EQUAZIONI E DISEQUAZIONI IRRAZIONALI O COL VALORE ASSOLUTO

INDICE

PRESENTAZIONE

Il capitolo che sta per iniziare presenta alcuni argomenti dall'aspetto un po' "arido".

Tuttavia, **nelle facoltà universitarie scientifiche**
si suppone che lo studente *sia in possesso di* queste conoscenze,
e ciò può essere fonte di non poche difficoltà per chi invece ne è all'oscuro.

Sul presente testo, oltre alla *spiegazione dettagliata e motivata della teoria*,
troverai parecchie pagine di *esempi completamente svolti*.

Va detto che lo studio delle questioni in oggetto contribuisce ad avere
una *visione più approfondita e completa dell'Algebra*;
la *possibilità di servirsi di grafici* in alternativa o come ausilio rispetto alla risoluzione algebrica
è, infine, molto istruttiva e gradevole.

Non lasciarti perciò vincere dalla pigrizia …
… àrmati di buona volontà …
… e vedrai che finirà per piacerti anche questa parte!

Per una piena comprensione
delle pagine che seguono,
si consiglia di rileggere,
sul Volume 2,
il paragrafo dedicato alla
"Manipolazione di grafici"
(pagine 114-119).

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI IRRAZIONALI O COL VALORE ASSOLUTO

A) LE EQUAZIONI IRRAZIONALI E LE CONDIZIONI "A PRIORI"

Riprendiamo ora il discorso sulle equazioni irrazionali, avviato nel Volume 2 alle pagine 80 e seguenti.

a) Abbiamo detto che sono così chiamate quelle equaz. che portano almeno una volta *l'incognita sotto radice*

b) abbiamo visto che esse *si risolvono elevando una o più volte a potenza*

c) ma abbiamo osservato che **quando si eleva ad esponente *pari* il passaggio potrebbe introdurre (non sempre lo fa, ma *a volte* lo fa) una o più "false soluzioni", "soluzioni non accettabili"**
(*se due numeri sono uguali, allora elevandoli ad uno stesso esponente si otterranno ancora numeri uguali; ma se i risultati dell'elevamento ad uno stesso esponente PARI di due numeri sono uguali, i due numeri in questione non sono necessariamente uguali: potrebbero anche essere opposti*)

d) e abbiamo raccomandato dunque, **per le equazioni irrazionali risolte elevando almeno una volta ad esponente pari**, di **sottoporre ciascuna soluzione che si trova alla fine alla "verifica di accettabilità", *sostituendola* nell'equaz. *di partenza* per controllare se rende l'uguaglianza iniziale vera oppure no**.

Dunque fra le soluzioni dell'equaz. elevata ad esp. pari, *soltanto* quelle che superano il "test *a posteriori* di accettabilità" sono anche soluzioni dell'equazione di partenza, *mentre* le altre vengono *scartate*.

Ci domandiamo ora: ma sarà possibile, come si è soliti fare per una equazione *fratta*, stabilire anche per un'equazione irrazionale nella quale si eleva ad esponente *pari* delle "condizioni di accettabilità *a priori* ", cosicché le soluzioni trovate alla fine possano essere riconosciute come accettabili o non accettabili *semplicemente* andando a vedere se verificano o non verificano tali condizioni, *senza* stare a fare la sostituzione nell'equazione iniziale?

La **risposta** è **affermativa, almeno per i casi più semplici**. Vediamo.

Di fronte, ad esempio, all'equazione $\boxed{(1)\ \ \sqrt{5-x}=x-3}$
cosa possiamo dire, fin dall'inizio, sul numero incognito *x*?
Beh, se un dato valore di *x* è soluzione di (1),
allora certamente *x* renderà eseguibile l'estrazione di radice restando in campo reale
(salvo esplicito avviso contrario, non si sconfina mai in campo complesso), quindi sarà $5-x\ge 0$.
Non solo: *x* sarà anche tale che $x-3\ge 0$, perché rende il valore di $x-3$ uguale al risultato di un'estrazione di radice quadrata, risultato che come sappiamo è per convenzione sempre ≥ 0.
Inoltre, **se un'uguaglianza è vera, sarà vera anche quell'uguaglianza che si ottiene elevando al quadrato ambo i membri della prima**, quindi *x* verificherà pure l'equazione $5-x=(x-3)^2$

Pertanto, se *x* è soluzione di (1), allora *x* sarà soluzione pure del sistema $\boxed{(2)\ \ \begin{cases}5-x\ge 0\\ x-3\ge 0\\ 5-x=(x-3)^2\end{cases}}$.

E viceversa, se un dato valore di *x* è soluzione di (2), allora lo stesso valore di *x* è soluzione anche di (1):
infatti, se *x* verifica (2), allora in particolare *x* sarà tale da rendere vera l'uguaglianza $5-x=(x-3)^2$;
ma **se vale un'uguaglianza fra numeri POSITIVI** (e quella in gioco è certamente tale, perché il 2° membro, in quanto quadrato, è *senz'altro* positivo) **allora vale sicuramente anche l'uguaglianza ottenibile estraendo le radici quadrate**, quindi la $\sqrt{5-x}=\sqrt{(x-3)^2}$ ossia la $\sqrt{5-x}=|x-3|$ che però, in virtù della seconda condizione del sistema, equivale a $\sqrt{5-x}=x-3$ ossia alla (1).
Insomma, (1) e (2) si implicano vicendevolmente, si bi-implicano, sono *equivalenti*.
Si può anche osservare che, nell'ambito del sistema (2), la condizione $5-x\ge 0$ è *superflua* e si può eliminare, perché è *conseguenza dell'ultima condizione*: infatti, se è $5-x=(x-3)^2$, allora è SENZ'ALTRO $5-x\ge 0$ (un'espressione uguale ad un quadrato è certamente non negativa, come lo è il quadrato).

Allora il sistema (2) può ridursi a $\begin{cases}\cancel{5-x\ge 0}\\ x-3\ge 0\\ 5-x=(x-3)^2\end{cases}$ e in definitiva scopriamo che

l'equazione $\sqrt{5-x}=x-3$ equivale al sistema $\begin{cases}x-3\ge 0 & \text{condizione di positività del 2° membro}\\ 5-x=(x-3)^2 & \text{condizione ottenibile elevando al quadrato}\end{cases}$

e che quindi le soluzioni di (1) sono quelle, fra le soluzioni dell'equazione ottenibile elevando al quadrato la (1), che soddisfano *anche* alla condizione di positività (*positività in senso lato*, cioè *non-negatività*) del 2° membro.

Riassumendo, questo discorso ci ha portato a stabilire che
per risolvere la (1) basterà porre la condizione di positività del suo 2° membro e poi elevare al quadrato.

Quindi, di fronte alla

$$\boldsymbol{\sqrt{5-x}=x-3},$$

noi, sapendo che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x-3\ge 0 & \text{condizione di positività del 2° membro} \\ 5-x=(x-3)^2 & \text{condizione ottenibile elevando al quadrato} \end{cases}$$

facciamo, nella pratica, così:

a) **poniamo la condizione di positività del secondo membro** $\boxed{x-3\ge 0,\ \boldsymbol{x\ge 3}}$;

b) **poi eleviamo al quadrato** ottenendo $\boxed{\boldsymbol{5-x=(x-3)^2}}$, che risolveremo **con il proposito di considerare alla fine accettabili, fra le soluzioni, solo quelle che risulteranno ≥ 3.**

$$5-x=(x-3)^2$$
$$5-x=x^2-6x+9$$
$$-x^2+5x-4=0$$
$$x^2-5x+4=0$$
$$(x-1)(x-4)=0$$
$$\cancel{x=1} \quad \vee \quad \boxed{x=4}$$

non accettabile!
Non è ≥ 3!!!

Verifica tu stesso, per esercizio,
sostituendo nell'equazione data inizialmente,
che $x=4$ *ne è soluzione*
mentre $x=1$ *NON ne è soluzione*
(non rende i due membri uguali, bensì li rende opposti fra loro).

Generalizziamo.

Un'equazione della forma

$$\text{(*)}\quad \boldsymbol{\sqrt{\mathrm{A}(x)}=\mathrm{B}(x)}$$

può essere risolta ponendo la condizione $\mathrm{B}(x)\ge 0$ di positività del 2° membro
e poi elevando al quadrato, in quanto è equivalente al sistema

$$\text{(**)}\quad \begin{cases} \cancel{\mathrm{A}(x)\ge 0} \\ \mathrm{B}(x)\ge 0 \\ \mathrm{A}(x)=\left[\mathrm{B}(x)\right]^2 \end{cases}$$

nel quale la condizione $\mathrm{A}(x)\ge 0$ può essere cancellata
(se ce la teniamo, non sbagliamo; tuttavia la condizione è sovrabbondante, superflua, inutile)
perché è *implicita* (NOTA) nella terza.

L'equivalenza fra l'equazione (*) e il sistema (**) può essere provata constatando che

(*) $\Rightarrow$ (**), cioè: se un certo *x* è soluzione di (*), allora lo stesso *x* è soluzione anche di (**), perché

- se un'espressione è uguale al risultato di una radice quadrata, allora è certamente ≥ 0;
- e se vale un'uguaglianza, allora è vera anche quella che si ottiene elevandone i due membri al quadrato;

e viceversa

(**) $\Rightarrow$ (*), cioè: se un certo *x* è soluzione di (**), allora lo stesso *x* è soluzione anche di (*), perché se vale un'uguaglianza fra numeri POSITIVI, allora è vera anche quella che si ottiene estraendo le radici quadrate dei suoi due membri; e in generale si ha $\sqrt{\left[\mathrm{B}(x)\right]^2}=\left|\mathrm{B}(x)\right|$, ma quando è, come nel nostro caso, $\mathrm{B}(x)\ge 0$, allora si ha più semplicemente $\sqrt{\left[\mathrm{B}(x)\right]^2}=\mathrm{B}(x)$.

Saranno dunque soluzioni di (*) quelle, fra le soluzioni dell'equazione ottenibile elevando al quadrato, che soddisfano alla condizione $\mathrm{B}(x)\ge 0$ di positività del 2° membro.

NOTA

"Implicita" significa "contenuta, seppure nascostamente; sottintesa come conseguenza automatica". Ad esempio, se una signora, conversando con un'amica, parla del suo "primo marito", è *implicito* che ne ha avuti almeno due; se parlo di "minimo comune multiplo fra due numeri", è *implicito* che mi sto riferendo a numeri interi.
Nel nostro caso, la condizione $\mathrm{A}(x)\ge 0$ è implicita nella terza condizione del sistema, perché se $\mathrm{A}(x)$ è uguale ad un quadrato, allora *necessariamente* è $\mathrm{A}(x)\ge 0$.

CASI PARTICOLARI

$$\sqrt{\mathbf{A}(x)}=\mathbf{p}\quad(\mathbf{p}\in\mathbb{R},\ \mathbf{p}>0)$$

Qui il 2° membro è una costante positiva: ***si può elevare al quadrato senza porre alcuna condizione.***

$$\sqrt{\mathbf{A}(x)}=-\mathbf{p}\quad(\mathbf{p}\in\mathbb{R},\ \mathbf{p}>0)$$

Qui il 2° membro è una costante negativa.
L'equazione è impossibile**: il risultato di una radice quadrata non può mai essere negativo.**

$$\sqrt{\mathbf{A}(x)}=\mathbf{0}$$

L'equazione è equivalente a $\mathbf{A}(x)=\mathbf{0}$:
una radice quadrata ha risultato nullo se e solo se il suo radicando è nullo.

E vediamo ora un altro caso notevole; presenteremo, questa volta, subito il ragionamento teorico generale.

Un'equazione della forma

(*) $\sqrt{\mathbf{A}(x)}=\sqrt{\mathbf{B}(x)}$

può essere risolta ponendo le condizioni $\mathbf{A}(x)\geq 0,\ \mathbf{B}(x)\geq 0$ di positività dei due membri
e poi elevando al quadrato, perché è equivalente al sistema

$$(**)\quad\begin{cases}\mathbf{A}(x)\geq 0\\ \mathbf{B}(x)\geq 0\\ \mathbf{A}(x)=\mathbf{B}(x)\end{cases}$$

nel quale fra le due condizioni $\mathbf{A}(x)\geq 0,\ \mathbf{B}(x)\geq 0$, una qualsiasi potrebbe essere cancellata
(se ce la teniamo, non sbagliamo, tuttavia la condizione è sovrabbondante, superflua, inutile)
in quanto è *implicita* nelle altre due condizioni del sistema.

L'equivalenza fra l'equazione (*) e il sistema (**) può essere provata constatando che

$(*)\Rightarrow(**)$, cioè: se un certo x è soluzione di (*), allora lo stesso x è soluzione anche di (**), perché
- se vale un'uguaglianza fra radici quadrate con l'intesa di restare in campo reale, allora entrambe sono estraibili in campo reale quindi hanno radicando positivo;
- e se vale un'uguaglianza, allora è vera anche l'uguaglianza che si ottiene elevandone i due membri al quadrato;

e viceversa

$(**)\Rightarrow(*)$, cioè: se un certo x è soluzione di (**), allora lo stesso x è soluzione anche di (*) perché se vale un'uguaglianza fra numeri POSITIVI, allora è vera anche quella che si ottiene estraendo le radici quadrate dei suoi due membri.

Esempio.

$$\sqrt{x^2-5}=\sqrt{2x-2}$$

Pongo le condizioni di realtà dei radicali $x^2-5\geq 0,\ 2x-2\geq 0$;
ne lascio perdere una *qualsiasi*, ad esempio la prima che è un po' più complicata, e tengo solo l'altra:

$$2x-2\geq 0,\ \boxed{x\geq 1}.$$

Elevo al quadrato e ottengo

$$x^2-5=2x-2;\quad x^2-2x-3=0;\quad (x-3)(x+1)=0;\quad \boxed{x=3}\ \vee\ \cancel{x=-1}$$

non accettabile!
Non è ≥ 1!!!

Verifica tu stesso, per esercizio, sostituendo nell'equazione data, che $x=3$ *ne è soluzione, mentre* $x=-1$ *NON ne è soluzione (rende le due operazioni di radice NON eseguibili restando in campo reale).*

EQUAZIONI NELLE QUALI OCCORRE ELEVARE SOLO AD ESPONENTE DISPARI

Non presentano nessuna difficoltà:
il passaggio è sempre effettuabile, senza dover porre NESSUNA CONDIZIONE,
perché muta sempre l'equazione data in un'equazione certamente equivalente a quella di partenza.

Infatti, prendendo ad es. l'esponente 3: se due numeri sono uguali, allora sono uguali anche i loro cubi;
e viceversa, se due numeri (di segno qualsiasi) sono uguali fra loro, allora certamente esistono e sono uguali anche le loro radici cubiche.

… E IN CASI PIU' COMPLICATI, COME CI SI COMPORTA?

In generale, si pongono le condizioni di realtà di tutti i radicali presenti,
e **si cerca di trasportare i termini in modo che i due membri siano certamente positivi** (≥ 0)
per ogni valore ammissibile di x (non sempre ciò è possibile …).

Soltanto a questo punto si eleva al quadrato:
così facendo, infatti, si è certi di pervenire ad un'equazione la quale (considerata congiuntamente con le condizioni di realtà) è equivalente a quella di partenza.

Vediamo un esempio.

$$\sqrt{2x-14}-\sqrt{x-8}=1$$

Risolvo:

a) pongo le condizioni di realtà dei radicali $2x-14\geq 0\ \left(x\geq 7\right),\ x-8\geq 0\ \left(x\geq 8\right)$
le quali danno, in definitiva (devono essere considerate come se fossero "a sistema", perché vogliamo limitarci a considerare quei valori di x che le verificano *entrambe*)

$$\boxed{x\geq 8}$$

b) Ora trasporto i termini in modo da avere due membri ciascuno dei quali sia positivo (nel senso di: non-negativo, ≥ 0) per ogni valore ammissibile di x:

$$(*)\quad \sqrt{2x-14}=1+\sqrt{x-8}$$

Ce l'ho fatta, perché so che una radice quadrata, quando è estraibile restando in campo reale, dà sempre un risultato non-negativo.

c) Infine elevo al quadrato:

$$(**)\quad \left(\sqrt{2x-14}\right)^2=\left(1+\sqrt{x-8}\right)^2$$

e osservo che, per via di quella positività di ciascun membro della $(*)$ che mi sono assicurato col trasporto dei termini, in effetti $(*)$ e $(**)$ sono equivalenti:

$(*)\Rightarrow(**)$ perché se due numeri sono uguali, allora lo sono anche i loro quadrati;

$(**)\Rightarrow(*)$ perché se i quadrati di due numeri NON NEGATIVI sono uguali, allora lo sono anche i due numeri stessi
(*osserviamo che questa conclusione non si sarebbe potuta trarre se sui segni dei due numeri non ci fosse stata alcuna informazione*)

Allora

$$2x-14=1+x-8+2\sqrt{x-8}$$
$$-2\sqrt{x-8}=-x+7$$
$$2\sqrt{x-8}=x-7$$

e siamo pervenuti ad una equazione di un tipo già considerato
(la presenza del fattore esterno 2 non influisce, come possiamo facilissimamente controllare, sui ragionamenti fatti con riferimento al caso $\sqrt{A(x)}=B(x)$). Dunque

$$x-7\geq 0;\ \boxed{x\geq 7}$$
$$4\left(x-8\right)=\left(x-7\right)^2$$
$$4x-32=x^2-14x+49$$
$$-x^2+18x-81=0$$
$$x^2-18x+81=0$$
$$\left(x-9\right)^2=0$$

$\boxed{x=9}$ *accettabile perché soddisfa a tutte le condizioni prima poste.*

Una analisi più accurata mostrerebbe che addirittura *in parecchi casi* le condizioni di realtà che vengono poste prima di elevare al quadrato … … si rivelano superflue!

Potrai riflettere tu, se vuoi, di fronte agli esercizi che svolgerai, *quando* e *perché* si verifica questo fatto, ma noi *volutamente non approfondiamo questo argomento*;
sia per brevità, sia per sottolineare che comunque
una condizione superflua può essere benissimo mantenuta: così facendo, non si sbaglia.

ESEMPI SVOLTI

1) $\boxed{\sqrt{x-6}+8-x=0}$

Trasporto i termini che non stanno sotto radice a 2° membro, per ricondurmi a una forma "standard":

$\boxed{\sqrt{x-6}=x-8}$

Ora pongo la condizione di positività del 2° membro, ed elevo al quadrato:

$x-8\ge 0;\quad \boxed{x\ge 8}$

$\boxed{x-6=(x-8)^2}$

$x-6=x^2-16x+64;\quad x^2-17x+70=0;\quad (x-7)(x-10)=0;\quad \cancel{x=7} \vee \boxed{x=10}$

Non accettabile, perché non è ≥8.

2) $\boxed{\dfrac{x}{3}=\sqrt{x-5}+1}$

Moltiplico per 3 per sbarazzarmi del denominatore
(in alternativa, avrei potuto fare il denominatore comune 3 in entrambi i membri per poi spedirlo via):

$x=3\sqrt{x-5}+3$

Isolo il radicale e mi riconduco a una forma "standard":

$-3\sqrt{x-5}=3-x$

$\boxed{3\sqrt{x-5}=x-3}$

Capisco che il fattore 3 che moltiplica il radicale non influisce sui vari ragionamenti, per cui pongo la condizione di positività del 2° membro, ed elevo al quadrato:

$x-3\ge 0;\quad \boxed{x\ge 3}$

$\boxed{9(x-5)=(x-3)^2}$

$9x-45=x^2-6x+9;\quad x^2-15x+54=0;\quad (x-6)(x-9)=0;\quad \boxed{x=6 \vee x=9}$ *entrambe accettabili*

3) $\boxed{\sqrt{x^2-2x}=2}$

Il secondo membro è positivo "per sua natura".
Posso elevare al quadrato senza porre alcuna condizione.

$x^2-2x=4;\quad x^2-2x-4=0;\quad x=1\pm\sqrt{1+4}=\boxed{1\pm\sqrt{5}}$

Le soluzioni trovate sono *certamente accettabili*:
infatti, non c'è alcuna condizione supplementare a cui devono soddisfare.
Tuttavia, potresti controllare sostituendo nell'equazione data
(sarebbe un esercizietto semplice e carino sui radicali).

4) $\boxed{\sqrt{x+7}=-4}$

Immediatamente, possiamo dire che l'equazione è $\boxed{\textbf{IMPOSSIBILE}}$:
il risultato di una radice quadrata non può mai essere negativo. Anche:
la condizione di positività del secondo membro, richiesta dalla teoria generale,
non può mai essere verificata.

5) $\boxed{\sqrt{x^3-x}=0}$

Il risultato di una radice quadrata è 0 se e solo se è uguale a 0 il radicando.
D'altronde, posso anche ragionare ricalcando la teoria generale,
e dire che la condizione di positività (= non-negatività) del 2° membro è SEMPRE verificata
per cui posso elevare al quadrato senza alcuna condizione supplementare.

Ottengo $x^3-x=0;\quad x(x^2-1)=0;\quad x(x+1)(x-1)=0;\quad \boxed{x=0 \vee x=\pm 1}$

6) $\boxed{\sqrt[3]{x}=4x}$

Dovendosi, per mandar via la radice, elevare ad esponente *dispari*,
non c'è alcuna condizione da porre:

$x=64x^3;\quad 64x^3-x=0;\quad x(64x^2-1)=0;\quad \boxed{x=0 \vee x=\pm 1/8}$ *certamente accettabili*

7) $\boxed{\sqrt[4]{x^2+6}+x=0}$

C'è una radice *quarta*, ed evidentemente mi comporto come se ci fosse una radice *quadrata*. Dunque $\boxed{\sqrt[4]{x^2+6}=-x}$ e ora pongo la condizione di positività del 2° membro, ed elevo alla quarta:

$-x\ge 0;\quad \boxed{x\le 0}$

$x^2+6=x^4;\quad x^4-x^2-6=0;\quad \left(x^2-3\right)\underbrace{\left(x^2+2\right)}_{\ne 0\ \forall x}=0;\quad x^2=3,\ x=\pm\sqrt{3}$

… ma per la condizione posta, solo la soluzione negativa è accettabile; quindi $\boxed{x=-\sqrt{3}}$

8) $\boxed{\dfrac{\sqrt{-4x-3}}{3}-\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{2}=0}$

Mi libero dai denominatori facendo il denominatore comune (in alternativa: moltiplicando per 6 …):

$$\frac{2\sqrt{-4x-3}-3\sqrt{x^2-5}}{\cancel{6}}=0$$

Porto in forma standard $\sqrt{\mathrm{A}(x)}=\sqrt{\mathrm{B}(x)}$:

$\boxed{2\sqrt{-4x-3}=3\sqrt{x^2-5}}$

Pongo le condizioni di realtà dei radicali:

$-4x-3\ge 0;\quad 4x+3\le 0;\quad \boxed{x\le -\frac{3}{4}}$

$x^2-5\ge 0;\quad \boxed{x\le -\sqrt{5}\ \vee\ x\ge\sqrt{5}}$

Le due condizioni poste, *messe a sistema*, mi danno come condizione di accettabilità $\boxed{x\le -\sqrt{5}}$
(in alternativa, potevo anche evitare di risolverne il sistema,
proponendomi di confrontare – alla fine – le soluzioni trovate, con *entrambe* le condizioni poste;
oppure ancora potevo *eliminare una* fra le condizioni *a piacere*, come dice la teoria).

