tempo massimo di 90', tenendo presente che ogni quesito M vale 2 punti e ogni quesito E ne vale 3. Il volonteroso Vincenzo si ritiene in grado di elaborare la risposta corretta a una richiesta M in 3 minuti, e a una richiesta E in 10 minuti. Quante domande M e quante E dovrebbe scegliere per massimizzare il punteggio sperato?

RISPOSTE

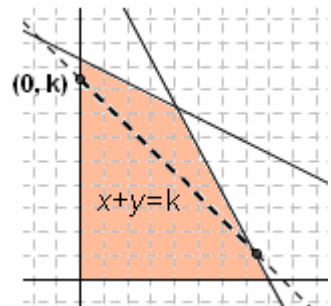
- 1) $250x < 12000 \rightarrow x < 48$ 2) Al massimo 38 euro
- 3) $3,5 \cdot x \cdot 75/100 \geq 100$ (almeno 39 costatine) 4) $(76 + 81 + 75 + 74 + x)/5 \geq 80$; almeno 94
- 5) $30 + x \geq 80/100 \cdot 48$. Non può realizzare il suo desiderio: la disequazione è verificata per $x \geq 8,4$!
- 6) $18x - (2 - 14x) > 2 \rightarrow x > 1/8$, e $1/8$ di ora sono 7 minuti e $1/2$ 7) Da (4, 8, 12) fino a (328, 332, 336)
- 8) Plan A will be the cheaper plan if you drive more than 60 miles per day

9) Posto $x = n^\circ$ di bomboloni, $y = n^\circ$ di croissant,
la regione di piano ombreggiata contiene tutte le coppie (x, y) che rispettano entrambi i vincoli
 $15x + 8y \leq 120, 10x + 20y \leq 185$.
Il punto evidenziato, di coordinate (4, 7), è quello che **appartiene alla regione, ha coordinate intere e massimizza $x + y$** .
 Nadia potrà così preparare, con gli ingredienti di cui dispone, 4 ottimi bomboloni più 7 squisiti croissant da offrire agli amici.



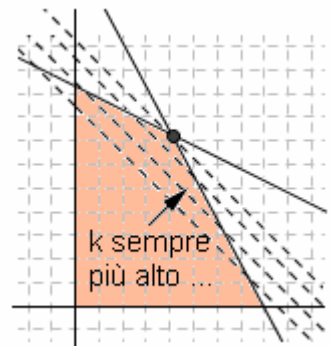
C'è un **PROCEDIMENTO GRAFICO GENERALE PER MASSIMIZZARE $x + y$** , e lo si trae dalle considerazioni seguenti.

Se k è un numero fissato, **l'insieme delle coppie x, y per le quali è $x + y = k$ è rappresentato dalla retta di equazione $x + y = k$ ossia $y = k - x$, che è inclinata di 45° in discesa** (avendo coefficiente angolare -1) **e interseca l'asse verticale nel punto di ordinata k .**



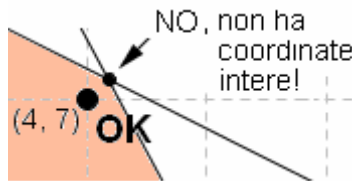
Ora i punti di una regione di piano, per i quali $x + y = k$, sono le intersezioni di quella regione con tale retta.

Adesso **andiamo ad aumentare il valore di k : la retta si sposta verso l'alto, parallelamente a sé stessa, e NOI SIAMO INTERESSATI AD ARRIVARE PIÙ IN ALTO CHE POSSIAMO, SEMPRE CONTINUANDO A INTERSECCARE LA REGIONE.**

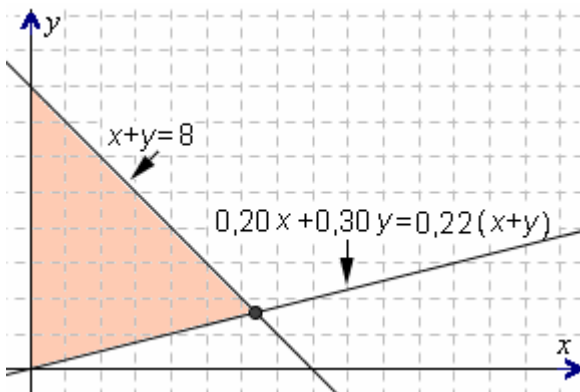


Quindi il punto della regione per cui è massima la somma $x + y$ *sarebbe* quello evidenziato col pallino nella figura qui a destra $\rightarrow \dots$

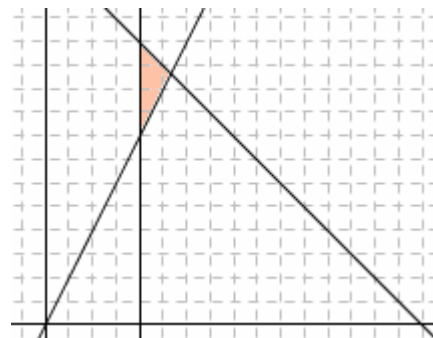
... PERO' nel caso nel nostro esempio, *non* ci interessa proprio *quel* punto dato che non ha coordinate intere: beh, considereremo i punti della regione ombreggiata, con coordinate *interi*, ad esso più vicini!



10) Massimo 6,4 litri di X



11) Vedi figura qui sotto; la cifra massima che si può investire nel fondo ad alto rischio, con quei vincoli, è di 5333 euro.



- 12) 8 confezioni: 4 e 4, oppure 5 di Vitalyn e 3 di Energex, o 6 di Vitalyn e 2 di Energex
- 13) a) hg 0,74 di riso e hg 2,96 di farro; b) 1,43 e 2,86 hg 14) 72 da A e 214 da B opp. 71 da A e 215 da B
- 15) 4 di S1 e 5 di S2. No; scelta migliore in questo caso: 14 confezioni di S1, e 0 di S2 16) 16 M, 4E