Elevo al quadrato:

$4\left(-4x-3\right)=9\left(x^2-5\right)$

$-16x-12=9x^2-45$

$9x^2+16x-33=0$

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64+297}}{9}=\frac{-8\pm\sqrt{361}}{9}=\frac{-8\pm 19}{9}=\begin{cases}\boxed{-3}\\ \cancel{11/9}\ \textit{non accettabile}\end{cases}$$

9) $\boxed{\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}=\sqrt{2x-9}}$

Pongo le condizioni di realtà e trasporto i termini in modo da ottenere due membri positivi:

$$\boxed{\begin{cases}x-1\ge 0;\ x\ge 1\\ 6-x\ge 0;\ -x\ge -6;\ x\le 6\\ 2x-9\ge 0;\ x\ge 9/2\end{cases}}$$

$\boxed{\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-9}+\sqrt{6-x}}$

Elevo al quadrato:

$\left(\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{2x-9}+\sqrt{6-x}\right)^2$

$\cancel{x}-1=2\cancel{x}-9+6\cancel{-x}+2\sqrt{\left(2x-9\right)\left(6-x\right)}$

$-2\sqrt{12x-2x^2-54+9x}=-2;$

$\sqrt{-2x^2+21x-54}=1$

Essendo il 2° membro una costante positiva posso elevare al quadrato senza porre alcuna condizione:

$-2x^2+21x-54=1;\quad -2x^2+21x-55=0;\quad 2x^2-21x+55=0$

$$x_{1,2}=\frac{21\pm\sqrt{441-440}}{4}=\frac{21\pm 1}{4}=\begin{cases}\boxed{5}\\ \boxed{11/2}\end{cases}\quad \textit{entrambe accettabili}!!!$$

10)
Nei casi in cui non sia possibile tramite spostamenti di termini ottenere due membri certamente ≥ 0,
si potranno anche porre le varie condizioni di realtà – che permetteranno quindi eventualmente, alla fine, di scartare subito qualcuna fra le soluzioni ottenute – … ma ciò non basterà (NOTA): di norma si sarà comunque costretti a sottoporre ciascuna soluzione non scartata al "test di accettabilità a posteriori", sostituendo nell'equazione di partenza.

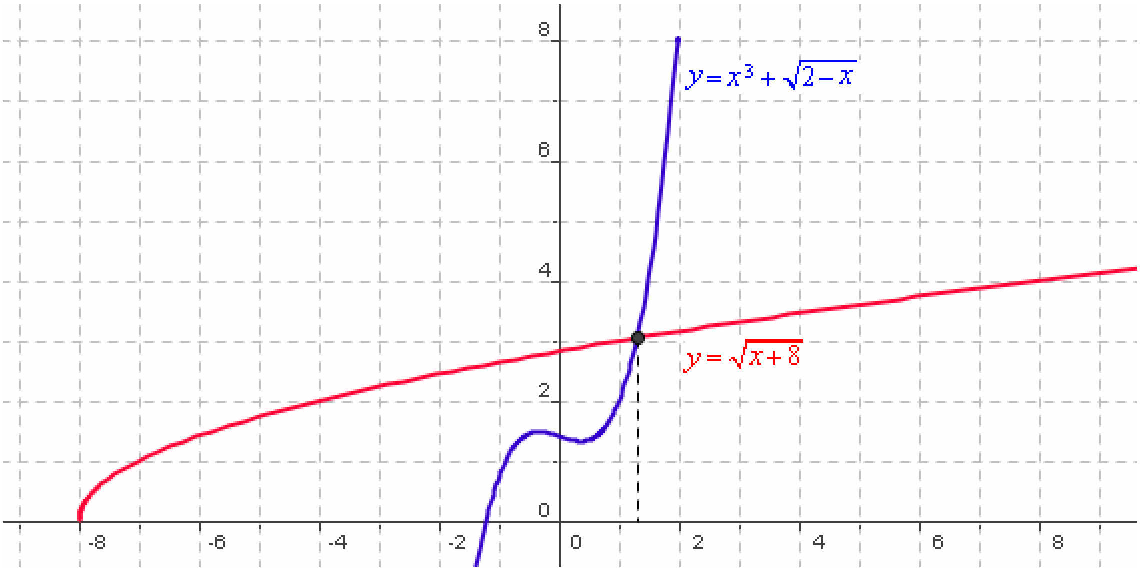
NOTA: a meno che le condizioni di realtà finiscano per assicurare anche la positività dei due membri: ad esempio, di fronte all'equazione $x+\sqrt{x}=\sqrt{5x^2-1}$, *la condizione di realtà del 1° radicale è* $x \geq 0$, *e sotto questa condizione la positività del 1° membro è certa)*

Si potrà anche, specialmente in casi non gestibili algebricamente, ricorrere alla RISOLUZ. GRAFICA, che di norma consentirà solamente di trovare, per le soluzioni, valori approssimati.

Esempio: $\boxed{x^3+\sqrt{2-x}=\sqrt{x+8}}$

Le condizioni di realtà dei radicali sono $x \leq 2,\ x \geq -8$
e in definitiva, per la realtà dei radicali, deve essere $-8 \leq x \leq 2$.
Una soluzione *x* della nostra disequazione potrebbe dunque anche essere negativa;
non siamo certi che i due membri siano positivi per ogni valore ammissibile di *x*.
Del resto, elevare al quadrato significherebbe ottenere un'equazione complicata, nella quale sarebbe ancora presente un radicale e che richiederebbe quindi un ulteriore elevamento al quadrato per l'eliminazione di questo.

Abbandoniamo l'idea di risolvere per via algebrica, andiamo al computer e con un software appropriato (ad esempio il bel freeware GEOGEBRA) ci affidiamo ad una risoluzione grafica. Otteniamo



e ci rendiamo conto che i due grafici non possono avere altre intersezioni oltre a quella visibile in figura;
l'equazione $x^3+\sqrt{2-x}=\sqrt{x+8}$, infatti, non può avere soluzioni esterne all'intervallo che va da –8 a +2:

- il radicale $\sqrt{2-x}$ esiste soltanto per $2-x \geq 0,\ x \leq 2$,
- mentre il radicale $\sqrt{x+8}$ esiste soltanto per $x+8 \geq 0,\ x \geq -8$.

L'equazione ha dunque una e una sola soluzione, compresa fra 1 e 2, che il software approssima a circa 1,3

Un esercizio di difficoltà superiore potrebbe consistere nel richiedere questa risoluzione grafica SENZA consentire allo studente l'uso del computer. L'impresa non è insormontabile, perché

- il grafico della funzione $y=x^3$ dovrebbe essere familiare all'allievo,
  mentre quelli delle funz. $y=\sqrt{2-x},\ y=\sqrt{x+8}$ dovrebbero potersi ricavare abbastanza facilmente, "*per manipolazione*" (Vol. 2, pag. 114), a partire dal grafico noto della funzione "madre" $y=\sqrt{x}$.
- Il grafico di $y=x^3+\sqrt{2-x}$ si potrebbe quindi costruire "per somma":
  presa una ascissa, si sommano le ordinate delle due funzioni che fanno da addendi.

Così facendo, dovrebbe essere possibile riconoscere, pur senza computer, che si ha 1 e 1 sola soluzione e che questa cade nell'intervallo (1, 2). Tale soluz. potrebbe poi essere approssimata in modo più accurato utilizzando metodi della cosiddetta "*analisi numerica*", ad esempio il semplice "*metodo di bisezione*".

ESERCIZI sulle equazioni irrazionali (clicca sulla freccia, se c'è, per la correzione)

1) $\sqrt{2x-7}=x-5$ ⇨

2) $\sqrt{x^2+3}=4-x$ ⇨

3) $\sqrt{2x}+4=x$

4) $2\sqrt{x^2-x}=1-x$ ⇨

5) $4\sqrt{x-1}+x-3=0$

6) $\dfrac{\sqrt{1-2x}-1}{x}=1$ ⇨

7) $\sqrt{4x^2+5}+2=x$

8) $\dfrac{\sqrt{4x-1}}{2}=x$

9) $x=\sqrt{8x-7}$ ⇨

10) $2\left(\sqrt{x}-x\right)=1-\sqrt{x}$ ⇨

11) $\sqrt{4x+5}=2\left[x-\frac{1}{2}(x-1)\right]$ ⇨

12) $\sqrt{2x-3}=x-\sqrt{2x-3}$

13) $\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)=2$

14) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}=x+3$ ⇨

15) $\sqrt{(x-1)(x-3)}+7=x$

16) $\sqrt{2x-10}=\sqrt{x-7}$ ⇨

17) $\sqrt{x^2-5x+6}=\sqrt{x+1}$

18) $\sqrt{x^2-x-5}=\sqrt{x-2}$ ⇨

19) $\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{x-1}$

20) $\sqrt{8-x}-\sqrt{x^2-4}=0$

21) $\sqrt{2x-8}=\sqrt{x^2-x-6}$

22) $\sqrt{x-4}=3$ ⇨

23) $\sqrt{x^2-3x}=2$

24) $\dfrac{\sqrt{x^2-4x-1}}{2}-1=0$

25) $\sqrt{x^2-4}=-5$ ⇨

26) $\sqrt{2x-3}+4=0$

27) $\sqrt{3x-5}=0$ ⇨

28) $2\sqrt{5-x}=0$

29) $\sqrt{2x-2}-1=\sqrt{x-2}$ ⇨

30) $\sqrt{x+3}-2\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}=0$ ⇨

31) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x}=1$ ⇨

32) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$ ⇨

33) $\sqrt{x}=\sqrt{3x-2}-2$

34) $2\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x}+3$ ⇨

35) $\sqrt[3]{7x-1}+1=x$ ⇨

36) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x+1}=0$ ⇨

37) $\sqrt{3-x}+x=\sqrt{x^2+3}$ ⇨

38) $\sqrt{x^2-1}=2x+\sqrt{x^2+3}$ ⇨

39) $\sqrt{x}+x=\sqrt{x^2+x+1}$ ⇨

SOLUZIONI

1) $x=8$ ($\cancel{x=4}$ *non acc.*)

2) $x=13/8$

3) $x=8$ ($\cancel{x=2}$ *non acc.*)

4) $x=-1/3\vee x=1$

5) $x=11-4\sqrt{6}$ ($\cancel{11+4\sqrt{6}}$ *non acc.*)

6) IMPOSSIBILE

7) IMPOSSIBILE

8) $x=1/2$

9) $x=1\vee x=7$

10) $x=1/4\vee x=1$

11) $x=1+\sqrt{5}$ ($\cancel{1-\sqrt{5}}$ *non acc.*)

12) $x=2\vee x=6$

13) $x=1$ ($\cancel{x=4}$ *non acc.*)

14) IMPOSSIBILE

15) IMPOSSIBILE

16) IMPOSSIBILE

17) $x=1\vee x=5$

18) $x=3$ ($\cancel{x=-1}$ *non acc.*)

19) $x=2+\sqrt{3}$ ($\cancel{2-\sqrt{3}}$ *non acc.*)

20) $x=-4\vee x=3$

21) IMPOSSIBILE

22) $x=13$

23) $x=-1\vee x=4$

24) $x=-1\vee x=5$

25) IMPOSSIBILE

26) IMPOSSIBILE

27) $x=5/3$

28) $x=5$

29) $x=3$

30) $x=1$ ($\cancel{x=\frac{49}{15}}$ *non acc.*)

31) $x=1/2$

32) $x=49/120$

33) $x=9$ ($\cancel{x=1}$ *non acc.*)

34) $x=121/36$

35) $x=0\vee x=-1\vee x=4$

36) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

37) $x=0\vee x=11/4$

38) $x=-1$ ($\cancel{x=1}$ *non acc.*)

39) $x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$

B) LE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Sono quelle disequazioni nelle quali l'incognita compare, almeno una volta, sotto radice.

Esse vengono risolte eliminando la radice tramite elevamento a potenza;
tuttavia, abbiamo già rilevato (Volume 2, pag. 138) che

1) **data una disuguaglianza,**
   è SEMPRE lecito (qualunque siano i segni dei due membri)
   elevare ambo i membri ad uno stesso esponente DISPARI,
   o estrarne le radici con lo stesso indice DISPARI
   (nel senso che, così facendo, se si parte da una disuguaglianza vera,
   si è certi di pervenire alla fine ad una disuguaglianza ancora vera)

mentre

2) **l'elevamento ad esponente PARI dei due membri di una disuguaglianza,**
   o l'estrazione di radice con indice PARI dei due membri di una disuguaglianza,
   sono leciti
   SOLTANTO QUANDO I DUE MEMBRI DELLA DISUGUAGLIANZA DATA
   SONO NUMERI POSITIVI O NULLI.

Da ciò si traggono, per le disequazioni, i due **principi di equivalenza** seguenti:

1) **in una disequazione,**
   è SEMPRE lecito elevare ad uno stesso esponente DISPARI ambo i membri,
   o estrarre la radice, con uno stesso indice DISPARI, di entrambi i membri:
   così facendo, infatti, la disequazione considerata
   si muterà SEMPRE in un'altra ad essa EQUIVALENTE, cioè avente le stesse soluzioni

2) **e invece in una disequazione**
   è lecito elevare ad uno stesso esponente PARI entrambi i membri,
   o estrarre la radice, con uno stesso indice PARI, di entrambi i membri
   (nel senso che così facendo si sarà certi di ottenere una disequazione EQUIVALENTE a quella data),
   SOLTANTO QUANDO ognuno dei due membri è un'espressione che assume valore
   POSITIVO O NULLO (≥ 0) SEMPRE, ossia:
   - **per qualsiasi valore di** x,
   - o perlomeno per qualsiasi valore di x appartenente al sottoinsieme di $\mathbb{R}$ al quale vogliamo confinare il nostro interesse e nell'ambito del quale cerchiamo le soluzioni.

Ora affronteremo dunque lo studio delle disequazioni irrazionali,
iniziando dalle tipologie più semplici e rilevanti.

Per quanto detto, ***i casi "delicati" sono soltanto quelli nei quali***
per liberarsi dalla radice occorre elevare almeno una volta ad esponente PARI.

Prima di cominciare, sarà opportuno ricordare alcune
QUESTIONI DI SEGNO E CONVENZIONI riguardanti i radicali.

Parlando di radicali:

Se l'indice è *DISPARI*,
- il *radicando* potrà essere di *segno qualsiasi*: positivo, negativo o nullo
- e il *risultato* dell'estrazione di radice conserverà sempre lo *stesso segno del radicando*

Se l'indice è *PARI*,
- il *radicando* dovrà essere *positivo o nullo*, altrimenti l'operazione sarebbe impossibile (NOTA)
- il *risultato* dell'estrazione di radice è, *per convenzione, anch'esso positivo o nullo*
  (insomma, NON è $\cancel{\sqrt{9}=\pm 3}$, bensì $\sqrt{9}=3$)

NOTA
… a meno di sconfinare in campo complesso, cosa che, salvo esplicito avviso contrario, è sottinteso non si faccia.
E d'altronde, nell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi la comunità matematica *NON* definisce le relazioni di $<$ e $>$.

LE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI "DEL 1° TIPO": $\boxed{\sqrt{\mathrm{A}(x)} < \mathrm{B}(x)}$

Ragioniamo su di un esempio, poi generalizzeremo.

$$(1) \quad \sqrt{x-2} < x-4$$

Se un numero x è soluzione di (1), allora x:

- renderà possibile l'estrazione di radice "restando in campo reale", cioè sarà tale che $\boxed{x-2 \ge 0}$;
- renderà strettamente positivo il secondo membro, cioè sarà tale che $\boxed{x-4>0}$
  (e questo perché il secondo membro, se risulta strettamente maggiore del risultato dell'estrazione di una radice quadrata, che è un numero positivo o nullo, è di certo strettamente positivo);
- verificherà la disequazione che si ottiene elevando al quadrato, vale a dire la disequazione
  $\boxed{x-2<(x-4)^2}$
  (infatti, se vale una disuguaglianza fra due numeri non negativi – e tali sono i due membri della (1) – allora varrà anche la disuguaglianza ottenibile elevando al quadrato).

Quindi, se x è soluzione di (1), allora x sarà soluzione anche del sistema

$$(2) \quad \begin{cases} x-2 \ge 0 \\ x-4>0 \\ x-2<(x-4)^2 \end{cases}$$

E viceversa, si può dimostrare (NOTA) che se x è soluzione di (2), allora è anche soluzione di (1).

In definitiva, **la disequazione (1) e il sistema (2) hanno le stesse soluzioni, cioè sono equivalenti**.
La risoluzione della disequazione (1) si effettuerà quindi passando al sistema equivalente (2), che rispetto alla disequazione iniziale ha il vantaggio di non contenere la x sotto radice.

NOTA
Supponiamo, infatti, che x sia soluzione del sistema (2).
Allora, essendo verificata la disuguaglianza

$$x-2<(x-4)^2$$

ed essendo questa (per la prima condizione del sistema) una disuguaglianza fra numeri positivi, per la quale dunque è lecito estrarre le radici quadrate, si avrà anche

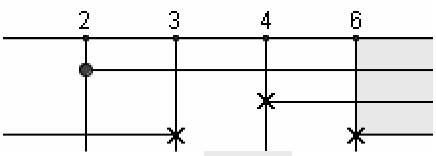
$$\sqrt{x-2} < \sqrt{(x-4)^2}$$

$$\sqrt{x-2} < |x-4| \quad \textit{da cui}$$

$$(1) \quad \sqrt{x-2} < x-4 \quad \textit{in quanto, per la seconda condizione del sistema, si ha } |x-4| = x-4$$

Insomma: $\boxed{(1) \quad \sqrt{x-2} < x-4} \Leftrightarrow \boxed{(2) \quad \begin{cases} x-2 \ge 0 \\ x-4>0 \\ x-2<(x-4)^2 \end{cases}}$ e risolvendo il sistema si ha:

$$\begin{cases} x \ge 2 \\ x>4 \\ x-2<x^2-8x+16; \ \ldots \ x^2-9x+18>0; \ \ldots \ x<3 \vee x>6 \end{cases}$$



$\boxed{x>6}$

La disequazione irrazionale data è verificata per tutti i numeri reali $x>6$:
l'insieme delle sue soluzioni è l'intervallo $(6, +\infty)$.

IN GENERALE:

La disequazione $\boxed{\sqrt{\mathrm{A}(x)} < \mathrm{B}(x)}$ è equivalente al sistema $\boxed{\begin{cases} \mathrm{A}(x) \ge 0 \quad \text{condiz. "di realtà del radicale"} \\ \mathrm{B}(x) > 0 \quad \text{condiz. "di positività del 2° membro"} \\ \mathrm{A}(x) < [\mathrm{B}(x)]^2 \end{cases}}$

LE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI “DEL 2° TIPO”: $\boxed{\sqrt{\mathrm{A}(x)} > \mathrm{B}(x)}$

Esempio:

$$(1)\quad \sqrt{x^2-3} > x-1$$

Se un numero x è soluzione di (1), allora cosa possiamo dire su *x*?

Innanzitutto possiamo dire che *x rende la radice estraibile in campo reale*, ossia è tale che $x^2-3 \ge 0$.

Poi, possiamo dire che:

- *o x* è tale che $x-1<0$
- *oppure* è tale che $x-1 \ge 0$;
  ma *in quest'ultimo caso x*, poiché verifica una disuguaglianza fra due numeri non negativi, verificherà anche la disuguaglianza ottenibile elevando al quadrato e cioè la $x^2-3>(x-1)^2$.

Ricapitoliamo: $$(1)\quad \sqrt{x^2-3} > x-1 \;\Rightarrow\; \overset{(2)}{\begin{cases} x^2-3 \ge 0 \\ x-1<0 \end{cases}} \vee \overset{(2')}{\begin{cases} x^2-3 \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \\ x^2-3>\left(x-1\right)^2 \end{cases}}$$

Viceversa, si può vedere che, se un valore di *x* è soluzione di uno dei due sistemi (2) o $(2')$, allora quello stesso valore di *x* verificherà anche la (1):

$(2) \Rightarrow (1)$ perché se *x* è soluzione di (2), allora *x* è tale che esista, in campo reale, il risultato di $\sqrt{x^2-3}$;
ma tale risultato, essendo un numero ≥ 0, sarà *certamente* maggiore di $x-1$ che è <0;
dunque per quell'*x* varrà la disuguaglianza $\sqrt{x^2-3} > x-1$ ossia la (1)

$(2') \Rightarrow (1)$ perché se *x* è soluzione di $(2')$, allora in particolare si ha $x^2-3>\left(x-1\right)^2$,
e i due membri di questa disuguaglianza sono due numeri ≥ 0
(il 2° m. perché è un quadrato, il 1° per la prima condiz. del sistema, o anche perché > di un quadrato);
ma allora la disuguaglianza si può sottoporre a estrazione di radice quadrata,
quindi è vera anche la $\sqrt{x^2-3} > \sqrt{(x-1)^2}$ ossia $\sqrt{x^2-3} > |x-1|$
che però, essendo $x-1 \ge 0$, diventa $\sqrt{x^2-3} > x-1$: ossia, la (1).

In definitiva, dato questo “viceversa”,
l'implicazione che avevamo scritto da sinistra verso destra diventa una *doppia* implicazione
e abbiamo

$$(1)\quad \boxed{\sqrt{x^2-3} > x-1} \;\Leftrightarrow\; \overset{(2)}{\boxed{\begin{cases} x^2-3 \ge 0 \\ x-1<0 \end{cases}}} \vee \overset{(2')}{\boxed{\begin{cases} x^2-3 \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \\ x^2-3>\left(x-1\right)^2 \end{cases}}}$$

Insomma, la nostra disequazione EQUIVALE ad una coppia di sistemi separati da un “vel” logico e saranno sue soluzioni quei valori di *x* che soddisfano il sistema (2) o, in alternativa, il $(2')$:
noi risolveremo il (2), risolveremo il $(2')$, e metteremo nel nostro “paniere” di soluzioni
tanto le soluzioni dell'uno *quanto* quelle dell'altro: faremo, insomma, per trovare le soluzioni di (1),
l' UNIONE INSIEMISTICA fra l'insieme delle soluzioni di (2) e l'insieme delle soluzioni di $(2')$.

IN GENERALE
La disequazione

$$\boxed{\sqrt{\mathrm{A}(x)} > \mathrm{B}(x)}$$

è equivalente alla coppia di sistemi, separati da un VEL logico:

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{A}(x) \ge 0 \\ \mathrm{B}(x) < 0 \end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases} \mathrm{A}(x) \ge 0 \\ \mathrm{B}(x) \ge 0 \\ \mathrm{A}(x) > \left[\mathrm{B}(x)\right]^2 \end{cases}}$$

ossia ne sono soluzioni quei valori di *x* che rendono, in alternativa:

- *reale* il radicale e *negativo* il secondo membro;
- oppure *reale* il radicale, *positivo o nullo* il secondo membro e *verificata* la *condizione ottenibile elevando al quadrato*.

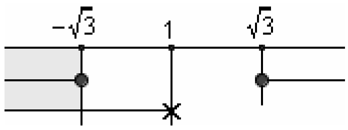
La successiva OSSERVAZIONE 1 chiarirà come
nel 2° sistema si potrebbe anche eliminare la prima fra le tre condizioni.

Terminiamo dunque la risoluzione dell'esempio proposto.

$$\sqrt{x^2-3}>x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-3\ge 0 \\ x-1<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-3\ge 0 \\ x-1\ge 0 \\ x^2-3>(x-1)^2 \end{cases}$$

Primo sistema:

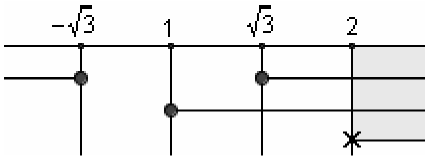
$$\begin{cases} x^2-3\ge 0;\ x^2\ge 3;\ |x|\ge\sqrt{3};\ \ x\le-\sqrt{3}\vee x\ge\sqrt{3} \\ x-1<0;\ \ x<1 \end{cases}$$



$x\le-\sqrt{3}$

Secondo sistema:

$$\begin{cases} x^2-3\ge 0;\quad x\le-\sqrt{3}\vee x\ge\sqrt{3} \\ x-1\ge 0;\ \ x\ge 1 \\ x^2-3>(x-1)^2;\ \ \ldots\ \ x>2 \end{cases}$$



$x>2$

per cui, in definitiva, la disequazione irrazionale data è verificata per tutti gli x tali che $\boxed{x\le-\sqrt{3}\vee x>2}$: l'insieme delle sue soluzioni è l'insieme $\left(-\infty,-\sqrt{3}\,\right]\cup(2,+\infty)$.

OSSERVAZIONE 1

A ben guardare, nell'ambito del sistema $\boxed{\begin{cases} \mathrm{A}(x)\ge 0 \\ \mathrm{B}(x)\ge 0 \\ \mathrm{A}(x)>[\mathrm{B}(x)]^2 \end{cases}}$

la prima condizione (quella "di realtà del radicale") è SUPERFLUA,
perché IMPLICITA nella terza condizione
(se $\mathrm{A}(x)>[\mathrm{B}(x)]^2$, allora A($x$), essendo > di un quadrato che è ≥ 0, sarà CERTAMENTE >0)

e potrebbe dunque essere eliminata: $\boxed{\begin{cases} \cancel{\mathrm{A}(x)\ge 0} \\ \mathrm{B}(x)\ge 0 \\ \mathrm{A}(x)>[\mathrm{B}(x)]^2 \end{cases}}$. Se, d'altra parte, ce la teniamo, NON sbaglieremo.

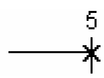
OSSERVAZIONE 2

L'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{\mathrm{A}(x)}>\mathrm{B}(x)$ è l' UNIONE INSIEMISTICA

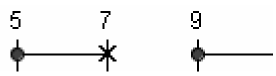
fra gli insiemi delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} \mathrm{A}(x)\ge 0 \\ \mathrm{B}(x)<0 \end{cases}$, $\begin{cases} \cancel{\mathrm{A}(x)\ge 0} \\ \mathrm{B}(x)\ge 0 \\ \mathrm{A}(x)>[\mathrm{B}(x)]^2 \end{cases}$.

Volendo, si potrebbe "costruire graficamente" tale unione insiemistica tramite uno *SCHEMA DI UNIONE* nel quale rappresenteremmo, ***SU DI UNA STESSA*** *NUMBER LINE*, le soluzioni di ENTRAMBI i sistemi PER POI ANDARE A PRENDERE ***TUTTE*** LE SOLUZIONI IN QUESTO MODO EVIDENZIATE.
Ad esempio,

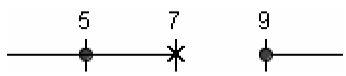
se il primo fra i due sistemi avesse le soluzioni $\boxed{x<5}$



e il secondo sistema avesse come soluzioni $\boxed{5\le x<7\ \vee\ x\ge 9}$,



lo SCHEMA DI UNIONE sarebbe quello
riportato qui a destra



e la disequazione avrebbe dunque come soluzioni $\boxed{x<7\ \vee\ x\ge 9}$.

ESEMPI SVOLTI SULLE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI DEL 1° E DEL 2° TIPO

1)

$\boxed{\sqrt{x^2+1}<1-3x}$

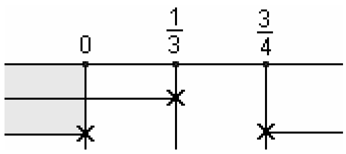
La disequazione assegnata
è del “1° tipo”;
passo allora al sistema equivalente

$$\boxed{\begin{matrix}1°\ \text{TIPO}\\ \sqrt{A(x)}<B(x)\end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}A(x)\ge 0 & \text{condizione "di realtà del radicale"}\\ B(x)>0 & \text{condiz. "di positività del 2° membro"}\\ A(x)<[B(x)]^2\end{cases}}$$

$$\begin{cases}x^2+1\ge 0\\ 1-3x>0\\ x^2+1<(1-3x)^2\end{cases}$$

NOTA
Una condizione sempre verificata è,
nell’ambito di un sistema, superflua, ininfluente,
e pertanto può essere ignorata, può essere eliminata.

$$\begin{cases}\text{SEMPRE VERIFICATA, }\forall x\ \ \text{(NOTA)}\\ -3x>-1;\ \ 3x<1;\ \ x<1/3\\ x^2\cancel{+1}<\cancel{1}-6x+9x^2;\ \ -8x^2+6x<0;\ \ \overset{4}{\cancel{8}}x^2-\overset{3}{\cancel{6}}x>0;\ \ x(4x-3)>0;\ \ x<0\vee x>3/4\end{cases}$$



$\boxed{x<0}$: le soluzioni del sistema, quindi della disequaz., sono i numeri negativi.

2)

$\boxed{\sqrt{x+2}>2x+1}$

La disequazione assegnata
è del “2° tipo”;
passo allora ai due
sistemi equivalenti

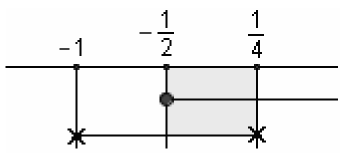
$$\boxed{\begin{matrix}2°\ \text{TIPO}\\ \sqrt{A(x)}>B(x)\end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}A(x)\ge 0\\ B(x)<0\end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases}\cancel{A(x)\ge 0} & \text{superflua, perché implicita nella 3}^{a}\\ B(x)\ge 0\\ A(x)>[B(x)]^2\end{cases}}$$

$$\begin{cases}x+2\ge 0\\ 2x+1<0\end{cases} \vee \begin{cases}\cancel{x+2\ge 0}\ \text{superflua, implicita nella 3}^{a}\\ 2x+1\ge 0\\ x+2>(2x+1)^2\end{cases}$$

I due sistemi sono separati da un “vel” logico:
un valore di x sarà soluzione della mia disequaz. qualora sia soluzione *o* dell’uno, *oppure* dell’altro sistema (alla fine, farò l’*unione insiemistica* fra gli insiemi delle soluzioni dei due sistemi).

$$\begin{cases}x+2\ge 0;\ \ x\ge -2\\ 2x+1<0;\ \ x<-1/2\end{cases}\qquad -2\le x<-\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}2x+1\ge 0;\ \ x\ge -1/2\\ x+2>(2x+1)^2;\ \ -4x^2-3x+1>0;\ \ 4x^2+3x-1<0;\ \ -1<x<1/4\end{cases}$$

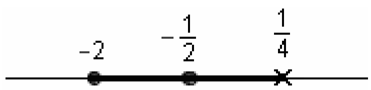


$\boxed{-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{4}}$

Soluzioni della disequazione:

$-2\le x<-\frac{1}{2}\ \vee\ -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{4}$,

ossia, utilizzando eventualmente uno “schema di unione” →
(ma la situazione è qui particolarmente semplice,
potremmo benissimo fare a meno dello “schema di unione”):



$\boxed{-2\le x<\frac{1}{4}}$

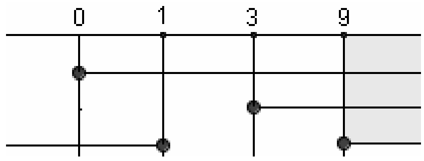
3)

$\boxed{2\sqrt{x} \le x-3}$ $\quad \left(\sqrt{4x} \le x-3\right)$

La disequazione assegnata è una variante del “1° tipo”; se ripercorri i ragionamenti fatti a pag. 11, adattandoli alla presenza di un $\le$ anziché di un $<$, capirai che il sistema equivalente è

$$\begin{cases} 4x \ge 0 \\ x-3 \boxed{\ge} 0 \\ 4x \boxed{\le} (x-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x \ge 3 \\ 4x \le x^2-6x+9;\ \ x^2-10x+9 \ge 0;\ \ (x-1)(x-9) \ge 0;\ \ x \le 1 \ \vee\ x \ge 9 \end{cases}$$



Le soluzioni del sistema, e quindi della disequazione proposta, sono i valori $\boxed{x \ge 9}$.

4)

$\boxed{\sqrt{x^2-5x+4} \ge x}$

La disequazione assegnata è una variante del “2° tipo”; se ripercorri i ragionamenti fatti a pag. 12, adattandoli alla presenza di un $\ge$ anziché di un $>$, capirai che la coppia di sistemi equivalenti è

$$\begin{cases} x^2-5x+4 \ge 0 \\ x < 0 \ \text{(NOTA)} \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{x^2-5x+4 \ge 0} \ \text{superflua, implicita nella } 3^{a} \\ x \ge 0 \\ x^2-5x+4 \boxed{\ge} x^2 \end{cases}$$

NOTA
Nulla cambia qui,
perché la distinzione di casi
(x<0, oppure,
nell’altro sistema, $x \ge 0$)
è sempre la stessa!

$$\begin{cases} x^2-5x+4 \ge 0; \quad x \le 1 \ \vee\ x \ge 4 \\ x < 0 \end{cases} \quad \text{Soluz. 1° sistema: } x < 0$$

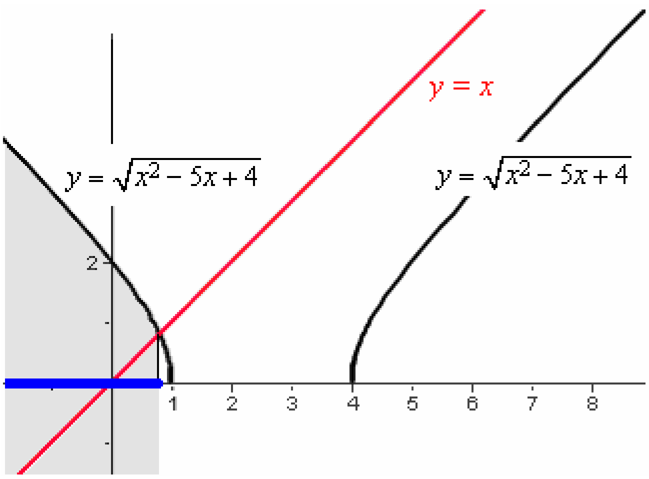
$$\begin{cases} x \ge 0 \\ \cancel{x^2}-5x+4 \ge \cancel{x^2};\ \ 5x-4 \le 0;\ \ x \le 4/5 \end{cases} \quad \text{Soluz. 2° sistema: } 0 \le x \le 4/5$$

Con o senza lo “schema di unione” (che comunque riportiamo qui a destra)

si trae che le soluzioni della disequazione sono i valori $\boxed{x \le \frac{4}{5}}$

Vogliamo ***controllare per via grafica*** *la validità della conclusione ottenuta?*

Ci basterà utilizzare un qualunque software, ad esempio il freeware GEOGEBRA, che sia in grado di diagrammare una funzione, per tracciare i grafici del primo membro e del secondo membro in uno stesso riferimento cartesiano, ***e poi andare a vedere per quali valori di x la y corrispondente sul grafico del primo membro è maggiore, o uguale, della y corrispondente sul grafico del 2° membro.***



La curva $y=\sqrt{x^2-5x+4}$ *è costituita da due rami.*
Effettivamente, la conclusione
$\boxed{x \le \frac{4}{5}}$
appare plausibile.

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI: CASI PARTICOLARI DEL 1° TIPO E DEL 2° TIPO

5)

$\sqrt{x-7}<2$

E' del 1° tipo. La teoria generale ci dice che la disequazione equivale ad un sistema con 3 condizioni:

$$\boxed{\begin{array}{c}1°\text{ TIPO}\\ \sqrt{A(x)}<B(x)\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}A(x)\ge 0 & \text{condizione "di realtà del radicale"}\\ B(x)>0 & \text{condiz. "di positività del 2° membro"}\\ A(x)<[B(x)]^2\end{cases}} \quad \text{cioè, in questo caso,} \quad \begin{cases}x-7\ge 0\\ \cancel{2>0}\\ x-7<4\end{cases}$$

Osserviamo però che la seconda condizione è una disuguaglianza numerica non contenente l'incognita, vera di per sé, quindi superflua (*per questo* l'abbiamo cancellata).

Allora il sistema si riduce alle sole due condizioni $\begin{cases}\boxed{x-7\ge 0}\ \text{(di realtà)};\ x\ge 7\\ \boxed{x-7<4};\ x<11\end{cases}$

La nostra disequazione ha dunque come soluzioni i valori $\boxed{7\le x<11}$.

Si sarebbe potuto anche arrivare a questa conclusione più rapidamente:
data la disequazione $\sqrt{x-7}<2$, noi possiamo scrivere la condizione di realtà $x-7\ge 0$,
alla quale comunque x dovrà *necessariamente* soddisfare per essere soluzione, poi
(essendo i due membri certamente esistenti e positivi per ogni valore di x che soddisfa
tale condizione di realtà) elevare al quadrato ottenendo $x-7<4$.

Se dunque x è soluzione della disequazione data, allora x sarà soluzione del sistema $\begin{cases}x-7\ge 0\\ x-7<4\end{cases}$;

e si può controllare che vale pure il *viceversa*, cioè che ogni soluzione del sistema lo è anche della diseq.
(se x è soluz. del sistema, in particolare verifica la 2^a condizione e ne rende entrambi i membri positivi;
ma se i due membri di una disuguaglianza vera sono positivi,
allora è vera pure la disuguaglianza ottenibile estraendo la radice quadrata)

6)

$\sqrt{x^2-9}>4$

Qui siamo nel 2° tipo.
La teoria generale ci dice che la disequazione equivale a una coppia di sistemi, separati da un "vel" logico:

$$\boxed{\begin{array}{c}2°\text{ TIPO}\\ \sqrt{A(x)}>B(x)\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}A(x)\ge 0\\ B(x)<0\end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases}\cancel{A(x)\ge 0} & \text{superflua, perché implicita nella } 3^a\\ B(x)\ge 0\\ A(x)>[B(x)]^2\end{cases}} \quad \text{ossia} \quad \cancel{\begin{cases}x^2-9\ge 0\\ 4<0\end{cases}} \vee \begin{cases}\cancel{4\ge 0}\\ x^2-9>16\end{cases}$$

Spieghiamo ora le **cancellazioni**.
il 1° sistema, contenendo una condizione impossibile, è impossibile cioè
non è verificato da nessun valore di x (non ci porta soluzioni, *per questo* l'abbiamo cancellato);
nel 2° sistema, la condizione $4\ge 0$ non contiene x ed è banalmente vera, quindi è superflua, cancellabile.
Sopravvive la sola condizione $x^2-9>16$,
risolvendo la quale si trovano dunque le soluzioni della disequazione:

$\boxed{x^2-9>16}$; $x^2>25$; $|x|>5$; $\boxed{x<-5 \vee x>5}$.

Si sarebbe potuto anche arrivare a questa conclusione **più rapidamente**:
data la disequazione $\sqrt{x^2-9}>4$ noi possiamo scrivere la condizione di realtà $x^2-9\ge 0$,
ponendo così alla x un vincolo al quale x dovrà *per forza* soddisfare se vuole essere soluzione,
poi (dato che i due membri sono ≥ 0 per ogni valore di x) elevare al quadrato ottenendo $x^2-9>16$;
sennonché, la condizione così ottenuta rende inutile a questo punto quell'altra,
perché se un numero è maggiore di 16, allora è *certamente* anche maggiore di 0.
In definitiva, dalla disequazione discende come conseguenza la condizione $x^2-9>16$;
e viceversa ,
se x verifica quest'ultima condizione, allora x rende vera una disuguaglianza fra numeri positivi
quindi renderà vera anche la disuguaglianza ottenibile estraendone la radice quadrata,
ossia la disuguaglianza $\sqrt{x^2-9}>4$.

7)
$\sqrt{3x-2} < -8$
Si vede istantaneamente che questa disequazione è **IMPOSSIBILE**.
Il risultato di un'estrazione di radice quadrata, quando esiste in campo reale, è *sempre* ≥ 0, non può quindi *mai* essere minore di un numero negativo.

8)
$\sqrt{3x-2} > -8$
Il risultato di un'estrazione di radice quadrata, *quando esiste* in campo reale, è *sempre* ≥ 0, quindi *certamente* maggiore di un numero negativo.
Le soluzioni di questa disequazione sono dunque tutti e soli i valori di x che rendono possibile l'estrazione di radice restando in campo reale.
La disequazione data **EQUIVALE** perciò **ALLA SOLA CONDIZIONE DI REALTA'**
$\boxed{3x-2 \geq 0}$; $x \geq 2/3$.
Controlla pure, caro lettore, come, se avessimo applicato pedissequamente la "normale" teoria sulle disequazioni irrazionali del 1° e del 2° tipo alle disequazioni 7) e 8), saremmo giunti alle medesime conclusioni alle quali ci ha consentito di pervenire un ragionamento più rapido.

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI: UN ALTRO CASO

E se avessimo $\boxed{\sqrt{\mathrm{A}(x)} \lessgtr \sqrt{\mathrm{B}(x)}}$, come dovremmo comportarci?

Osserviamo innanzitutto che possiamo pensare soltanto al <, oppure soltanto al >, a nostra scelta, in quanto i due casi sono perfettamente speculari (studiato uno, è studiato anche l'altro, perché riconducibile al precedente semplicemente riscrivendo la disuguaglianza al rovescio, da destra a sinistra).

Pensiamo allora, ad esempio, alla
(*) $\sqrt{\mathrm{A}(x)} < \sqrt{\mathrm{B}(x)}$.

Innanzitutto, se un valore di x soddisfa alla (*), allora renderà estraibili in campo reale entrambi i radicali, cioè soddisferà simultaneamente ad entrambe le condizioni $\mathrm{A}(x) \geq 0$, $\mathrm{B}(x) \geq 0$ e inoltre, rendendo vera una disuguaglianza fra numeri positivi, verificherà anche la disuguaglianza ottenibile elevando al quadrato: $\mathrm{A}(x) < \mathrm{B}(x)$.

Pertanto, se x è soluzione della (*), allora x sarà soluzione anche del sistema

$$(**) \quad \begin{cases} \mathrm{A}(x) \geq 0 \\ \mathrm{B}(x) \geq 0 \\ \mathrm{A}(x) < \mathrm{B}(x) \end{cases}$$

E' poi facile controllare che se x è soluzione di (**), allora x è anche soluzione di (*) (di una disuguaglianza fra numeri positivi è lecito estrarre la radice quadrata).

Pertanto (*) ha come SISTEMA EQUIVALENTE (**).
Osserviamo, fra l'altro, che in (**) la 2^a condizione è superflua, perché è conseguenza delle altre due.

In definitiva avremo:

$$\sqrt{\mathrm{A}(x)} < \sqrt{\mathrm{B}(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A}(x) \geq 0 \\ \cancel{\mathrm{B}(x) \geq 0} \text{ superflua, implicita nelle altre due} \\ \mathrm{A}(x) < \mathrm{B}(x) \end{cases}$$

9) Un esempio:
$\sqrt{2x-3} > \sqrt{x-4}$

Abbiamo volutamente preso un esempio col > anziché col < !
Se vuoi, puoi riscrivere al rovescio $\sqrt{x-4} < \sqrt{2x-3}$,
ma questo non è indispensabile per il ragionamento.

Dunque:

$$\begin{cases} \cancel{2x-3 \geq 0} \text{ superflua, implicita nelle altre due} \\ x-4 \geq 0; \quad x \geq 4 \\ 2x-3 > x-4; \quad x > -1 \end{cases} \quad \text{da cui } \boxed{x \geq 4}.$$

NOTA
Se ti dimentichi
di cancellare
una condizione superflua,
la cosa non deve preoccuparti:
l'esercizio esce giusto lo stesso!

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI: ULTERIORI TIPI DI ESERCIZI

Se poi avessimo esercizi più complicati, potremmo comportarci come nell'esempio seguente.

10) $\boxed{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}>2}$

Può una disuguaglianza o una disequazione essere elevata al quadrato?
O essere sottoposta ad estrazione di radice quadrata?
Ribadiamolo:
entrambi i passaggi si possono effettuare *a condizione che* i due membri siano costanti *positive* (≥ 0), oppure siano espressioni contenenti l'incognita, ma *positive* (≥ 0) per *ogni* valore dell'incognita, o meglio per *tutti i valori dell'incognita che vengono presi in considerazione in quel particolare contesto.*

Allora: **trasportiamo** il secondo radicale a secondo membro,

$\sqrt{2x+1}>2+\sqrt{x-3}$

e tenendo conto che quando una radice quadrata esiste in campo reale, il suo valore è sempre positivo (≥ 0), ci troviamo di fronte proprio a una **disequazione a membri positivi**, che potrà essere elevata al quadrato. Dobbiamo però prima di tutto scrivere le "**condizioni di realtà dei radicali**" $2x+1\geq 0,\ x-3\geq 0$, ossia considerare esclusivamente quei valori di x che rendono estraibili entrambe le radici senza uscire da $\mathbb{R}$.

Controlla con attenzione lo schema qui sotto riportato:

$$\sqrt{2x+1}>2+\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ x-3\geq 0 \\ \left(\sqrt{2x+1}\right)^2>\left(2+\sqrt{x-3}\right)^2 \end{cases}$$

e vedrai che, in virtù di quanto detto nel riquadro sovrastante, grazie alla positività dei due membri della disequazione che viene elevata al quadrato, valgono effettivamente ENTRAMBE le implicazioni,
- **sia quella da sinistra a destra** (quindi: ogni soluz. della disequazione lo è anche del sistema),
- **sia quella da destra a sinistra** (quindi: ogni soluz. del sistema lo è anche della disequazione).

NOTA IMPORTANTISSIMA:
Quando si passa da una condizione
(equazione, disequazione, sistema …)
ad un'altra,
la nuova condizione è EQUIVALENTE
a quella di partenza quando valgono
ENTRAMBE le implicazioni:
$(1)\Rightarrow(2)$,
cioè ogni soluz. di (1) è anche soluz. di (2);
$(2)\Rightarrow(1)$,
cioè ogni soluz. di (2) è anche soluz. di (1)

Ora dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ x-3\geq 0 \\ \left(\sqrt{2x+1}\right)^2>\left(2+\sqrt{x-3}\right)^2; \quad 2x+1>4+x-3+4\sqrt{x-3}; \quad -4\sqrt{x-3}>-x; \quad 4\sqrt{x-3}<x \end{cases}$$

Risolviamo perciò la diseq. $4\sqrt{x-3}<x$, poi porremo le sue soluzioni a sistema con le altre due condizioni.

$$4\sqrt{x-3}<x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-3\geq 0 \\ x>0 \\ 16(x-3)<x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 3 \\ x>0 \\ x^2-16x+48>0; \quad x<4 \ \vee\ x>12 \end{cases} \qquad 3\leq x<4 \ \vee\ x>12$$

Pertanto $\begin{cases} 2x+1\geq 0;\ x\geq -1/2 \\ x-3\geq 0;\ x\geq 3 \\ 3\leq x<4 \ \vee\ x>12 \end{cases}$ e in definitiva, risolvendo il sistema, $\boxed{3\leq x<4 \ \vee\ x>12}$.

Di fronte a disequazioni irrazionali di forma non-standard, quindi,
- *si pongono le condizioni di realtà di ogni radice quadrata presente,*
- *si cerca, se possibile, di trasportare i termini in modo da ottenere due membri certamente positivi,*
- *e se questo passaggio preliminare ha successo si eleva al quadrato e si prosegue.*

In generale, di fronte ad ogni passaggio per la risoluzione di un'equazione, disequazione o sistema, occorre sempre chiedersi:
"Arrivati qui, SI POTREBBE TORNARE INDIETRO? La condizione ottenuta, o il sistema di condizioni ottenute, implica, a sua volta, la condizione o il sistema di partenza?"
SE LA RISPOSTA È AFFERMATIVA, IL PROCEDIMENTO È LECITO.

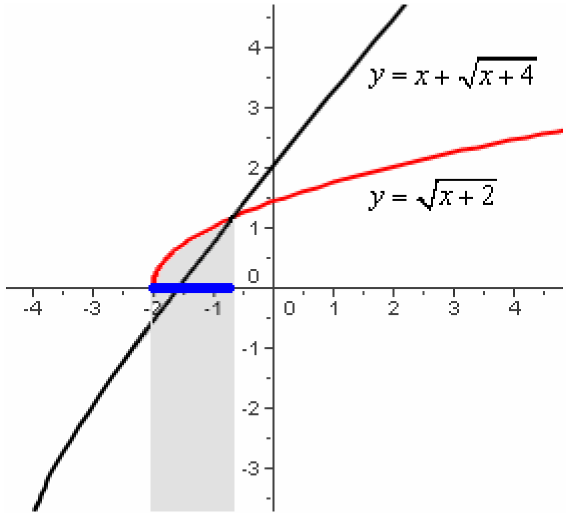
Una analisi attenta porterebbe a volte a riconoscere che alcune fra le condizioni poste sono superflue;
tuttavia, **una condizione superflua può essere benissimo mantenuta, perché in questo modo non si sbaglia**.

Nel caso non sia possibile effettuare trasporti in modo da ottenere due membri certamente positivi per ogni x, restano aperti metodi risolutivi che si appoggiano ad una rappresentazione grafica.

Prendiamo la disequazione

11) $\boxed{x+\sqrt{x+4}<\sqrt{x+2}}$

La presenza di coefficienti tutti positivi non inganni!
Le condizioni di realtà $x \ge -4,\ x \ge -2$
ci dicono che dev'essere $x \ge -2$
ma ciò non ci assicura che x sia positivo;
e per i valori di x compresi fra –2 e 0,
il 1° membro potrebbe assumere valore negativo.
Non è perciò vero che i due membri siano positivi "per tutti i valori di x che interessano":
non possiamo elevare al quadrato!
Facciamo un grafico al computer,
ad esempio col freeware GEOGEBRA.



Dal grafico possiamo desumere che la disuguaglianza è verificata per tutti gli x che vanno dall'ascissa –2 (ascissa a partire dalla quale comincia ad esistere la funzione $y=\sqrt{x+2}$) fino all'ascissa in corrispondenza della quale le due curve hanno il loro unico punto di intersezione.

Il software ci permette di determinare l'ascissa approssimativa del punto di intersezione fra i due grafici, che risulta essere circa $-0,67$.

La nostra diseq. ha come soluzioni i valori $\boxed{\mathbf{-2 \le x < -0,67}}$, dove quest'ultimo è un valore approssimato.

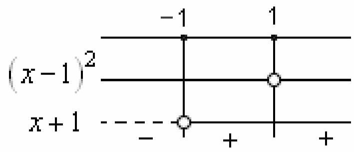
> Certo, risoluzioni grafiche di questo tipo presuppongono riflessioni *ulteriori* riguardanti l'andamento dei grafici, finalizzate a domandarsi se intersezioni o "scavalcamenti" di un grafico rispetto all'altro possano aver luogo in un campo di ascisse *che il software non ha visualizzato*. Insomma, va valutato, con ragionamenti vari, il comportamento *generale* dei due grafici, anche al di fuori della zona che il software ha reso visibile.

12) $\boxed{\sqrt[3]{x^2+x-1}<x}$

Qui per sbarazzarci della radice dobbiamo ELEVARE AL CUBO, quindi ad esponente dispari, PASSAGGIO SEMPRE LECITO, nel senso che porta sempre, senza dover porre nessuna condizione, ad una disequazione *equivalente* a quella di partenza.
Dunque:

$x^2+x-1<x^3$

$-x^3+x^2+x-1<0;\ \ x^3-x^2-x+1>0;\ \ \ldots\ ;\ \ (x-1)^2(x+1)>0;$



$\boxed{x>-1 \text{ ma } x \ne 1}$

13) $\boxed{\sqrt[4]{x^2+2}>x}$

Si capisce che in questo caso occorrerà elevare alla quarta (esp. pari), *nei casi in cui ciò sia possibile*, e si opererà esattamente come per le disequazioni irrazionali "del 2° tipo" $\sqrt{\mathrm{A}(x)}>\mathrm{B}(x)$. Dunque:

$$\sqrt[4]{x^2+2}>x \iff \begin{cases} x^2+2 \ge 0 \\ x<0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{x^2+2 \ge 0} \\ x \ge 0 \\ x^2+2>x^4 \end{cases}$$

$$1° \text{ sistema}: \begin{cases} x^2+2 \ge 0 \ \text{ sempre verificata} \\ \boxed{x<0} \end{cases}$$

$$2° \text{ sistema}: \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2+2>x^4;\ \ x^4-x^2-2<0;\ \ (x^2-2)\underbrace{\cancel{(x^2+1)}}_{>0\ sempre}<0;\ \ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \qquad \boxed{0 \le x<\sqrt{2}} \end{cases}$$

Soluzioni disequazione: $\ x<0 \ \vee\ 0 \le x<\sqrt{2}\ $ ossia $\boxed{x<\sqrt{2}}$

14) $\boxed{\dfrac{\sqrt{x+12}-x}{\sqrt{x}-x+6}<0}$

N > 0

$$\sqrt{x+12}-x>0$$
$$\sqrt{x+12}>x$$
$$\begin{cases} x+12\ge 0 \\ x<0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \cancel{x+12\ge 0}\ \ \textit{sovrabbondante} \\ x\ge 0 \\ x+12>x^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x\ge -12 \\ x<0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x-12<0 \quad (x+3)(x-4)<0 \quad -3<x<4 \end{cases}$$
$$\underbrace{-12\le x<0 \quad \vee \quad 0\le x<4}_{-12\le x<4}$$

La condizione di esistenza è: $x+12\ge 0,\ x\ge -12$
Dunque il Numeratore:

- esiste solo quando $x\ge -12$ (NON esiste per $x<-12$) ed è
- positivo per $-12\le x<4$
- nullo per $x=4$ (invece, come si può controllare, per $x=-12$ è >0)
- negativo per $x>4$

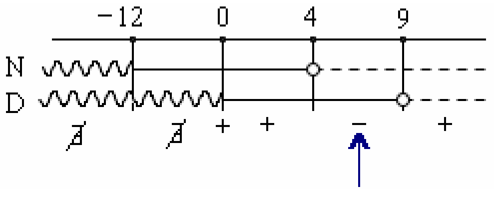
D > 0

$$\sqrt{x}-x+6>0$$
$$\sqrt{x}>x-6$$
$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x-6<0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \cancel{x\ge 0}\ \ \textit{sovrabbondante} \\ x-6\ge 0 \\ x>x^2-12x+36 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x<6 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x\ge 6 \\ x^2-13x+36<0 \quad (x-4)(x-9)<0 \quad 4<x<9 \end{cases}$$
$$\underbrace{0\le x<6 \quad \vee \quad 6\le x<9}_{0\le x<9}$$

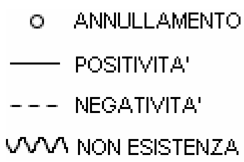
La condizione di esistenza è: $x\ge 0$
Dunque il Denominatore:

- esiste solo quando $x\ge 0$ (NON esiste per $x<0$) ed è
- positivo per $0\le x<9$
- nullo per $x=9$ (invece, come si può controllare, per $x=0$ è >0)
- negativo per $x>9$

Lo schema sottostante riassume lo studio di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore, sopra effettuato.



SIMBOLOGIA:



Osserviamo che
per $x = 0$
numeratore e denominatore
sono entrambi >0,
quindi la frazione è >0
e la disequazione
NON è verificata

La disequazione è verificata per $\boxed{4<x<9}$.

Se invece il verso fosse stato >, la disequazione avrebbe avuto come soluzioni $0\le x<4 \ \vee\ x>9$.

15) $\boxed{\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x^2-2x}>0}$

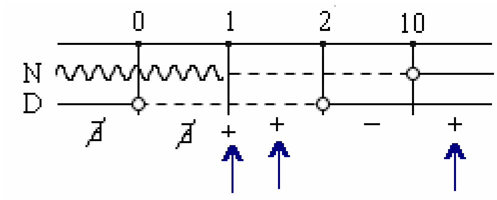
N > 0 $\sqrt{x-1}-3>0 \quad \sqrt{x-1}>3$

Sappiamo che per risolvere questa disequazione non è necessario porre alcuna condizione; tuttavia, della condizione di realtà $x-1\geq 0,\ x\geq 1$ *occorrerà tener conto nello schema finale!*

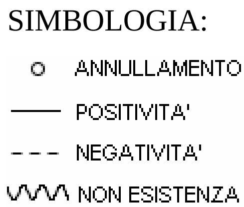
$x-1>9; \quad x>10$

Dunque il Numeratore: è >0 *per* $x>10$;
ma esiste solo per $x\geq 1$ (*non esiste quindi per* $x<1$)
perciò sarà <0 *quando* $1\leq x<10$.
Come si può controllare, il Numeratore è $=0$ *quando* $x=10$.

D > 0 $x^2-2x>0, \quad x(x-2)>0, \quad x<0 \vee x>2$



$\boxed{1\leq x<2 \ \vee \ x>10}$



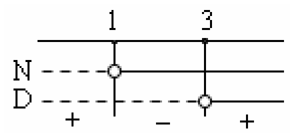
Osserviamo che per $x = 1$ numeratore e denominatore sono entrambi <0, quindi la frazione è >0 e la disequazione è verificata

16) $\boxed{\sqrt{\dfrac{x-1}{x-3}}<2}$

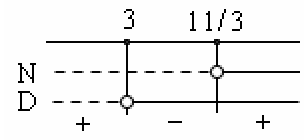
La disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-3}\geq 0 \\ \\ \dfrac{x-1}{x-3}<4 \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{x-3}\geq 0$$



$$\frac{x-1}{x-3}<4 \Leftrightarrow \frac{3x-11}{x-3}>0$$



Ti invito ad andare a vedere, a pag. 41, un bel metodo per risolvere rapidissimamente le disequazioni fratte, aventi N e D entrambi di 1° grado

La condizione $\dfrac{x-1}{x-3}\geq 0$ è verificata per $x\leq 1 \vee x>3$

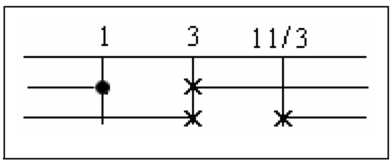
L'altra condizione $\dfrac{x-1}{x-3}<4$

equivale a $\dfrac{x-1}{x-3}-4<0; \quad \dfrac{x-1-4x+12}{x-3}<0; \quad \dfrac{11-3x}{x-3}<0; \quad \dfrac{3x-11}{x-3}>0$

ed e quindi verificata per $x<3 \vee x>11/3$

Il sistema diventa dunque

$$\begin{cases} x\leq 1 \vee x>3 \\ x<3 \vee x>11/3 \end{cases}$$



e le sue soluzioni, dunque anche le soluzioni della disequazione proposta, sono

$\boxed{x\leq 1 \vee x>\dfrac{11}{3}}$

SCHEMI RIASSUNTIVI

Tipologie principali

1° TIPO

La disequazione $\boxed{\sqrt{A(x)} < B(x)}$ è equivalente al sistema

$$\boxed{\begin{cases} A(x) \ge 0 & \text{condizione "di realtà del radicale"} \\ B(x) > 0 & \text{condizione "di positività del 2° membro"} \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}}$$

2° TIPO

La disequazione $\boxed{\sqrt{A(x)} > B(x)}$ è equivalente alla coppia di sistemi, separati da un VEL logico:

$$\boxed{\begin{cases} A(x) \ge 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases} A(x) \ge 0 \\ B(x) \ge 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}}$$

ossia ne sono soluzioni quei valori di x che rendono, in alternativa:
- *reale* il radicale e *negativo* il secondo membro;
- oppure *reale* il radicale, *positivo o nullo* il secondo membro e *verificata* la *condizione ottenibile elevando al quadrato*.

Si risolveranno i due sistemi, poi si accetteranno tanto le soluzioni dell'uno quanto quelle dell'altro: si farà cioè l'*unione insiemistica* fra gli insiemi delle soluzioni dei due sistemi.

Nel 2° sistema si potrebbe anche eliminare la prima fra le tre condizioni, perché implicita nella terza. Tenendola, però, non si sbaglia.

La disequazione $\boxed{\sqrt{A(x)} < \sqrt{B(x)}}$ è equivalente al sistema $\boxed{\begin{cases} A(x) \ge 0 \\ B(x) \ge 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases}}$

Nel sistema si potrebbe anche eliminare la condizione $B(x) \ge 0$ *, perché implicita nelle altre due. Tenendola, però, non si sbaglia.*

Varianti, casi particolari e altre tipologie

Abbiamo organizzato la rassegna in due colonne:
sulla *colonna sinistra*,
la disequazione;
sulla *colonna destra*,
il sistema equivalente, o la disequazione equivalente, o la condizione equivalente, o comunque la conclusione.

Un ottimo esercizio da parte tua sarebbe di coprire la seconda colonna per vedere se riesci a ricostruirla.

$\sqrt{A(x)} \le B(x)$	$\begin{cases} A(x) \ge 0 \\ B(x) \ge 0 \\ A(x) \le [B(x)]^2 \end{cases}$
$\sqrt{A(x)} \ge B(x)$	$\begin{cases} A(x) \ge 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \ge 0 \\ B(x) \ge 0 \\ A(x) \ge [B(x)]^2 \end{cases}$ *Nel 2° sistema si potrebbe anche eliminare la prima fra le tre condizioni, perché implicita nella terza. Tenendola, però, non si sbaglia.*
$\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$	$\begin{cases} A(x) \ge 0 \\ B(x) \ge 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases}$ *Nel sistema si potrebbe anche eliminare la condizione* $A(x) \ge 0$, *perché implicita nelle altre due. Tenendola, però, non si sbaglia.*

$\sqrt{A(x)} \geq \sqrt{B(x)}$	$\begin{cases} A(x) \geq 0 \text{ (eliminabile)} \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq B(x) \end{cases}$
$\sqrt{A(x)} \leq \sqrt{B(x)}$	$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \text{ (eliminabile)} \\ A(x) \leq B(x) \end{cases}$
$\sqrt{A(x)} < p \ \ (p \in \mathbb{R},\ p > 0)$	E' equivalente al sistema $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < p^2 \end{cases}$
$\sqrt{A(x)} < -p \ \ (p \in \mathbb{R},\ p > 0)$	E' impossibile
$\sqrt{A(x)} < 0$	E' impossibile
$\sqrt{A(x)} \leq p \ \ (p \in \mathbb{R},\ p > 0)$	E' equivalente al sistema $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) \leq p^2 \end{cases}$
$\sqrt{A(x)} \leq -p \ \ (p \in \mathbb{R},\ p > 0)$	E' impossibile
$\sqrt{A(x)} \leq 0$	E' equivalente all'equazione $A(x) = 0$
$\sqrt{A(x)} > p \ \ (p \in \mathbb{R},\ p > 0)$	E' equivalente alla disequazione $A(x) > p^2$
$\sqrt{A(x)} > -p \ \ (p \in \mathbb{R},\ p > 0)$	E' equivalente alla disequazione $A(x) \geq 0$
$\sqrt{A(x)} > 0$	E' equivalente alla disequazione $A(x) > 0$
$\sqrt{A(x)} \geq p \ \ (p \in \mathbb{R},\ p > 0)$	E' equivalente alla disequazione $A(x) \geq p^2$
$\sqrt{A(x)} \geq -p \ \ (p \in \mathbb{R},\ p > 0)$	E' equivalente alla disequazione $A(x) \geq 0$
$\sqrt{A(x)} \geq 0$	E' equivalente alla disequazione $A(x) \geq 0$
$\sqrt{A(x)} - \sqrt{B(x)} + \sqrt{C(x)} \lesseqgtr 0$	Si porta sotto la forma $\sqrt{A(x)} + \sqrt{C(x)} \lesseqgtr \sqrt{B(x)}$ che garantisce la positività dei due membri, si pongono le condizioni di realtà, si eleva al quadrato e si prosegue
$\sqrt[3]{A(x)} \lesseqgtr \sqrt[3]{B(x)}$	No problem: si eleva al cubo, quindi ad esponente dispari, ottenendo $A(x) \lesseqgtr B(x)$ senza dover porre nessuna condizione.
$\sqrt[3]{A(x)} \lesseqgtr B(x)$	No problem: si eleva al cubo, quindi ad esponente dispari, ottenendo $A(x) \lesseqgtr [B(x)]^3$ senza dover porre nessuna condizione.
$\sqrt[4]{A(x)} < B(x)$	Ci si comporta come se la radice fosse quadrata (1° tipo). Naturalmente, occorre elevare alla quarta anziché al quadrato.
$\sqrt[4]{A(x)} > B(x)$	Ci si comporta come se la radice fosse quadrata (2° tipo). Naturalmente, occorre elevare alla quarta anziché al quadrato.

ESERCIZI sulle disequazioni irrazionali (clicca sulla freccia, se c’è, per la correzione)

1) $\sqrt{2x+8}<x$ ⇨
2) $3\sqrt{x}<x+2$ ⇨
3) $\sqrt{x^2-4}+x<5$ ⇨
4) $\sqrt{x^2-4x+3}<x-2$

5) $\sqrt{30-x}<x$
6) $\sqrt{x^2-2x+5}<x$ ⇨
7) $\sqrt{x^2+1}\le x+3$ ⇨
8) $\sqrt{x-5}<2x-1$

9) $2\left(\sqrt{x}-x\right)<1-x$ ⇨
10) $\frac{\sqrt{x}+1}{2}\le x$ ⇨
11) $\sqrt{x+12}>x$ ⇨
12) $2\sqrt{x}+3>x$ ⇨

13) $\sqrt{2-x}>x$ ⇨
14) $\sqrt{4+x}>x-2$
15) $\sqrt{x^2-2x-3}>x$ ⇨
16) $\sqrt{2x^2-3x+1}>3-x$

17) $\sqrt{x}>x/3$ ⇨
18) $\sqrt{6x-14}>1-x$
19) $\sqrt{x^2+4}>x-5$ ⇨

20) $\sqrt{4x^2+2x+1}>x+1$ ⇨
21) $\sqrt{x^2-4x+3}\ge x-1$ ⇨
22) $\sqrt{5x-6}\ge x$

23) $\sqrt{x+3}\ge x+1$
24) $\sqrt{x+2}\ge\frac{x-1}{2}$ ⇨
25) $\sqrt{x^2-x}\ge x+2$
26) $\sqrt{7-x}>-5$ ⇨

27) $\sqrt{7-x}>2$ ⇨
28) $\sqrt{x^2-x-12}>3\sqrt{2}$
29) $\sqrt{4x^2-49}>0$
30) $3\sqrt{x+2}>-1$

31) $\sqrt{2x-3}<5$ ⇨
32) $\sqrt{4-x}<3$
33) $\sqrt{x^2-6x}<4$
34) $\sqrt{x^2-4x+3}\le 1$ ⇨

35) $\sqrt{x-5}\le\sqrt{3}$ ⇨
36) $\sqrt{8-x}<0$ ⇨
37) $\sqrt{x^2-5}<-9$
38) $\sqrt{\frac{x-3}{x}}<2$ ⇨

39) $\frac{1}{3}\sqrt{10-x}<2$
40) $\sqrt{\frac{x-1}{x-4}}>-3$ ⇨
41) $\sqrt{\frac{1+x^2}{2-x-x^2}}>-\frac{1}{4}$ ⇨
42) $\sqrt{3x-1}<\sqrt{x+7}$ ⇨

43) $\sqrt{x^2+4}>2\sqrt{x}$
44) $\frac{3}{4}\sqrt{x-1}>\sqrt{x-2}$
45) $\sqrt{x^2-3x+2}\ge\sqrt{x-1}$
46) $\sqrt{4-2x}\le\sqrt{3-x}$ ⇨

47) $\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\le\frac{\sqrt{x+1}}{3}$ ⇨
48) $\sqrt{\frac{x^2-2}{x-2}}<1$ ⇨
49) $\sqrt{\frac{x+8}{x-4}}<5$ ⇨

50) $\sqrt{\frac{6x}{x^2-16}}<1$ ⇨
51) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}-\sqrt{2x}<0$ ⇨
52) $\sqrt{x+3}>2-\sqrt{x-1}$ ⇨

53) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}<\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4}$ ⇨
54) $\sqrt{7-2x}<4+x$
55) $\sqrt{4x^2+3x}<2x+3$

56) $\sqrt{3x-2}\le x-4$
57) $\sqrt{1+x}\le 1-x$
58) $\left(\sqrt{x}+10\right):3>x$
59) $\sqrt{x^2+2x+3}>x+1$

60) $2\sqrt{2x^2-3x+1}\ge x-2$
61) $\sqrt{x-2}+x\ge 4$
62) $\sqrt{3-x}<2$

63) $\frac{1}{3}\sqrt{x-2}<2$
64) $\sqrt{x^2-6x-7}>3$
65) $3-\sqrt{x^2-1}<0$
66) $2>\sqrt{x^2-5}$

67) $\sqrt[3]{x^3+6x^2}>x+2$
68) $\sqrt[3]{x^3-1}<x-1$
69) $\sqrt[3]{x+4}\le 5$
70) $\sqrt{3x+1}>\sqrt{4-2x}$

71) $\sqrt{x}\le\sqrt{x^2-12}$
72) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}>1$
73) $\sqrt{6-x}>4-\sqrt{x+4}$
74) $\frac{\sqrt{3x+1}-2x}{\sqrt{4x-3}-x}<0$ ⇨

75) $\frac{\sqrt{4x+5}-x}{2\sqrt{x}-x+3}\ge 0$ ⇨
76) $\frac{\sqrt{x-2}-x}{\sqrt{x+2}-x}>0$ ⇨
77) $\frac{\sqrt{x^2-4}-x+3}{\sqrt{x^2+4}-x-5}<0$ ⇨

78) $\frac{\sqrt{x^2+x-6}-x}{\sqrt{x+2}-3}>0$ ⇨
79) $\frac{x-\sqrt{x+12}}{\sqrt{x+12}-5}\le 0$ ⇨
80) $\frac{2-\sqrt{3-x}}{x^2+x-6}\ge 0$ ⇨

81) $\frac{\sqrt{x-4}-3}{\sqrt{x-2}-1}<0$ ⇨
82) $\frac{2x^2-7x+6}{\sqrt{x-1}}>0$ ⇨
83) $\frac{\sqrt{x-2}}{x-4}\le 0$ ⇨
84) $\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-2}}<0$ ⇨

85) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}>0$ ⇨
86) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\ge 0$ ⇨
87) $\frac{\sqrt{1-8x}}{\sqrt{1+2x-8x^2}-4x}>0$ ⇨

88) $\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x^2-12}}{121-x^2}\ge 0$ ⇨
89) $\sqrt{\frac{x-7}{x+5}}>-3$ ⇨
90) $\sqrt{\frac{x-7}{x+5}}>3$ ⇨
91) $\sqrt{\frac{x-7}{x+5}}<3$ ⇨

92) $\sqrt[3]{x^3-7}+1<x$
93) $\sqrt[3]{5x^2+4x}<x+2$
94) $\sqrt[3]{13x-12x^2}>2x-1$ ⇨

SOLUZIONI

1) $x>4$ 2) $0\le x<1 \vee x>4$ 3) $x\le -2 \vee 2\le x<29/10$
4) $x\ge 3$ 5) $5<x\le 30$ 6) $x>5/2$
7) $x\ge -4/3$ 8) $x\ge 5$ 9) $x\ge 0$ ma $x\ne 1$
10) $x\ge 1$ 11) $-12\le x<4$ 12) $0\le x<9$
13) $x<1$ 14) $-4\le x<5$ 15) $x\le -1$
16) $x<\dfrac{-3-\sqrt{41}}{2} \vee x>\dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}$ 17) $0<x<9$ 18) $x\ge 7/3$
19) sempre verificata, $\forall x\in\mathbb{R}$ 20) $x\ne 0$ 21) $x\le 1$
22) $2\le x\le 3$ 23) $-3\le x\le 1$ 24) $-2\le x\le 7$
25) $x\le -4/5$ 26) $x\le 7$ 27) $x<3$
28) $x<-5 \vee x>6$ 29) $x<-7/2 \vee x>7/2$ 30) $x\ge -2$
31) $3/2\le x<14$ 32) $-5<x\le 4$ 33) $-2<x\le 0 \vee 6\le x<8$
34) $2-\sqrt{2}\le x\le 1 \vee 3\le x\le 2+\sqrt{2}$ 35) $5\le x\le 8$ 36) impossibile
37) impossibile 38) $x<-1 \vee x\ge 3$ 39) $-26<x\le 10$
40) $x\le 1 \vee x>4$ 41) $-2<x<1$ 42) $1/3\le x<4$
43) $x\ge 0$ *ma* $x\ne 2$ 44) $2\le x<23/7$ 45) $x=1 \vee x\ge 3$
46) $1\le x\le 2$ 47) $x=-1 \vee 1\le x\le 13/9$ 48) $-\sqrt{2}\le x<0 \vee 1<x\le\sqrt{2}$
49) $x\le -8 \vee x>9/2$ 50) $-2<x\le 0 \vee x>8$ 51) $3\le x<2+\sqrt{5}$
52) $x>1$ 53) $x\ge -1$ 54) $-1<x\le 7/2$
55) $-1<x\le -3/4 \vee x\ge 0$ 56) $x\ge 9$ 57) $-1\le x\le 0$
58) $0\le x<4$ 59) sempre verificata, $\forall x\in\mathbb{R}$ 60) $x\le 1/2 \vee x\ge 1$
61) $x\ge 3$ 62) $-1<x\le 3$ 63) $2\le x<38$
64) $x<-2 \vee x>8$ 65) $x<-\sqrt{10} \vee x>\sqrt{10}$ 66) $-3<x\le -\sqrt{5} \vee \sqrt{5}\le x<3$
67) $x<-2/3$ 68) $0<x<1$ 69) $x\le 121$
70) $3/5<x\le 2$ 71) $x\ge 4$ 72) $2\le x<6$
73) $-3<x<5$ 74) $3/4\le x<3$ *ma* $x\ne 1$ 75) $0\le x\le 5 \vee x>9$
76) $x>2$ 77) $-\dfrac{21}{10}<x\le -2 \vee x\ge 2$ 78) $2\le x<6 \vee x>7$
79) $4\le x<13$ 80) $-3<x\le -1 \vee 2<x\le 3$ 81) $4\le x<13$
82) $1<x<3/2 \vee x>2$ 83) $2\le x<4$ 84) impossibile
85) $x>0$ 86) $x\ge 1$ 87) $-1/4\le x<1/8$
88) $2\sqrt{3}\le x\le 6 \vee x>11$ 89) $x<-5 \vee x\ge 7$ 90) $-13/2<x<-5$
91) $x<-\dfrac{13}{2} \vee x\ge 7$ 92) $-1<x<2$ 93) $x>-1$ 94) $x<\dfrac{-2-\sqrt{2}}{4} \vee \dfrac{-2+\sqrt{2}}{4}<x<1$

Una domenica
← del 1°
e del
2° tipo →

Vuoi
essere
triste e
irrazionale
anche tu?

RICHIAMI SUL SIMBOLO DI VALORE ASSOLUTO

Cosa si intende per "*valore assoluto*" di un numero relativo?
Di solito il concetto viene introdotto ponendo la seguente

Definizione 1

Il valore assoluto di un numero relativo è "il numero privato del suo segno".

Quindi, ad esempio, il valore assoluto di -4 *è* 4*, e il valore assoluto di* $+\frac{1}{3}$ *è* $\frac{1}{3}$.

Simbologia:

Per indicare il valore assoluto di un numero relativo, si utilizza una coppia di **stanghette verticali** e quindi si può scrivere, ad esempio, $|-4|=4$, $\left|+\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$ (*leggi: il valore assoluto di* -4 *è* 4*, ecc.*)

Tuttavia, esistono anche *modi alternativi* di dare la definizione di "valore assoluto".
Poiché un numero assoluto (= senza segno) coincide sostanzialmente con un positivo,
e quindi, ad es., $4=+4$, $\frac{1}{3}=+\frac{1}{3}$, si capisce che una definizione equivalente a quella sopra riportata è:

Definizione 2

Si dice "valore assoluto" di un numero relativo:

- **il numero stesso, se questo è positivo o nullo;**
- **l'opposto del numero, se questo è negativo.**

Schematicamente: $|\mathbf{a}| = \begin{cases} \mathbf{a}, & \textbf{se } \mathbf{a} \geq 0 \\ -\mathbf{a}, & \textbf{se } \mathbf{a} < 0 \end{cases}$

Siccome poi il numero 0 coincide col suo opposto (NOTA) la definizione precedente potrebbe, volendo, essere ritoccata come segue:

NOTA
$0=+0=-0$, *o anche: l'opposto di un numero relativo x può – anzi, dovrebbe – essere definito come quel numero relativo y tale che y+x=0, quindi l'opposto di 0 è ancora 0*

Definizione 2'

Si dice "valore assoluto" di un numero relativo:

- **il numero stesso, se questo è positivo o nullo;**
- **l'opposto del numero, se questo è negativo o nullo.**

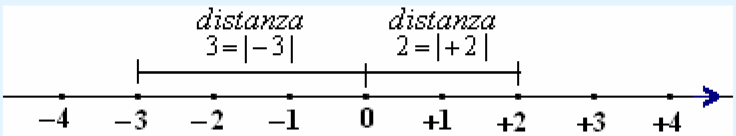
Schematicamente: $|\mathbf{a}| = \begin{cases} \mathbf{a}, & \textbf{se } \mathbf{a} \geq 0 \\ -\mathbf{a}, & \textbf{se } \mathbf{a} \leq 0 \end{cases}$

Questa 2' è spesso preferita alla 2, perché permette di far rientrare lo 0 indifferentemente nell'uno o nell'altro caso, e ciò può esser comodo.

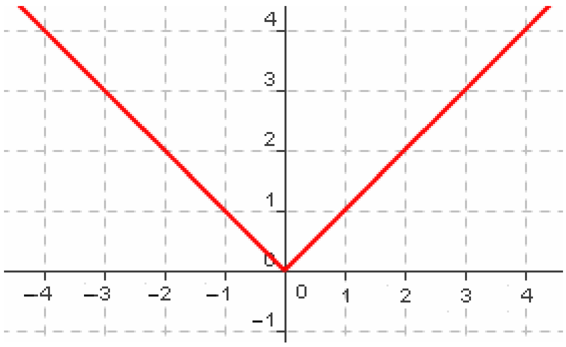
E' sovente utilissimo tener presente anche la seguente (ed equivalente alle precedenti)

Definizione 3

Il "valore assoluto" di un numero relativo è la DISTANZA DALL'ORIGINE del punto che, su di una *number line*, rappresenta quel numero.



La **funzione "valore assoluto"** è la funzione $y=|x|$ il cui grafico è raffigurato qui a fianco: è molto utile ricordare la sua forma " appuntita a V ".



x	$y=\lvert x\rvert$
–3	3
–2	2
–1	1
0	0
+1	1
+2	2
+3	3

PROPRIETA': $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$ $\quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ $\quad |a|^2=a^2$ $\quad |a+b|\leq|a|+|b|$ $\quad |a-b|\geq\big||a|-|b|\big|$

C) LE EQUAZIONI COL SIMBOLO DI VALORE ASSOLUTO

Iniziamo da alcuni casi particolari.

1) $\boxed{|x-5|=3}$

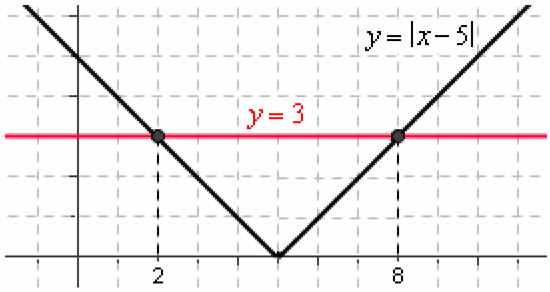
Il valore assoluto di un numero è uguale a 3 quando quel numero vale +3 oppure vale –3 !

Quindi:

$$\boxed{x-5=\pm 3}\left\langle\begin{array}{ll} x-5=3 & \boxed{x=8} \\ x-5=-3 & \boxed{x=2}\end{array}\right.$$

In generale,
un'equazione della forma
$\boxed{|A(x)|=p \quad (p\in\mathbb{R},\ p>0)}$
è equivalente
alla coppia di equazioni
$A(x)=\pm p$
ossia equivale ad
$A(x)=p \ \vee\ A(x)=-p$

Graficamente:



Come risulta da quanto detto sulla "manipolazione di grafici" (Volume 2, pag. 114 e seguenti)
il grafico della funzione $y=|x-5|$ si ottiene

♪ **traslando** a *destra* di 5 unità il grafico della $y=|x|$,
OPPURE

♫ **disegnando il grafico della retta $y=x-5$, ed eliminando poi la sua parte con ordinate negative per sostituirla con la sua *simmetrizzazione* rispetto all'asse delle ascisse**.

2) $\boxed{|x-5|=-3}$

Si vede immediatamente che è $\boxed{\text{IMPOSSIBILE}}$:
un valore assoluto è sempre positivo o nullo, non potrà mai essere negativo.

Un'equazione della forma $\boxed{|A(x)|=-p \quad (p\in\mathbb{R},\ p>0)}$ è sempre IMPOSSIBILE

3) $\boxed{|x-5|=0}$

Il valore assoluto di un numero è 0 quando, e solo quando, quel numero è 0:
$\boxed{x-5=0}$, $\boxed{x=5}$

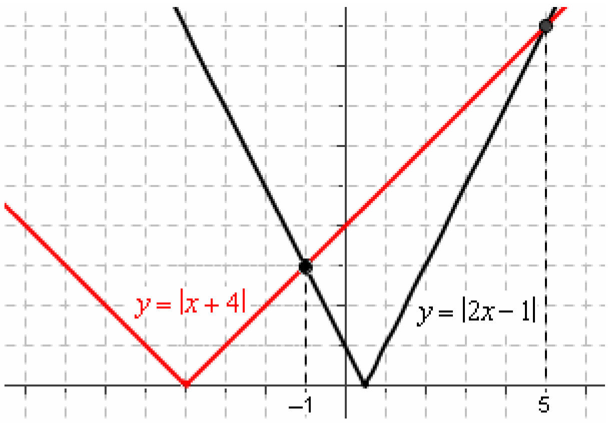
Un'equazione della forma $\boxed{|A(x)|=0}$ è equivalente all'equazione $A(x)=0$

4) $\boxed{|2x-1|=|x+4|}$

Due numeri hanno ugual valore assoluto quando sono uguali, oppure quando sono opposti!

$$\boxed{2x-1=\pm(x+4)}\left\langle\begin{array}{l} 2x-1=x+4;\quad \boxed{x=5} \\ 2x-1=-x-4;\quad 3x=-3;\quad \boxed{x=-1}\end{array}\right.$$

Un'equazione della forma
$\boxed{|A(x)|=|B(x)|}$
è equivalente
alla coppia di equazioni
$A(x)=\pm B(x)$
ossia equivale ad
$A(x)=B(x)\ \vee\ A(x)=-B(x)$



5)

$\boxed{|x-3| = 2x-1}$

Innanzitutto, un valore di *x*, per essere soluzione di questa equazione ,
dovrà necessariamente soddisfare alla condizione

$\boxed{2x-1 \ge 0 \;\; (x \ge 1/2)}$.

Se infatti un dato *x* NON soddisfa a tale condizione, quell'*x* NON può ambire ad essere soluzione:
il valore assoluto di un numero non può mai essere negativo.
Nell'ambito di quei valori di *x* per cui è $2x-1 \ge 0$,
saranno soluzioni gli *x* per i quali il numero $x-3$ ha, rispetto al numero $2x-1$,
a) valore uguale b) oppure valore opposto. Quindi:

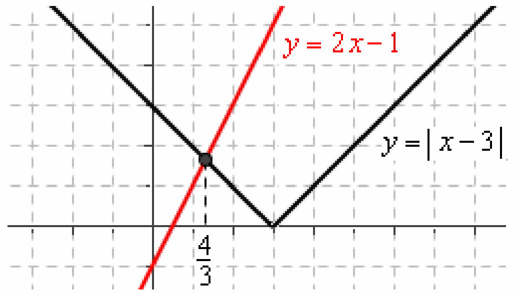
$$x-3 = \pm(2x-1) \left\langle \begin{array}{l} x-3 = 2x-1, \;\; -x = 2, \;\; \cancel{x=-2} \;\; \textit{non accettabile: non è } \ge 1/2 \\ x-3 = -2x+1, \;\; 3x = 4, \;\; \boxed{x = 4/3} \end{array} \right.$$

Un'equazione della forma

$\boxed{|A(x)| = B(x)}$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} B(x) \ge 0 \\ A(x) = \pm B(x) \end{cases}$$



6)

$\boxed{|x-1| + |x-4| + x = 11}$

Qui, **in presenza di più di una espressione entro le stanghette di valore assoluto**,
la risoluzione è più impegnativa, perché occorre *distinguere diversi casi.*

Innanzitutto, *studiamo il segno di ognuna delle espressioni entro le stanghette.*
Cosa vuol dire?
Vuol dire che *per ciascuna delle espressioni entro le stanghette, dobbiamo stabilire*:

- *per quali valori di x l'espressione in gioco è positiva*
- *per quali valori di x si annulla*
- *per quali valori di x è negativa*

Certo! Perché, ad esempio,

- per i valori di *x* per i quali l'espressione $x-1$ è positiva (≥ 0), avremo $|x-1| = x-1$
- per i valori di *x* per i quali l'espressione $x-1$ è negativa (≤ 0), avremo $|x-1| = -(x-1) = 1-x$

e quindi in base a questo *studio del segno* potremo sciogliere correttamente le stanghette di val. assoluto.

Per lo studio del segno di un'espressione,
come già abbiamo visto nel caso delle disequazioni di grado superiore al 2° o fratte,
basterà domandarsi per quali valori di x l'espressione in gioco è >0,
perché poi le altre due risposte "verranno di conseguenza".

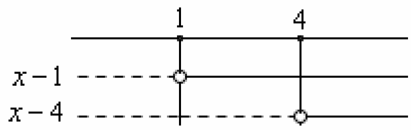
Successivamente allo *studio* dei segni, tracceremo uno *schema* "per il *confronto* dei segni",
(= "*quadro sinottico*") che ci darà una "visione panoramica" dei segni delle varie quantità prese in esame,
e ci permetterà di elaborare una casistica "per intervalli".
Dopodiché …
Ma facciamo riferimento all'esercizio specifico considerato, perché così si capirà meglio.
Dunque:

$\boxed{|x-1| + |x-4| + x = 11}$

a) STUDIO DEL SEGNO:

$$\begin{array}{ll} x-1>0 & x>1 \\ x-4>0 & x>4 \end{array}$$

b) QUADRO SINOTTICO:
("sinottico" vuol dire "che fa vedere le cose tutte assieme")



Simbologia
linea continua: espressione >0
linea tratteggiata: espressione <0
pallino vuoto: espressione = 0

c) DISTINZIONE DI CASI (3 intervalli, 3 casi)

1° caso: per $\boxed{x \le 1}$ (caso in cui le espressioni tra le stanghette sono entrambe negative) l'equaz. diventa:

$$\underbrace{\mathbf{1-x}}_{\substack{\text{il val. ass.}\\ \text{di un numero}\\ \le 0\\ \text{è l'opposto}\\ \text{di quel numero}}} + \underbrace{\mathbf{4-x}}_{\substack{\text{il val. ass.}\\ \text{di un numero}\\ \le 0\\ \text{è l'opposto}\\ \text{di quel numero}}} + x = 11;\ \ldots\ \boxed{x=-6}\ \textit{accettabile (rientra nell'intervallo considerato)}$$

2° caso: per $\boxed{1 \le x \le 4}$ (caso in cui le espressioni tra le stanghette sono: positiva la 1^a , negativa la 2^a) l'equazione diventa:

$$\underbrace{\mathbf{x-1}}_{\substack{\text{il val. ass.}\\ \text{di un numero}\\ \ge 0\\ \text{è il numero}\\ \text{stesso}}} + \underbrace{\mathbf{4-x}}_{\substack{\text{il val. ass.}\\ \text{di un numero}\\ \le 0\\ \text{è l'opposto}\\ \text{di quel numero}}} + x = 11;\ \ldots\ \cancel{x=8}\ \textit{non accettabile (non rientra nell'intervallo considerato)}$$

3° caso: per $\boxed{x \ge 4}$ (caso in cui le espressioni tra le stanghette sono entrambe positive) l'equazione diventa:

$$\underbrace{\mathbf{x-1}}_{\substack{\text{il val. ass.}\\ \text{di un numero}\\ \ge 0\\ \text{è il numero}\\ \text{stesso}}} + \underbrace{\mathbf{x-4}}_{\substack{\text{il val. ass.}\\ \text{di un numero}\\ \ge 0\\ \text{è il numero}\\ \text{stesso}}} + x = 11;\ \ldots\ \boxed{x=16/3}\ \textit{accettabile (rientra nell'intervallo considerato)}$$

Può essere utile osservare che **in pratica l'equazione data si è così ricondotta a più "sistemi *misti* "** (formati, cioè, da equazioni + disequazioni) separati da "vel" logici:

$$\boxed{|x-1|+|x-4|+x=11} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x \le 1 \\ 1-x+4-x+x=11 \end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ x-1+4-x+x=11 \end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases} x \ge 4 \\ x-1+x-4+x=11 \end{cases}}$$

In un sistema misto, si risolvono le *equazioni* e si accettano, fra le soluzioni trovate, solo quelle che soddisfano anche alle *disequazioni* presenti nel sistema.

… ed ecco la **risoluzione grafica**!

Il grafico di una funzione che presenti *x* più di una volta entro le stanghette di valore assoluto si traccia, in generale, studiando il segno di ogni espressione entro le stanghette poi facendo lo "schema per il confronto dei segni" e infine **distinguendo fra i vari intervalli**.

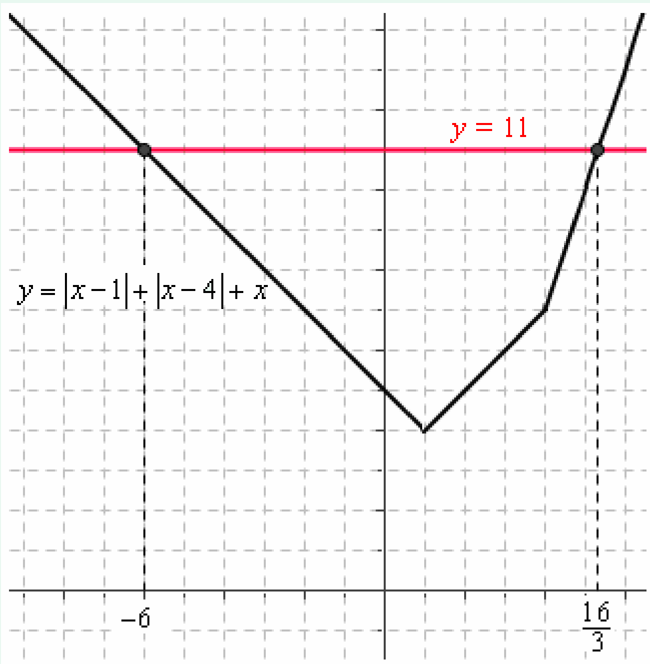
Nel nostro esempio, la funzione a primo membro $y=|x-1|+|x-4|+x$ diventa:

per $x \le 1$: $\quad y = 1-x+4-x+x;\ \boxed{y=5-x}$

per $1 \le x \le 4$: $\quad y = x-1+4-x+x;\ \boxed{y=x+3}$

per $x \ge 4$: $\quad y = x-1+x-4+x;\ \boxed{y=3x-5}$

A seconda delle varie "fasce di ascisse", si ottiene un "pezzo" di una differente funzione; i vari "pezzi" si "tengono per mano".



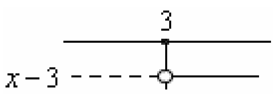
❑ Anche l'equazione del precedente esempio 5)

$\boxed{|x-3| = 2x-1}$

avrebbe potuto essere risolta, in alternativa, con questo metodo dello studio del segno, riferito all'*unica* espressione che in questo caso, compariva entro le stanghette:

$|x-3| = 2x-1$

$x-3>0 \quad x>3$



Per $x \le 3$: $\quad 3-x=2x-1;\ \ -3x=-4;\ \boxed{x=4/3}$

Per $x \ge 3$: $\quad x-3=2x-1;\ -x=2;\ \cancel{x=-2}$ *non acc.*

7) Vediamo un altro esempio.

$$\left|x^2-9\right|-\left|8-x\right|=x^2$$

Innanzitutto, **se si preferisce, è possibile portare sotto la forma**

$$\boxed{\left|x^2-9\right|-\left|x-8\right|=x^2}$$

perché $\left|8-x\right|=\left|x-8\right|$ (**numeri opposti hanno evidentemente ugual valore assoluto**).
L'espressione $x-8$ è più facile da gestire senza errori, rispetto alla $8-x$.

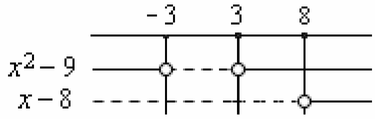
Si potrebbe anche, sempre per maggiore comodità, portare il termine preceduto dal segno – *dall'altra parte dell' =, in modo da far sì che sia preceduto da un +;*
tuttavia, volutamente, lo manterremo a 1° membro: *basterà stare un po' attenti!*

Dunque:

$$\boxed{\left|x^2-9\right|-\left|x-8\right|=x^2}$$

a) STUDIO DEL SEGNO: $x^2-9>0 \quad x<-3 \vee x>3$
$x-8>0 \quad x>8$

b) QUADRO SINOTTICO:



c) DISTINZIONE DI CASI

1° caso: $x\le -3 \quad \cancel{x^2}-9-(8-x)=\cancel{x^2} \;\ldots\; \cancel{x=17}$ *non accettabile* (*non è* ≤ -3)

2° caso: $-3\le x\le 3 \quad 9-x^2-(8-x)=x^2 \;\ldots\; 2x^2-x-1=0;\; \boxed{x=1} \vee \boxed{x=-\frac{1}{2}}$

3° caso: $3\le x\le 8 \quad \cancel{x^2}-9-(8-x)=\cancel{x^2} \;\ldots\; \cancel{x=17}$ *non acc.* (*non è compreso fra* 3 *e* 8)

(*avremmo anche potuto raggruppare il 1° e il 3° caso nell'unico caso* $x\le -3 \vee 3\le x\le 8$)

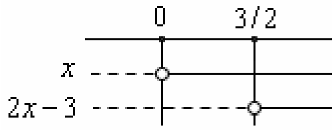
4° caso: $x\ge 8 \quad \cancel{x^2}-9-(x-8)=\cancel{x^2} \;\ldots\; \cancel{x=-1}$ *non acc.* (*non è* ≥ 8)

8) Ancora:

$$\boxed{|x|+|2x-3|=3}$$

a) STUDIO DEL SEGNO: $x>0$
$2x-3>0 \quad x>3/2$

b) QUADRO SINOTTICO:



c) DISTINZIONE DI CASI

1° caso: $x\le 0 \quad -x+3-2x=3;\; -3x=0;\; \boxed{x=0}$

2° caso: $0\le x\le 3/2 \quad x+3-2x=3;\; -x=0;\; \boxed{x=0}$

3° caso: $x\ge 3/2 \quad x+2x-3=3;\; 3x=6;\; \boxed{x=2}$

E' "normale" che la soluzione $x=0$ sia stata trovata due volte.
Infatti, **I CASI DA NOI CONSIDERATI NON SONO PERFETTAMENTE "DISGIUNTI"**,
perché *ciascun caso ha in comune col precedente e col successivo l'estremità di un intervallo.*
Ora, se fortuitamente capita che una soluzione dell'equazione
stia proprio lì, nell'estremità di un intervallo,
allora la soluzione in questione si presenterà per due volte,
in relazione sia all'intervallo "verso sinistra" che a quello "verso destra".

VOLENDO, SI POTREBBE LAVORARE CON CASI PERFETTAMENTE DISGIUNTI:
facendo riferimento, per comodità, all'ultima equazione, casi disgiunti sarebbero, ad esempio,
$x<0,\; 0\le x<3/2,\; x\ge 3/2$
oppure
$x\le 0,\; 0<x\le 3/2,\; x>3/2$
oppure …

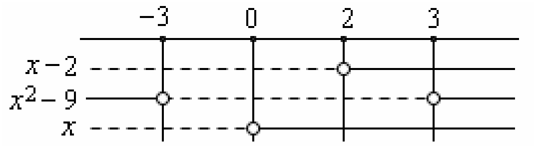
La possibilità di operare coi $\le, \ge$ sembra però preferibile perché più comoda.

9) Un ulteriore esempio, con risoluzione grafica.

$$\boxed{|x-2|+x^2=|x^2-9|+|x|+7}$$

a) STUDIO DEL SEGNO:
$x-2>0 \quad x>2$
$x^2-9>0 \quad x<-3 \vee x>3$
$x>0$

b) QUADRO SINOTTICO:



c) DISTINZIONE DI CASI

$x \le -3$

$\cancel{-x}+2\cancel{+x^2}=\cancel{x^2}-9\cancel{-x}+7$

$+2=-2$ impossibile

Pertanto, nell'intervallo $(-\infty,-3]$ non c'è nessuna soluzione.

$-3 \le x \le 0$

$\cancel{-x}+2+x^2=-x^2+9\cancel{-x}+7;\quad 2x^2=14;\quad x^2=7$

$x=\pm\sqrt{7}$ ⟨ $\boxed{-\sqrt{7}} \approx -2{,}65$; $\cancel{+\sqrt{7}}$ *non accettabile (non è compreso fra −3 e 0)*

$0 \le x \le 2$

$-x+2+x^2=-x^2+9+x+7;\quad 2x^2-2x-14=0;\quad x^2-x-7=0$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+28}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{29}}{2}=$ ⟨ $\cancel{\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}} \approx -2{,}19$ *non accettabile (non è compreso fra 0 e 2)* ; $\cancel{\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}} \approx 3{,}19$ *non acc. (non è compreso fra 0 e 2)*

$2 \le x \le 3$

$\cancel{x}-2+x^2=-x^2+9\cancel{+x}+7;\quad 2x^2=18;\quad x^2=9$

$x=\pm 3=$ ⟨ $\cancel{-3}$ *non acc. (non è compreso fra 2 e 3)* ; $\boxed{3}$

$x \ge 3$

$\cancel{x}\cancel{-2}\cancel{+x^2}=\cancel{x^2}\cancel{-9}\cancel{+x}\cancel{+7}$

Questa equazione è *indeterminata*,
è verificata per *qualsiasi* valore di x:
dunque TUTTI gli $x \ge 3$ sono soluzione.

In definitiva, le soluzioni della nostra equazione sono: $\boxed{x=-\sqrt{7}}$ e tutti gli infiniti valori $\boxed{x \ge 3}$

RISOLUZIONE GRAFICA

Abbiamo già risolto graficamente le equazioni di cui agli esempi 1), 4), 5) e 6).
L'esempio 9) è ancora più complicato a questo proposito, perché il simbolo di valore assoluto compare per ben tre volte, e inoltre compare sia a primo che a secondo membro.

Se vogliamo **risolvere graficamente** un'equazione nella quale l'incognita si presenta più di una volta entro le stanghette di valore assoluto, dovremo:

a) **STUDIARE IL SEGNO** di ogni singola espressione entro le stanghette
b) compilare un "**QUADRO SINOTTICO**" che riassuma tale studio dei segni
c) e, infine, **DISTINGUERE I VARI CASI** cioè andare a calcolare "cosa diventa" la funzione a *primo membro* in ciascuno degli intervalli relativi alla sua casistica, e lo stesso per la funzione a *secondo membro*.
I due grafici del 1° e del 2° membro verranno dunque tracciati "per pezzi", "per intervalli".

Illustriamo il procedimento riferendoci all'esempio precedente $\underbrace{|x-2|+x^2}_{1°\ membro} = \underbrace{|x^2-9|+|x|+7}_{2°\ membro}$

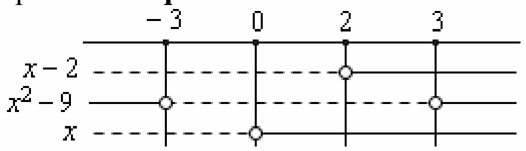
a) **Studiamo il segno** di ogni singola espressione entro le stanghette

$x-2>0 \quad x>2$

$x^2-9>0 \quad x<-3 \ \vee \ x>3$

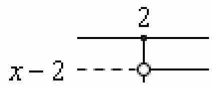
$x>0$

b) compiliamo il "**quadro sinottico**":

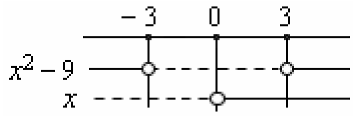


… volendo, possiamo fare due "quadri" separati,

uno per il 1° membro



e l'altro per il 2°:



c) **distinguiamo i vari casi,**
prima sul 1° e poi sul 2° membro

1° membro

Per la funzione a primo membro

$y=|x-2|+x^2$

occorre distinguere fra i due casi

$x \le 2$ e $x \ge 2$:

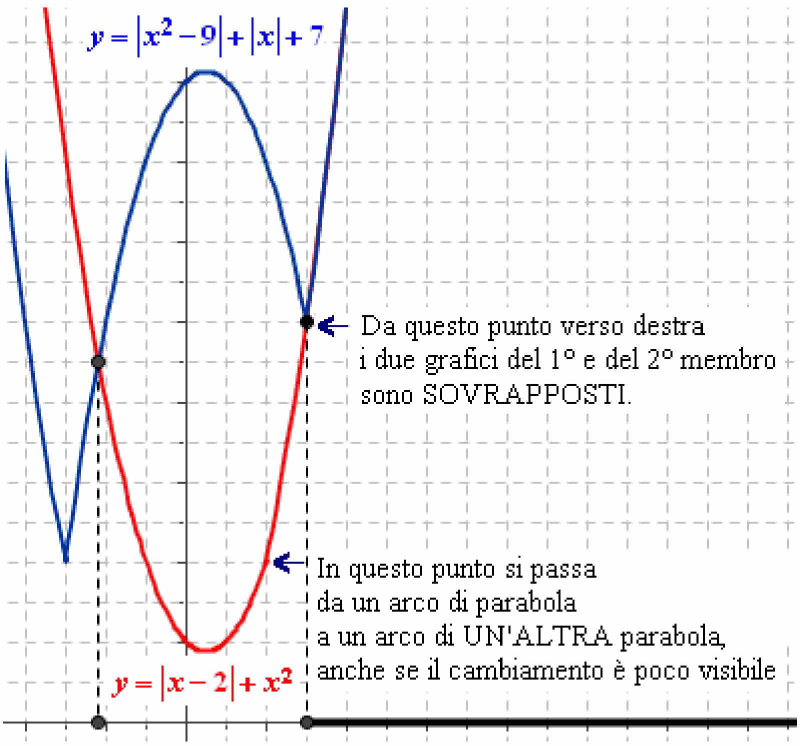
- con $x \le 2$ la funz. diventa: $y=-x+2+x^2=x^2-x+2$ (arco di parabola, concavità verso l'alto)
- mentre con $x \ge 2$ la funzione diventa: $y=x-2+x^2=x^2+x-2$
  (ancora un arco di parabola, diversa dalla precedente, ma sempre con la concavità verso l'alto)

2° membro

Per la funzione a secondo membro $y=|x^2-9|+|x|+7$
occorre distinguere fra i casi: $x \le -3, \quad -3 \le x \le 0, \quad 0 \le x \le 3, \quad x \ge 3$.

- Con $x \le -3$ la funzione diventa: $y=x^2-9-x+7=x^2-x-2$;
- con $-3 \le x \le 0$ la funzione diventa: $y=-x^2+9-x+7=-x^2-x+16$;
- con $0 \le x \le 3$ la funzione diventa: $y=-x^2+9+x+7=-x^2+x+16$;
- con $x \ge 3$ la funzione diventa: $y=x^2-9+x+7=x^2+x-2$.

Si disegna il grafico della funzione a 1° membro "per intervalli",
si fa lo stesso con la funzione a 2° membro (naturalmente, sullo stesso riferimento cartesiano),
e si riconoscono dalla figura le soluzioni, che sono poi
quei valori di *x* per i quali i due grafici si intersecano, oppure sono sovrapposti.



La risoluzione grafica ci permette, di norma, soltanto di APPROSSIMARE le soluzioni. Nella nostra figura, ad esempio, si vede che c'è una soluzione fra –3 e –2 (più vicina a –2 che a –3), ma per trovarne un valore più preciso occorre la risoluzione algebrica, oppure occorre utilizzare il computer per affinare la risoluzione grafica tramite un software apposito, oppure ancora occorrerebbe partire dalla grossolana approssimazione grafica per utilizzare i metodi della cosiddetta "analisi numerica" (metodo di bisezione, delle tangenti, delle corde, del punto fisso …) onde migliorare l'approssimazione.

Viceversa, una risoluzione grafica può essere utilissima per controllare l'esattezza della risoluzione algebrica!

10) Ultimissimo esempio? Ma sì, dài …

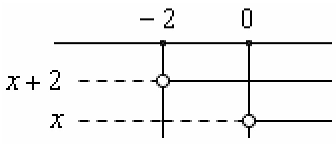
$$\boxed{|x+2| = 4-|x|}$$

RISOLUZIONE ALGEBRICA

a) STUDIAMO IL SEGNO di ogni singola espressione entro le stanghette:

$x+2>0 \quad x>-2$
$x>0$

b) compiliamo il "**QUADRO SINOTTICO**":



c) DISTINGUIAMO I VARI CASI:

$x \le -2: \ -x-2 = 4-(-x); \quad -x-2 = 4+x; \quad -2x = 6 \quad \boxed{x=-3}$

$-2 \le x \le 0: \ x+2 = 4-(-x); \quad \cancel{x}+2 = 4+\cancel{x} \quad$ impossibile

$x \ge 0: \ x+2 = 4-x; \quad 2x = 2 \quad \boxed{x=1}$

RISOLUZIONE GRAFICA

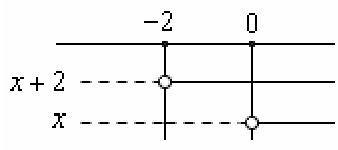
I grafici del 1° e del 2° membro potrebbero essere tracciati facilmente "manipolando" il grafico della "funzione madre" $|x|$: ce la caveremmo brillantemente in un attimo.

Se invece procediamo con il metodo "standard" …

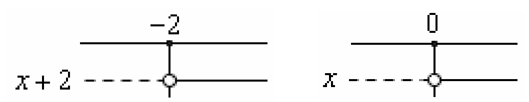
a) STUDIAMO IL SEGNO di ogni singola espressione entro le stanghette:

$x+2>0 \quad x>-2$
$x>0$

b) compiliamo il "**QUADRO SINOTTICO**":



… oppure due quadri separati per il 1° e per il 2° membro:



NOTA: questa fase b) potrebbe benissimo essere saltata, data la semplicità della situazione!

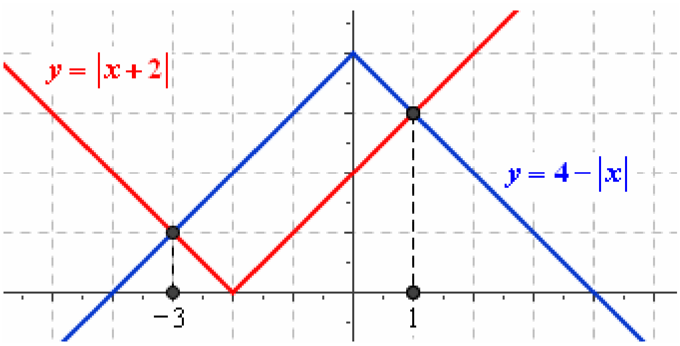
c) DISTINGUIAMO I VARI CASI

1° membro: $y = |x+2|$

$x \le -2: \ y = -x-2$
$x \ge -2: \ y = x+2$

2° membro: $y = 4-|x|$

$x \le 0: \ y = 4-(-x) = x+4$
$x \ge 0: \ y = -x+4$



… E DALLA FIGURA "LEGGIAMO" LE SOLUZIONI,

che sono poi le ascisse –3 e 1 dei due punti di intersezione.

Ribadiamolo: in questo caso molto semplice, i grafici del 1° e del 2° membro avrebbero potuto essere disegnati quasi istantaneamente, lavorando per "manipolazioni" sul grafico della "funzione madre" $y = |x|$

PROPRIETA' DELL'OPERATORE DI VALORE ASSOLUTO

Considerando i vari casi (a seconda che a sia positivo, negativo o nullo, e altrettanto per b, con tutte le possibili combinazioni), si vede che

$$|\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}|=|\mathrm{a}|\cdot|\mathrm{b}|$$
$$\left|\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right|=\frac{|\mathrm{a}|}{|\mathrm{b}|}$$
$$|\mathrm{a}+\mathrm{b}|\le|\mathrm{a}|+|\mathrm{b}|$$
$$|\mathrm{a}-\mathrm{b}|\ge\big||\mathrm{a}|-|\mathrm{b}|\big|$$

Inoltre, ovviamente è
$$|\mathrm{a}|^2=\mathrm{a}^2$$
per cui, ad esempio,
$$|x-3|^2=(x-3)^2=$$
$$=x^2-6x+9$$

ESERCIZI sulle equazioni col valore assoluto:
- **dove c'è scritto RG è consigliato di fare anche la risoluzione grafica;**
- **dove c'è la freccia, puoi cliccare per vedere la correzione completa.**

Soluzioni alla pagina successiva.

1) $|x-1|=4$ RG

2) $|3-2x|=1$

3) $|x^2-5x|=6$ RG

4) $|x^2-4|=5$

5) $|2x^2-7x+5|-1=0$

6) $|3x-5|=-2$

7) $|x^2-6x+3|+5=0$

8) $|x^2-3x+2|=0$

9) $|7x+4|=0$

10) $|2x-5|=|x-1|$ RG

11) $|x^2-7x+8|=|x|$

12) $|x^2-3x|-|x-3|=0$

13) $|x^2-7x|=|x^2-9|$

14) $|x-2|=2x-7$ RG

15) $2|x-5|+x=8$

16) $|3x-8|=x-4$ RG

17) $|x^2-4|=3x$ RG

18) $|x^2-8x+14|=x^2-8x+18$

19) $|x+2|+|x-3|=x+4$ RG

20) $2|x+4|=|x^2-x|-2$ RG

21) $|x-1|+|x-3|=|x-5|$ RG

22) $2|x-2|+3x=|x+4|$ RG

23) $|2x-1|-|x+3|+x=2$ RG

24) $|x^2-x-2|=x+2|x+5|$

25) $x=|x^2-7x+6|+1$

26) $|x^2-4|+2x=|x|$

27) $\dfrac{|x-3|}{3}+\dfrac{|x-1|}{2}=1$

28) $|x^2-x|+2x=|x+4|$

29) $|2x^2-x-1|+3=2|x^2-x-6|$

30) $2|x-3|=|x-2|+|x-4|$

31) $|x^2-4x|=3$

32) $|x^2-4x|=2x-3$

33) $|x^2-4x|=|x^2+2x|$

34) $|x^2-4x|+x=|x-1|$

35) $|x^2-4x|+|x|=|x-1|$

36) $|x^2-4x|+|x|=x-1$

SOLUZIONI

1) $x=-3 \vee x=5$

2) $x=1 \vee x=2$

3) $x=-1 \vee x=2 \vee x=3 \vee x=6$

4) $x=\pm 3$

5) $x=\frac{3}{2} \vee x=2 \vee x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$

6) impossibile

7) impossibile

8) $x=1 \vee x=2$

9) $x=-\frac{4}{7}$

10) $x=2 \vee x=4$

11) $x=4\pm 2\sqrt{2} \vee x=2 \vee x=4$

12) $x=\pm 1 \vee x=3$

13) $x=\frac{9}{7} \vee x=-1 \vee x=\frac{9}{2}$

14) $x=5$

15) $x=2 \vee x=6$

16) impossibile

17) $x=1 \vee x=4$

18) $x=4$

19) $x=1 \vee x=5$

20) $x=-2 \vee x=5$

21) $x=-1 \vee x=3$

22) Tutti i valori di x tali che $-4 \le x \le 2$

23) $x=-2 \vee x=3$

24) $x=-2 \vee x=6$

25) $x=1 \vee x=5 \vee x=7$

26) $x=-4 \vee x=-1$

27) $x=\frac{3}{5} \vee x=3$

28) $x=\pm 2$

29) $x=-14 \vee x=-\frac{5}{4} \vee x=2$

30) Sono soluzione di questa equazione tutti i valori di x che sono ≤ 2, oppure ≥ 4: $x \le 2 \vee x \ge 4$.
L'insieme delle soluzioni è $S=(-\infty, 2]\cup[4, +\infty)$

31) $x=1 \vee x=3 \vee x=2\pm\sqrt{7}$

32) $x=3 \vee x=3+\sqrt{6}$

33) $x=0 \vee x=1$

34) $x=1-\sqrt{2} \vee x=3-2\sqrt{2}$

35) $x=2-\sqrt{5} \vee x=3-2\sqrt{2}$

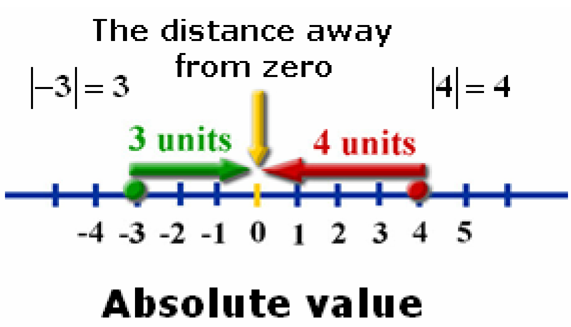
36) impossibile

Dal sito www.regentsprep.org:

The **absolute value** of a number can be considered as the distance between 0 and that number on the real number line.

The rule for computing absolute value is:

$$|a| = a \quad \text{if } a \ge 0$$
$$|a| = -a \quad \text{if } a \le 0$$



D) LE DISEQUAZIONI COL SIMBOLO DI VALORE ASSOLUTO

Iniziamo da alcuni casi particolari.

1) $\boxed{|x-5|<3}$

Il valore assoluto di un numero è uguale
(vedi pag. 26, definizione 3)
alla distanza dall'origine del punto che, su di una *number line*, rappresenta quel numero.

Allora il valore assoluto di un numero è <3 quando quel numero è compreso fra –3 e +3.

Ecco qui evidenziati i numeri reali la cui distanza dall'origine è <3.

(Le crocette escludono i valori –3 e +3, la cui distanza dall'origine è ***esattamente*** *3)*

Insomma:

$\boxed{|t|<3 \Leftrightarrow -3<t<3}$

e siccome il numero *t* da considerare è nel nostro caso $x-5$ avremo:

$\boxed{-3<x-5<3}$

Questa "doppia disequazione" può essere risolta

a) **tramite il sistema**

$$\begin{cases} x-5>-3 & x>2 \\ x-5<3 & x<8 \end{cases}$$ le cui soluzioni sono $\boxed{2<x<8}$

b) **oppure**, molto più rapidamente, **addizionando 5 a ciascun anello della catena**:

$-3^{+5} < x\cancel{-5}^{\cancel{+5}} < 3^{+5}$

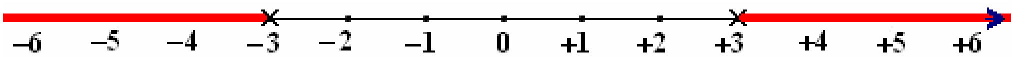
$\boxed{2<x<8}$

In generale, una disequazione della forma
$\boxed{|A(x)|<p \quad (p\in\mathbb{R},\ p>0)}$
è equivalente alla doppia limitazione $\boxed{-p<A(x)<p}$

2) $\boxed{|x-5|>3}$

Il valore assoluto di un numero è >3 quando quel numero è < –3, oppure > +3.

Ecco qui evidenziati i numeri reali la cui distanza dall'origine è >3.



Insomma: $\boxed{|t|>3 \Leftrightarrow t<-3 \vee t>3}$

e siccome il numero *t* da considerare è nel nostro caso $x-5$ avremo:

$\boxed{x-5<-3 \vee x-5>3}$

ossia

$\boxed{x<2 \vee x>8}$

In generale, una disequazione della forma
$\boxed{|A(x)|>p \quad (p\in\mathbb{R},\ p>0)}$
è equivalente alle due condizioni, separate da un "vel" logico: $\boxed{A(x)<-p \vee A(x)>p}$

3) $\boxed{|x-5|<-3}$ Si vede subito che è $\boxed{\text{IMPOSSIBILE}}$: un valore assoluto è sempre positivo o nullo, non potrà *mai* essere < di un numero negativo.

> Una disequazione della forma $\boxed{|A(x)|<-p \quad (p\in\mathbb{R},\ p>0)}$ è IMPOSSIBILE

4) $\boxed{|x-5|>-3}$ Si vede subito che è $\boxed{\text{SEMPRE VERIFICATA}}$: un valore assoluto è sempre ≥ 0, quindi è *sempre* > di un numero negativo.

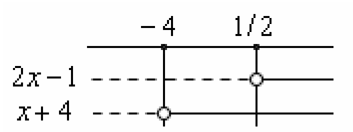
> Una disequazione della forma $\boxed{|A(x)|>-p \quad (p\in\mathbb{R},\ p>0)}$ è SEMPRE VERIFICATA, $\forall x\in\mathbb{R}$

5) $\boxed{|2x-1|<|x+4|}$

***Quando non si rientra nei casi particolari* dei tipi sopra considerati, si procede**
a) *studiando il segno* di ogni singola espressione che compare entro le stanghette;
b) tracciando un "*quadro sinottico*" che riassuma tale studio dei segni;
c) poi *distinguendo la risoluzione "per casi", "per intervalli"*
e riconducendosi, dunque, a più sistemi di disequazioni separati da "vel" logici;
d) facendo, infine, l'*unione insiemistica* dei vari insiemi di soluzioni così trovati.

a) STUDIO DEI SEGNI $2x-1>0 \quad x>1/2$; $x+4>0 \quad x>-4$

b) QUADRO SINOTTICO



c) DISTINZIONE DEI VARI CASI: (**"sinottico" = "che fa vedere le cose *tutte assieme*"**)

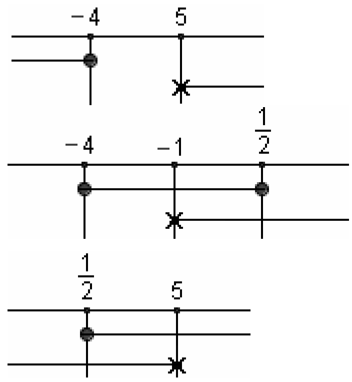
$$\boxed{|2x-1|<|x+4|} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x\leq -4 \\ -2x+1<-x-4 \end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases} -4\leq x\leq 1/2 \\ -2x+1<x+4 \end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases} x\geq 1/2 \\ 2x-1<x+4 \end{cases}}$$

Risolvendo ora i sistemi troviamo le soluzioni seguenti:

$\begin{cases} x\leq -4 \\ -2x+1<-x-4 \end{cases}$; $\begin{cases} x\leq -4 \\ -x<-5 \end{cases}$; $\begin{cases} x\leq -4 \\ x>5 \end{cases}$ sistema $\boxed{\text{impossibile}}$

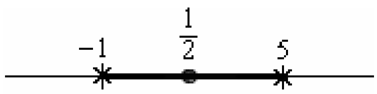
$\begin{cases} -4\leq x\leq 1/2 \\ -2x+1<x+4 \end{cases}$; $\begin{cases} -4\leq x\leq 1/2 \\ -3x<3 \end{cases}$; $\begin{cases} -4\leq x\leq 1/2 \\ x>-1 \end{cases}$ $\boxed{-1<x\leq 1/2}$

$\begin{cases} x\geq 1/2 \\ 2x-1<x+4 \end{cases}$; $\begin{cases} x\geq 1/2 \\ x<5 \end{cases}$ $\boxed{\frac{1}{2}\leq x<5}$



SCHEMI DI SISTEMA

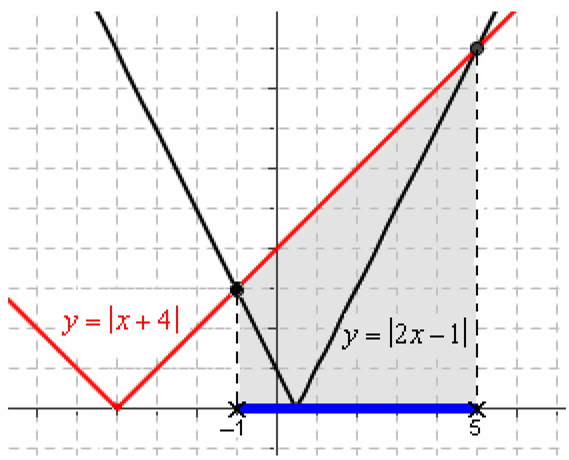
d) UNIONE INSIEMISTICA delle soluzioni trovate (essendo i sistemi separati da "vel" logici):



(lo "schema di unione", nei casi semplici, si può anche evitare! …)

... e si ottiene $\boxed{-1<x<5}$

La *risoluzione grafica* conferma la correttezza della conclusione raggiunta: il grafico della **funzione a 1° membro** si trova al di **sotto** (<) del grafico della funzione a 2° membro proprio per i **valori di *x* compresi strettamente tra –1 e 5.**



6)

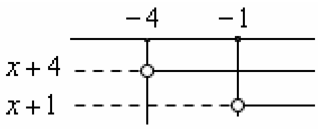
$\boxed{|x+4|+x \ge 2|x+1|}$

a) STUDIO SEI SEGNI

$x+4>0 \quad x>-4$

$x+1>0 \quad x>-1$

b) QUADRO SINOTTICO



c) DISTINZIONE DEI CASI

$\begin{cases} x \le -4 \\ \cancel{-x}-4\cancel{+x} \ge 2(-x-1);\ \ -4 \ge -2x-2;\ \ 2x \ge 2;\ \ x \ge 1 \end{cases}$ $\boxed{\text{sistema impossibile}}$

$\begin{cases} -4 \le x \le -1 \\ x+4+x \ge 2(-x-1);\ \ 2x+4 \ge -2x-2;\ \ 4x \ge -6;\ \ x \ge -3/2 \end{cases}$ $\boxed{-3/2 \le x \le -1}$

$\begin{cases} x \ge -1 \\ x+4+x \ge 2(x+1);\ \ \cancel{2x}+4 \ge \cancel{2x}+2;\ \ 4 \ge 2 \text{ sempre verificata} \end{cases}$ $\boxed{x \ge -1}$

d) UNIONE INSIEMISTICA

Facendo a questo punto l'*unione* degli intervalli ottenuti,

che sono $\varnothing$, $\left[-\frac{3}{2}, -1\right]$ e $[-1, +\infty)$, si ottiene $\boxed{x \ge -\frac{3}{2}}$

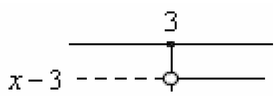
7)

$\boxed{|x-3| > 2x-1}$

Qui entro stanghette c'è una sola espressione …
Procediamo allo stesso modo,
tenendo presente che però diversi passaggi si potrebbero fare "a mente".

a) STUDIO DEL SEGNO $x-3>0 \quad x>3$

b) QUADRO SINOTTICO



c) DISTINZIONE DEI CASI

$\begin{cases} x \le 3 \\ 3-x > 2x-1;\ \ -3x > -4;\ \ x < 4/3 \end{cases}$ $\boxed{x < \frac{4}{3}}$

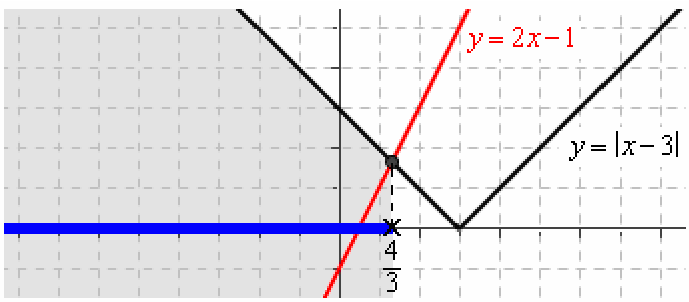
$\begin{cases} x \ge 3 \\ x-3 > 2x-1;\ \ -x > 2;\ \ x < -2 \end{cases}$ $\boxed{\text{sistema impossibile}}$

d) UNIONE INSIEMISTICA

Facendo a questo punto l'*unione* degli intervalli ottenuti,

che sono $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$ e l'insieme vuoto $\varnothing$, si ottiene $\boxed{x < \frac{4}{3}}$

… e la risoluzione grafica
conferma la nostra conclusione:
il grafico
della **funzione a 1° membro**
si trova al di **sopra** (>)
del grafico della funzione a 2° membro
proprio per i valori di x
minori di 4/3



8)

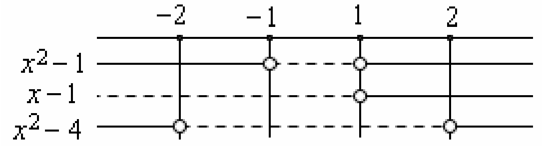
$$\boxed{x^2+\left|x^2-1\right|+\left|x-1\right|\le\left|x^2-4\right|}$$

STUDIAMO IL SEGNO di ciascuna espressione entro stanghette,
tracciamo un **“QUADRO SINOTTICO”** che riassuma lo studio effettuato,
DISTINGUIAMO I VARI CASI:

$x^2-1>0 \quad x<-1 \vee x>1$

$x-1>0 \quad x>1$

$x^2-4>0 \quad x<-2 \vee x>2$



$$\begin{cases} x\le -2 \\ x^2 \cancel{+x^2} \cancel{-1} - x \cancel{+1} \le \cancel{x^2}-4;\quad x^2+x+4\le 0 \ \text{imposs.}\,(\Delta<0) \end{cases} \quad \boxed{\text{sistema impossibile}}$$

$$\begin{cases} -2\le x\le -1 \\ x^2+x^2\cancel{-1}-x\cancel{+1}\le -x^2+4;\quad 3x^2-x-4\le 0;\quad -1\le x\le \frac{4}{3} \end{cases} \quad \boxed{x=-1}$$

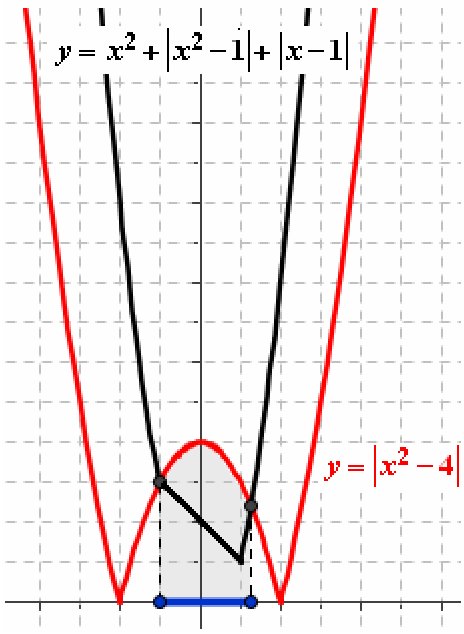
$$\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ \cancel{x^2}\cancel{-x^2}+1-x+1\le -x^2+4;\quad x^2-x-2\le 0;\quad -1\le x\le 2 \end{cases} \quad \boxed{-1\le x\le 1}$$

$$\begin{cases} 1\le x\le 2 \\ x^2+x^2-1+x-1\le -x^2+4;\quad 3x^2+x-6\le 0;\quad \underbrace{\frac{-1-\sqrt{73}}{6}}_{\approx -1{,}59}\le x\le \underbrace{\frac{-1+\sqrt{73}}{6}}_{\approx 1{,}26} \end{cases} \quad \boxed{1\le x\le \frac{-1+\sqrt{73}}{6}}$$

$$\begin{cases} x\ge 2 \\ \cancel{x^2}+x^2-1+x-1\le \cancel{x^2}-4;\quad x^2+x+2\le 0 \ \textit{imposs.}\,(\Delta<0) \end{cases} \quad \boxed{\text{sistema impossibile}}$$

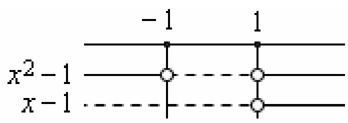
Facendo ora l’**UNIONE INSIEMISTICA** degli intervalli ottenuti, si ottiene $\boxed{-1\le x\le \frac{-1+\sqrt{73}}{6}}$

RISOLUZIONE GRAFICA



Disegnare la funzione
$y=\left|x^2-4\right|$
a secondo membro è immediato:
basta tracciare il grafico della parabola $y=x^2-4$
poi eliminare la parte con ordinate negative, sostituendola con la sua simmetrizzazione rispetto all’asse orizzontale.

Per la ***funzione a primo membro***
$y=x^2+\left|x^2-1\right|+\left|x-1\right|$
occorrerà invece ***distinguere fra più casi****.*
Ecco la parte del precedente “quadro sinottico”, che si riferisce alle espressioni presenti a primo membro.



Siamo così condotti ai casi:

$\boxed{x\le -1}:\ \boxed{y=}\,x^2+x^2\cancel{-1}-x\cancel{+1}=\boxed{2x^2-x}$ (*arco di parabola*)

$\boxed{-1\le x\le 1}:\ \boxed{y=}\,\cancel{x^2}\cancel{-x^2}+1-x+1=\boxed{-x+2}$ (*segmento di retta*)

$\boxed{x\ge 1}:\ \boxed{y=}\,x^2+x^2-1+x-1=\boxed{2x^2+x-2}$ (*arco di parabola*)

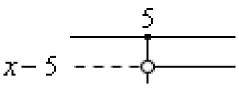
9)

$$\boxed{\frac{x}{|x-5|-2}<0}$$

a) STUDIAMO IL SEGNO dell'espressione entro stanghette:

$x-5>0 \quad x>5$

b) Un semplice QUADRO RIASSUNTIVO
(assolutamente NON indispensabile, data la semplicità della situazione) **potrebbe essere:**



c) DISTINGUIAMO I due CASI:

1° caso

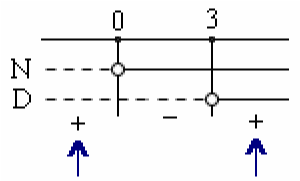
$$\begin{cases} x \le 5 \\ \dfrac{x}{-x+5-2}<0; \quad \dfrac{x}{-x+3}<0; \quad \underbrace{\dfrac{x}{x-3}>0}_{\text{NOTA}} \end{cases}$$

NOTA – In questo passaggio, abbiamo cambiato i segni del denominatore:
così facendo, il segno della frazione cambia,
quindi deve cambiare anche il verso della disequazione che da $<$ diventa $>$

Dobbiamo risolvere la disequazione fratta:
ciò richiede di fare uno studio dei segni di Numeratore e Denominatore,
per poi tracciare uno schema per il confronto dei segni e trarre le conclusioni.

Vedi comunque il riquadro alla successiva pag. 41

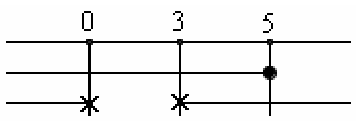
$$\frac{\overset{N}{x}}{\underset{D}{x-3}}>0 \qquad \begin{array}{l} N>0 \quad x>0 \\ D>0 \quad x-3>0 \quad x>3 \end{array}$$



… e le soluzioni della disequazione fratta sono dunque i valori $x<0 \vee x>3$

Riprendiamo il sistema e avremo: $\begin{cases} x \le 5 \\ x<0 \vee x>3 \end{cases}$;

uno "schema di sistema"



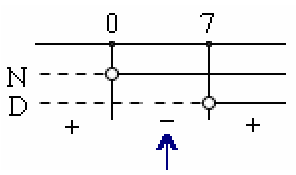
ci dice che le sue soluzioni sono i valori $\boxed{x<0 \vee 3<x \le 5}$

2° caso

$$\begin{cases} x \ge 5 \\ \dfrac{x}{x-5-2}<0; \quad \dfrac{x}{x-7}<0 \end{cases}$$

Risolviamo la disequazione fratta:

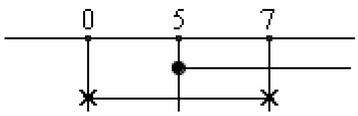
$$\frac{\overset{N}{x}}{\underset{D}{x-7}}<0 \qquad \begin{array}{l} N>0 \quad x>0 \\ D>0 \quad x-7>0 \quad x>7 \end{array}$$



… e le soluzioni della disequazione fratta sono dunque i valori $0<x<7$

Riprendiamo il sistema e avremo: $\begin{cases} x \ge 5 \\ 0<x<7 \end{cases}$;

uno "schema di sistema"



ci dice che le sue soluzioni sono i valori $\boxed{5 \le x < 7}$

d) UNIONE INSIEMISTICA

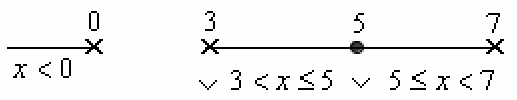
Prendendo in esame i due casi, abbiamo dunque messo nel nostro "paniere" le soluzioni

$\boxed{x<0 \vee 3<x\le 5}$ e $\boxed{5\le x<7}$

quindi in definitiva (facciamo l'**unione insiemistica** dei vari intervalli)
le soluzioni della nostra disequazione sono gli *x* tali che

$\boxed{x<0 \vee 3<x<7}$.

Per effettuare questa "unione insiemistica" possiamo compilare, volendo, uno "schema di unione":



nel quale gli intervalli-soluzione vendono disposti su di una stessa riga…
… ma nella maggior parte dei casi tale schema è superfluo:
basta mentalmente "far comunicare" fra loro, con attenzione, gli intervalli trovati.

OSSERVAZIONE
Esercizi come questo sono per loro natura piuttosto "lunghetti".
C'è il modo, sovente, di rendere lo svolgimento un poco più spedito.

Ad esempio, di fronte alla disequazione $\frac{x}{x-3}>0$,
avremmo potuto trovarne le soluzioni anche immediatamente,
senza lo "schema per la disequazione fratta", col ragionamento esposto nel seguente riquadro.

RISOLUZIONE RAPIDA DI UNA DISEQUAZIONE DELLA FORMA $\frac{ax+b}{cx+d} \gtrless 0$

- Il segno di un QUOZIENTE fra due numeri
  è uguale al segno che avrebbe il PRODOTTO fra quegli stessi numeri.
  Allora la condizione $\frac{x}{x-3}>0$ equivale perfettamente alla condizione $x(x-3)>0$.
  Ma quest'ultima è una disequazione di 2° grado,
  e dalla scomposizione in fattori
  si "leggono" istantaneamente le soluzioni dell'equazione associata, che sono 0 e 3;
  dobbiamo prendere i "valori esterni",
  quindi le soluzioni della disequazione considerata saranno
  $x<0 \vee x>3$.

- Allo stesso modo, la disequazione $\frac{x}{x-7}<0$ equivale alla $x(x-7)<0$,
  disequazione di 2° grado per la quale le soluzioni dell'equazione associata
  si "leggono" subito osservando la scomposizione in fattori, e sono 0 e 7.
  Qui, per via del <, vanno presi i "valori interni",
  quindi le soluzioni della disequazione considerata saranno
  $0<x<7$.

- Un ultimo esempio.
  Se la disequazione proposta fosse
  $\boxed{\frac{x+5}{2x-1}\ge 0}$,
  noi prenderemmo i "valori esterni" rispetto a –5 e 1/2,
  più anche il valore –5 per il quale si annulla il numeratore
  (infatti il verso è $\ge$, e una frazione è uguale a 0
  quando si annulla il suo NUMERATORE,
  purché non si annulli contemporaneamente anche il denominatore)
  e avremmo dunque, come soluzioni,
  $\boxed{x\le -5 \vee x>\frac{1}{2}}$

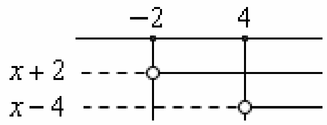
10)

$$\boxed{\frac{|x+2|-2x-1}{|x-4|-x}>0}$$

a) STUDIAMO IL SEGNO di ciascuna espressione entro stanghette:

$x+2>0 \quad x>-2$
$x-4>0 \quad x>4$

b) Tracciamo un "QUADRO SINOTTICO" che riassuma lo studio precedente:



c) DISTINGUIAMO I VARI CASI:

1° caso

$$\begin{cases} x \le -2 \\ \dfrac{-x-2-2x-1}{-x+4-x}>0; \quad \dfrac{-3x-3}{-2x+4}>0; \quad \underbrace{\dfrac{-x-1}{-x+2}>0}_{\text{NOTA 1}}; \quad \underbrace{\dfrac{x+1}{x-2}>0}_{\text{NOTA 2}} \end{cases}$$

NOTA 1 – In questo passaggio, abbiamo diviso per 3 e moltiplicato per 2 ambo i membri

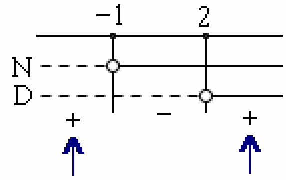
NOTA 2 – In questo passaggio, abbiamo cambiato i segni sia del num. che del denom.: così facendo, la frazione rimane inalterata, quindi il verso NON deve cambiare

Dobbiamo risolvere la disequazione fratta: possiamo applicare il "metodo rapido" prima studiato, oppure, più "classicamente", fare uno studio dei segni di Numeratore e Denominatore, per poi tracciare uno schema per il confronto dei segni e trarre le conclusioni.

$$\frac{\overset{\text{N}}{x+1}}{\underset{\text{D}}{x-2}}>0$$

N > 0 $\quad x+1>0 \quad x>-1$

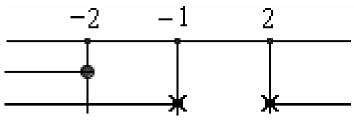
D > 0 $\quad x-2>0 \quad x>2$



… e le soluzioni della disequazione fratta sono dunque i valori $x<-1 \vee x>2$

Riprendiamo il sistema e avremo: $\begin{cases} x \le -2 \\ x<-1 \vee x>2 \end{cases};$

uno "schema di sistema"



ci dice che le sue soluzioni sono i valori $\boxed{x \le -2}$

2° caso

$$\begin{cases} -2 \le x \le 4 \\ \dfrac{x+2-2x-1}{-x+4-x}>0; \quad \dfrac{-x+1}{-2x+4}>0; \quad \underbrace{\dfrac{-x+1}{-x+2}>0}_{\text{NOTA 3}} \quad \underbrace{\dfrac{x-1}{x-2}>0}_{\text{NOTA 4}} \end{cases}$$

NOTA 3 – In questo passaggio, abbiamo moltiplicato per 2 ambo i membri

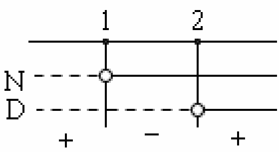
NOTA 4 – In questo passaggio, abbiamo cambiato i segni sia del num. che del denom.: così facendo, la frazione rimane inalterata, quindi il verso NON deve cambiare

Risolviamo la disequazione fratta:

$$\frac{\overset{\text{N}}{x-1}}{\underset{\text{D}}{x-2}}>0$$

N > 0 $\quad x-1>0 \quad x>1$

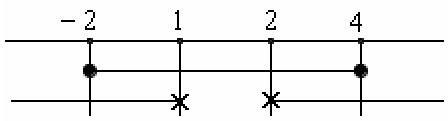
D > 0 $\quad x-2>0 \quad x>2$



… e le soluzioni della disequazione fratta sono dunque i valori $x<1 \vee x>2$

Riprendiamo il sistema e avremo: $\begin{cases} -2 \le x \le 4 \\ x<1 \vee x>2 \end{cases};$

uno "schema di sistema"



ci dice che le sue soluzioni sono i valori $\boxed{-2 \le x < 1 \vee 2 < x \le 4}$

3° caso

$$\begin{cases} x \ge 4 \\ \dfrac{x+2-2x-1}{\cancel{x}-4-\cancel{x}} > 0;\ \ \dfrac{-x+1}{-4} > 0;\ \ \underbrace{\dfrac{x-1}{4} > 0}_{\text{NOTA 5}};\ \ \underbrace{x-1>0}_{\text{NOTA 6}};\ \ x>1 \end{cases}$$

NOTA 5 – In questo passaggio, abbiamo cambiato i segni sia del num. che del denom.: così facendo, la frazione rimane inalterata, quindi il verso NON deve cambiare

NOTA 6 – In questo passaggio, abbiamo moltiplicato per 4 ambo i membri

Anche senza uno "schema di sistema" (evitabile, data la grande semplicità della situazione) ne traiamo che le soluzioni di questo sistema sono i valori

$\boxed{x \ge 4}$

d) UNIONE INSIEMISTICA

Ricapitoliamo: esaminando i vari vasi, abbiamo trovato le soluzioni

$\boxed{x \le -2}$; $\boxed{-2 \le x < 1 \vee 2 < x \le 4}$; $\boxed{x \ge 4}$

quindi in definitiva (facciamo l'**unione insiemistica** dei vari intervalli)
le soluzioni della nostra disequazione sono gli *x* tali che

$\boxed{x < 1 \vee x > 2}$.

11)

$$\boxed{\frac{|x-5|-4}{|x-3|} < 0}$$

POSSIBILITA' DI PROCEDERE MOLTO RAPIDAMENTE!

Qui basta una semplice riflessione per abbreviare *tantissimo* la risoluzione.
Il denominatore, essendo un valore assoluto, è positivo per sua natura,
quindi non influisce sul segno della frazione, e **lo possiamo eliminare:**
dobbiamo soltanto ricordarci di escludere quel valore eccezionale (il 3) per il quale si annulla.

$$\frac{|x-5|-4}{\cancel{|x-3|}} < 0 \quad (x \ne 3)$$

Abbiamo ora una disequazione di tipo particolare, risolubile molto rapidamente:

$$|x-5|-4<0 \qquad |x-5|<4 \qquad -4<x-5<4 \qquad 1<x<9$$

Ricordandoci a questo punto della condizione posta,
concluderemo scrivendo che le soluzioni della nostra disequazione sono i valori

$\boxed{1 < x < 9 \text{ ma } x \ne 3}$.

L'insieme delle soluzioni si può scrivere come $S=(1,9)-\{3\}$ oppure come $S=(1,3)\cup(3,9)$.

12)

$$\boxed{\frac{|3x-7|+2}{|4x-3|-1} \ge 0}$$

POSSIBILITA' DI PROCEDERE MOLTO RAPIDAMENTE!

Qui possiamo osservare **che il numeratore,**
somma di un valore assoluto con un numero strettamente positivo,
è >0 per qualsiasi valore di *x*, quindi non influisce sul segno della frazione.
Tale numeratore non si può annullare,
quindi non si può annullare, per nessun valore di *x*, nemmeno la frazione.
La disequazione perciò potrà essere verificata solo come disuguaglianza stretta (col >).
E le sue soluzioni saranno quei valori di *x* che rendono il *denominatore* >0:

$$\frac{|3x-7|+2}{|4x-3|-1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{\overset{1}{\cancel{|3x-7|+2}}}{|4x-3|-1} \ge 0 \Leftrightarrow |4x-3|-1>0 \Leftrightarrow |4x-3|>1$$

$$4x-3<-1 \vee 4x-3>1$$

$$4x<2 \vee 4x>4$$

$$\boxed{x<1/2 \ \vee \ x>1}$$

13)

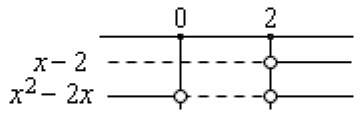
$$\boxed{\frac{3x+|x-2|}{|x^2-2x|-1}\le 0}$$

a) STUDIAMO IL SEGNO di ciascuna espressione entro stanghette:

$x-2>0 \quad x>2$

$x^2-2x>0 \quad x(x-2)>0 \quad x<0 \vee x>2$

b) Tracciamo un “QUADRO SINOTTICO” che riassuma lo studio precedente:



c) DISTINGUIAMO I VARI CASI:

1° caso

$$\begin{cases} x\le 0 \\ \dfrac{3x-x+2}{x^2-2x-1}\le 0; \quad \dfrac{2x+2}{x^2-2x-1}\le 0; \quad \underbrace{\dfrac{x+1}{x^2-2x-1}\le 0}_{\text{NOTA}} \end{cases}$$

NOTA
In questo passaggio, abbiamo diviso ambo i membri per 2

Dobbiamo risolvere la disequazione fratta:
ciò richiede di fare uno studio dei segni di Numeratore e Denominatore,
per poi tracciare uno schema per il confronto dei segni e trarre le conclusioni.

$$\frac{\overset{\text{N}}{x+1}}{\underset{\text{D}}{x^2-2x-1}}\le 0$$

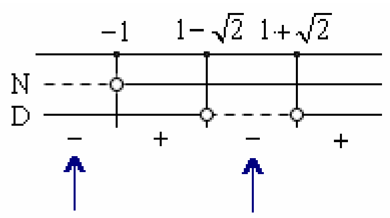
$\text{N}>0 \quad x+1>0 \quad x>-1$

$\text{D}>0 \quad x^2-2x-1>0$ Le soluzioni dell' "equazione associata" sono:

$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+1}=1\pm\sqrt{2}$;

dobbiamo prendere i "valori esterni", quindi avremo

$x<1-\sqrt{2} \ \vee \ x>1+\sqrt{2}$

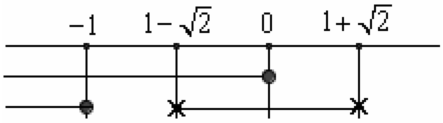


Le soluzioni della disequazione fratta sono dunque: $x\le -1 \ \vee \ 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$.

Riprendiamo il sistema e avremo:

$$\begin{cases} x\le 0 \\ x\le -1 \ \vee \ 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2} \end{cases}$$

Con lo “schema di sistema”



ricaviamo che le soluzioni del sistema sono: $\boxed{x\le -1 \ \vee \ 1-\sqrt{2}<x\le 0}$

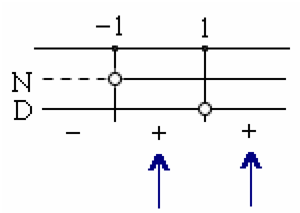
2° caso

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{3x - x + 2}{-x^2 + 2x - 1} \le 0; \quad \dfrac{2x+2}{-x^2+2x-1} \le 0; \quad \underbrace{\dfrac{x+1}{x^2-2x+1}}_{\text{NOTA}} \ge 0; \quad \dfrac{x+1}{(x-1)^2} \ge 0 \end{cases}$$

NOTA
In questo passaggio, abbiamo
a) diviso ambo i membri per 2
b) cambiato i segni a denominatore;
in questo modo, **tutta la frazione cambia di segno** e bisogna **cambiare anche il verso** della disequazione, che da $\le$ si muta in $\ge$

Risolviamo la disequazione fratta:

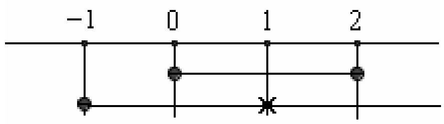
$$\frac{\overset{\text{N}}{x+1}}{\underset{\text{D}}{(x-1)^2}} \ge 0 \qquad \begin{array}{l} \text{N} > 0 \quad x+1>0 \quad x>-1 \\ \text{D} > 0 \quad (x-1)^2 > 0 \quad x \ne 1 \end{array}$$



Le soluzioni della disequazione fratta sono dunque: $x \ge -1$ ma $x \ne 1$.

Riprendiamo il sistema e avremo: $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x \ge -1 \quad \text{ma } x \ne 1 \end{cases}$

Con lo "schema di sistema"



ricaviamo che le soluzioni del sistema sono: $\boxed{0 \le x \le 2 \quad \text{ma } x \ne 1}$

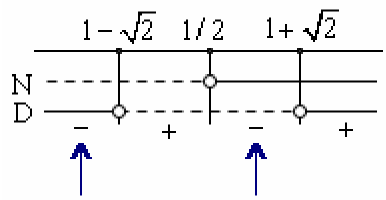
3° caso

$$\begin{cases} x \ge 2 \\ \dfrac{3x + x - 2}{x^2 - 2x - 1} \le 0; \quad \dfrac{4x-2}{x^2-2x-1} \le 0; \quad \underbrace{\dfrac{2x-1}{x^2-2x-1}}_{\text{NOTA}} \le 0 \end{cases}$$

NOTA - In questo passaggio, abbiamo diviso ambo i membri per 2

Risolviamo la disequazione fratta:

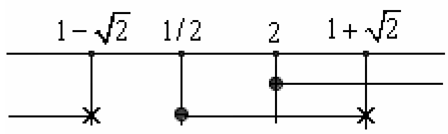
$$\frac{\overset{\text{N}}{2x-1}}{\underset{\text{D}}{x^2-2x-1}} \le 0 \qquad \begin{array}{l} \text{N} > 0 \quad 2x-1>0 \quad x>1/2 \\ \text{D} > 0 \quad x^2-2x-1>0 \\ \qquad\qquad x<1-\sqrt{2} \vee x>1+\sqrt{2} \end{array}$$



Le soluzioni della disequazione fratta sono dunque: $x < 1-\sqrt{2} \vee 1/2 \le x < 1+\sqrt{2}$.

Riprendiamo il sistema e avremo: $\begin{cases} x \ge 2 \\ x < 1-\sqrt{2} \vee 1/2 \le x < 1+\sqrt{2} \end{cases}$

Con lo "schema di sistema"



ricaviamo che le soluzioni del sistema sono: $\boxed{2 \le x < 1+\sqrt{2}}$

d) Facendo ora l'UNIONE INSIEMISTICA dei tre insiemi di soluzioni trovati, abbiamo infine le soluzioni della nostra disequazione:

$\boxed{x \le -1 \ \vee \ 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2} \text{ ma } x \ne 1}$.

14)

$$\boxed{\left|\frac{x-1}{x-2}\right|<3}$$

$$-3<\frac{x-1}{x-2}<3$$

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-2}>-3\\[2mm] \dfrac{x-1}{x-2}<3\end{cases}$$

1^a disequazione: $\dfrac{x-1}{x-2}>-3 \quad \dfrac{x-1}{x-2}+3>0 \quad \dfrac{x-1+3x-6}{x-2}>0 \quad \dfrac{4x-7}{x-2}>0 \qquad x<\dfrac{7}{4}\vee x>2$

2^a disequazione: $\dfrac{x-1}{x-2}<3 \quad \dfrac{x-1}{x-2}-3<0 \quad \dfrac{x-1-3x+6}{x-2}<0 \quad \dfrac{-2x+5}{x-2}<0 \quad \dfrac{2x-5}{x-2}>0 \qquad x<2\vee x>\dfrac{5}{2}$

Sistema: $\begin{cases}x<\dfrac{7}{4}\vee x>2\\[2mm] x<2\vee x>\dfrac{5}{2}\end{cases}$

da cui

$$\boxed{x<\frac{7}{4}\vee x>\frac{5}{2}}$$

15)

$$\boxed{\left|\frac{x-1}{x}\right|>3}$$

$\dfrac{x-1}{x}<-3 \qquad \vee \qquad \dfrac{x-1}{x}>3$

$\dfrac{x-1}{x}+3<0 \qquad \vee \qquad \dfrac{x-1}{x}-3>0$

$\dfrac{x-1+3x}{x}<0 \qquad \vee \qquad \dfrac{x-1-3x}{x}>0$

$\dfrac{4x-1}{x}<0 \qquad \vee \qquad \dfrac{-2x-1}{x}>0$

$\dfrac{4x-1}{x}<0 \qquad \vee \qquad \dfrac{2x+1}{x}<0$

$0<x<\dfrac{1}{4} \qquad \vee \qquad -\dfrac{1}{2}<x<0$

quindi, in definitiva,

$$\boxed{-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{4}\ \text{ ma } x\neq 0}$$

16)

$$\boxed{1<|2x-1|<3}$$

$1<2x-1<3 \ \vee\ -3<2x-1<-1$

$2<2x<4 \quad \vee\ -2<2x<0$

$$\boxed{1<x<2 \quad \vee -1<x<0}$$

17)

$\boxed{\left|x^2-6x+8\right|+\left|x^2-x-12\right|>0}$

Un valore assoluto è sempre ≥ 0,
quindi anche la somma di due valori assoluti sarà sempre ≥ 0;
anzi, la somma di due valori assoluti di norma è addirittura *strettamente* positiva (>0), tranne che in quei casi eccezionali in cui si annullano in simultanea sia l'uno che l'altro valore assoluto.
Basta allora, per trovare le soluzioni della disequazione col >,
escludere quei valori di *x* (ammesso che esistano) per i quali
sono simultaneamente =0 sia l'una che l'altra espressione entro stanghette
(quindi, sia l'uno che l'altro valore assoluto).
Andiamo dunque alla ricerca di tali eventuali valori.
Risolviamo le equazioni $x^2-6x+8=0,\ \ x^2-x-12=0$.

$x^2-6x+8=0\ \ (x-2)(x-4)=0\ \ x=2 \vee x=4$

$x^2-x-12=0\ \ (x+3)(x-4)=0\ \ x=-3 \vee x=4$

Dunque effettivamente *le due equazioni hanno una soluzione in comune*!
Esiste un valore, il 4, per cui entrambi i valori assoluti si annullano in simultanea,
per il quale quindi la somma dei due valori assoluti è nulla
e la disequazione, eccezionalmente, NON è verificata;
per qualsiasi altro valore di *x* invece è verificata.
Le soluzioni sono in definitiva tutti i valori

$\boxed{x \neq 4}$.

L'insieme delle soluzioni è

$S=\mathbb{R}-\{4\}=(-\infty,+\infty)-\{4\}=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$

18)

$\boxed{\left|x^2+3\right|-|x|^2-|5x+2|>0}$

Se si riflette un attimo, la risoluzione potrà essere rapidissima perché:

- x^2+3 è >0 per ogni x quindi possiamo sciogliere le stanghette: $\left|x^2+3\right|=x^2+3$
- è $|x|^2=x^2$ qualunque sia *x*, quindi anche in questo caso le stanghette se ne possono andare.

La disequazione diventa perciò

$\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}-|5x+2|>0$

$-|5x+2|>-3$

$|5x+2|<3$

$-3<5x+2<3$ e sottraendo 2 da tutti gli anelli della catena otteniamo

$-5<5x<1$ da cui, dividendo per 5 tutti gli anelli della catena,

$\boxed{-1<x<1/5}$

19)

$\boxed{|x|\cdot|x-5|>6}$

Il *prodotto* di due valori assoluti è uguale al valore assoluto del prodotto:

$|a|\cdot|b|=|ab|\quad \forall a,b\in\mathbb{R}$ (occhio: *non così* sarebbe per la somma!)

Quindi

$|x(x-5)|>6$ *da cui*

$x(x-5)<-6 \quad \vee \quad x(x-5)>6$

$x^2-5x<-6 \quad \vee \quad x^2-5x>6$

$x^2-5x+6<0 \quad \vee \quad x^2-5x-6>0$

$\boxed{2<x<3 \qquad \vee \quad x<-1 \vee x>6}$

ESERCIZI sulle disequazioni col valore assoluto:

- **dove c'è scritto RG è consigliato di fare anche la risoluzione grafica;**
- **dove c'è la freccia, puoi cliccare per vedere la correzione completa.**

1) $|x+2|<3$ RG ⇨

2) $|7-2x|\le 5$ RG ⇨

3) $|x^2+3x|>4$ RG ⇨

4) $|x^2-x-3|>3$ RG ⇨

5) $|x^2+x|\le 6$

6) $|x^2-3x+2|<-4$

7) $|3x-1|\ge -2$

8) $|x-7|>0$

9) $|8x-2|<0$

10) $|x-4|<|3x-2|$ RG ⇨

11) $|x^2-4x+3|>|x^2-9|$ RG ⇨

12) $|x+1|+|2x-1|<|x-6|$ RG ⇨

13) $|x^2-x|+|x^2-4|\ge 4$

14) $|x^2-9|>x^2+|x-8|$

15) $|2x+1|+2|3x-1|<|x+3|+|x-2|$

16) $\dfrac{|x+2|+x}{|x-1|-3}<0$ ⇨

17) $\dfrac{x^2-|2x-3|}{x|x-4|}\ge 0$ ⇨

18) $\dfrac{|1-3x|-5}{|x-1|}<0$ ⇨

19) $\left|\dfrac{x-2}{x-4}\right|<1$ ⇨

20) $\left|\dfrac{x+3}{x-5}\right|>2$ ⇨

21) $\left|\dfrac{3x-1}{x-3}\right|\le 2$ ⇨

22) $\left|\dfrac{x^2-4}{x}\right|>3$ ⇨

23) $|x^2-9|+|x-3|>0$ ⇨

24) $|x^2-x-2|+|2x^2+x-6|>0$ ⇨

25) $\left|\dfrac{4x+3}{x^2+3}\right|<1$ ⇨

26) $3<|x-4|<5$ ⇨

27) $\dfrac{3}{|x-4|}>7$ ⇨

28) $|x^2-5x+4|>2|x-1|$

29) $x+|2x-3|\le|x+3|$

30) $|x|+|2x|+|3x|<1$

31) $\dfrac{|x+2|}{x}<x$

32) $|x^3-x|<x \quad \left(|x^3-x|=|x||x^2-1|\right)$

SOLUZIONI

1) $-5<x<1$

2) $1\le x\le 6$

3) $x<-4 \vee x>1$

4) $x<-2 \vee 0<x<1 \vee x>3$

5) $-3\le x\le 2$

6) impossibile

7) sempre verificata, $\forall x\in\mathbb{R}$

8) $x\ne 7$

9) impossibile

10) $x<-1 \vee x>3/2$

11) $x<-1$

12) $-3<x<3/2$

13) $x\le\dfrac{1}{2} \vee x\ge\dfrac{1+\sqrt{65}}{4}$

14) $-\dfrac{1}{2}<x<1$

15) $-1/2<x<3/4$

16) $x<-2 \vee -1<x<4$

17) $-3\le x<0 \vee x\ge 1$, ma $x\ne 4$

18) $-\dfrac{4}{3}<x<2$, ma $x\ne 1$

19) $x<3$

20) $7/3<x<13$, ma $x\ne 5$

21) $-5\le x\le\dfrac{7}{5}$

22) $x<-4\vee$
$\vee\left(-1<x<1 \text{ ma } x\ne 0\right)\vee$
$\vee\, x>4$

23) $x\ne 3$

24) sempre verificata

25) $x<0\vee x>4$

26) $-1<x<1 \vee 7<x<9$

27) $\dfrac{25}{7}<x<\dfrac{31}{7}$, ma $x\ne 4$

28) $x<2$ *ma* $x\ne 1 \vee x>6$

29) $0\le x\le 3$

30) $-\dfrac{1}{6}<x<\dfrac{1}{6}$ *La risoluzione è rapidissima se osservi che* $|x|+|2x|+|3x|=|x|+2|x|+3|x|=6|x|$

31) $-1<x<0 \vee x>2$

32) $0<x<\sqrt{2}$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI UN PO' PIU' DIFFICILI

a) $\left|\,2|x-3|-x+2\,\right|<6-x$

In questa **disequazione** abbiamo "**valore assoluto internamente a valore assoluto**".

Cominciamo a considerare l'espressioncina col valore assoluto *più interna*:
siamo condotti alla distinzione di casi
$x\le 3,\ x\ge 3$.

Avremo allora

$$\begin{cases} x\le 3 \\ |2(3-x)-x+2|<6-x \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 3 \\ |2(x-3)-x+2|<6-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\le 3 \\ |6-2x-x+2|<6-x \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 3 \\ |2x-6-x+2|<6-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\le 3 \\ |8-3x|<6-x \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 3 \\ |x-4|<6-x \end{cases}$$

Ora, nell'ambito di ciascuno dei due sistemi, siamo costretti ad un'altra distinzione di casi:

$$\begin{cases} x\le 3 \\ \begin{cases} x\le 8/3 \\ 8-3x<6-x \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 8/3 \\ 3x-8<6-x \end{cases} \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 3 \\ \begin{cases} x\le 4 \\ 4-x<6-x \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 4 \\ x-4<6-x \end{cases} \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{cases} x\le 3 \\ \begin{cases} x\le 8/3 \\ x>1 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 8/3 \\ x<7/2 \end{cases} \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 3 \\ \begin{cases} x\le 4 \\ \text{sempre verificata} \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 4 \\ x<5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\le 3 \\ 1<x\le \frac{8}{3} \vee \frac{8}{3}\le x<\frac{7}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 3 \\ x\le 4 \vee 4\le x<5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\le 3 \\ 1<x<\frac{7}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 3 \\ x<5 \end{cases}$$

$$1<x\le 3 \quad\vee\quad 3\le x<5$$

perciò, in definitiva,

$$\boxed{1<x<5}$$

b) $\left|\,3-|x+4|\,\right|=\left|\,1-|x+4|\,\right|$

Questa **equazione** è un po' più agevole da risolvere rispetto alla disequazione precedente;
infatti è possibile scrivere

$$3-|x+4|=\pm\left(1-|x+4|\right)$$

$$3-\cancel{|x+4|}=1-\cancel{|x+4|} \ \vee\ 3-|x+4|=-1+|x+4|$$

$$\text{impossibile} \quad \vee\ -2|x+4|=-4$$

$$|x+4|=2$$

$$x+4=\pm 2 \left\langle \begin{array}{l} x+4=2;\ \boxed{x=-2} \\ x+4=-2;\ \boxed{x=-6} \end{array} \right.$$

c) $\sqrt{x^2+3|x|}<x+2$

Questa è una **disequazione "mista"**, ossia tanto *irrazionale* quanto *contenente l'incognita entro le stanghette di valore assoluto.*

1° MODO

Possiamo pensare innanzitutto al fatto che si tratti di una disequazione col *valore assoluto*, e allora distingueremo per prima cosa i due casi
$x \geq 0$ e $x \leq 0$
(i due sistemi sono idealmente separati da un "vel" logico):

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ \sqrt{x^2-3x}<x+2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x^2+3x}<x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{x \leq 0} \\ \boxed{\begin{matrix} x^2-3x \geq 0 \\ x+2>0 \\ x^2-3x<(x+2)^2 \end{matrix}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{x \geq 0} \\ \boxed{\begin{matrix} x^2+3x \geq 0 \\ x+2>0 \\ x^2+3x<(x+2)^2 \end{matrix}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x(x-3) \geq 0; \quad x \leq 0 \vee x \geq 3 \\ x>-2 \\ \cancel{x^2}-3x<\cancel{x^2}+4x+4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x(x+3) \geq 0; \quad x \leq -3 \vee x \geq 0 \\ x>-2 \\ \cancel{x^2}+3x<\cancel{x^2}+4x+4; \; -x<4; \; x>-4 \end{cases}$$

$$\textit{Soluzioni sistema}: x \geq 0$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 0 \vee x \geq 3 \\ x>-2 \\ -7x<4; \; x>-\frac{4}{7} \end{cases}$$

$$\textit{Soluzioni sistema}: -\frac{4}{7}<x \leq 0$$

In definitiva, abbiamo $-\frac{4}{7}<x \leq 0 \; \vee \; x \geq 0$ e dunque $\boxed{x>-\frac{4}{7}}$

2° MODO

Oppure possiamo pensare innanzitutto al fatto che si tratti di una disequazione *irrazionale*, e allora scriveremo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x^2+3|x| \geq 0 \\ x+2>0 \\ x^2+3|x|<(x+2)^2 \end{cases}$$

dopodiché distingueremo i due casi $x \geq 0$ e $x \leq 0$ e avremo

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x^2-3x \geq 0 \\ x+2>0 \\ x^2-3x<(x+2)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+3x \geq 0 \\ x+2>0 \\ x^2+3x<(x+2)^2 \end{cases}$$

ritornando così alla stessa situazione algebrica precedente,

con (ovviamente) le medesime soluzioni di prima: $\boxed{x>-\frac{4}{7}}$

d) $\sqrt{|x-8|}>|x-1|+1$

1° MODO

Possiamo pensare innanzitutto al fatto che si tratti di una disequazione col *valore assoluto*, e allora distingueremo per prima cosa i tre casi

$x\le 1,\ 1\le x\le 8,\ x\ge 8$

(i tre sistemi sono idealmente separati da un "vel" logico):

$$\begin{cases} x\le 1 \\ \sqrt{8-x}>1-x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\le 1 \\ \sqrt{8-x}>2-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\le 1 \\ \begin{cases} 2-x<0 \\ 8-x\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2-x\ge 0 \\ 8-x>(2-x)^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\le 1 \\ \begin{cases} x>2 \\ x\le 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x\le 2 \\ 8-x>4-4x+x^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\le 1 \\ 2<x\le 8 \vee \begin{cases} x\le 2 \\ x^2-3x-4<0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\le 1 \\ 2<x\le 8 \vee \begin{cases} x\le 2 \\ -1<x<4 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\le 1 \\ 2<x\le 8 \vee -1<x\le 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\le 1 \\ -1<x\le 8 \end{cases}$$

$$\boxed{-1<x\le 1}$$

$$\begin{cases} 1\le x\le 8 \\ \sqrt{8-x}>x\cancel{-1}\cancel{+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\le x\le 8 \\ \begin{cases} x<0 \\ 8-x\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 0 \\ 8-x>x^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\le x\le 8 \\ \begin{cases} x<0 \\ x\le 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2+x-8<0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\le x\le 8 \\ x<0 \vee \begin{cases} x\ge 0 \\ \frac{-1-\sqrt{33}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{33}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\le x\le 8 \\ x<0 \vee 0\le x<\frac{-1+\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\le x\le 8 \\ x<\frac{-1+\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{1\le x<\frac{-1+\sqrt{33}}{2}}$$

$$\begin{cases} x\ge 8 \\ \sqrt{x-8}>x\cancel{-1}\cancel{+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge 8 \\ \begin{cases} x<0 \\ x-8\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 0 \\ x-8>x^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge 8 \\ \begin{cases} x<0 \\ x\ge 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x+8<0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge 8 \\ \text{imp.} \vee \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x+8<0 \text{ imp.} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge 8 \\ \text{imp.} \vee \text{imp.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge 8 \\ \text{imp.} \end{cases}$$

Sistema impossibile

In definitiva, le soluzioni della disequazione sono $-1<x\le 1 \vee 1\le x<\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$ ovvero $\boxed{-1<x<\frac{-1+\sqrt{33}}{2}}$

2° MODO

MEGLIO, IN QUESTO CASO,
pensare innanzitutto al fatto che si tratti di una disequazione *irrazionale*,
scrivendo dunque la coppia di sistemi:

$$\begin{cases} |x-1|+1<0 \text{ imp.} \\ |x-8|\ge 0 \text{ sempre verif.} \end{cases} \vee \begin{cases} |x-1|+1\ge 0 \text{ sempre verif.} \\ |x-8|>\left(|x-1|+1\right)^2 \end{cases}$$

Sistema impossibile

Quindi la disequazione data finisce per essere equivalente alla

$|x-8|>\left(|x-1|+1\right)^2$,

ossia alla

$|x-8|>|x-1|^2+2|x-1|+1;\ \ |x-8|>(x-1)^2+2|x-1|+1;\ \ |x-8|>x^2-2x+2+2|x-1|$

Prova a risolverla e vedrai che troverai, più rapidamente, le stesse soluzioni di prima.

ESERCIZI

1) $\left| x^2 - 4|x| \right| = 3$

2) $\left| |x| - 2 \right| = 2x$

3) $\left| |x+2| - 2x \right| < 10$

4) $\left| |x+1| - |x-1| \right| < x$

5) $\sqrt{|3x+7|} > |x| + 1$

6) $\sqrt{|x|} > |x-1| - 1$

7) $\sqrt{x^2 - 3x} < 4 - |x-2|$

8) $\sqrt{x + |x| + 4} < 10 - |x|$

9) $\sqrt{x + |x-4|} < 2|x| + x - 3$

10) $\sqrt{x|x-1| - 2} > 5 - x$

11) $\left| \sqrt{x-1} - 2 \right| < 1$

12) $\left| |x-1| - 2 \right| < 1$

13) $\left| |x-1| - 2 \right| < x$

14) $\left| 2x - |x| - 6 \right| > 8 - x$

15) $\left| 2x - |x| - 6 \right| > 8 - |x|$

16) $\sqrt{x+1} + |x-1| < -x + 7$

17) $\sqrt{|x|} < |x-2|$

18) $\sqrt{x+9} = |x+3|$

19) $\left| |x-3| + x \right| = \left| |x| - 3 \right|$

20) $\left| |x-3| + x \right| = x + 2$

21) $\sqrt{\dfrac{3x-2}{x}} = |x|$

22) $\sqrt{|2x+8|} = -x$

23) $\left| \dfrac{3|x| - 2}{|x|} \right| = |x|$

24) $\sqrt{2x+8} > |x|$

SOLUZIONI

1) $x = 2+\sqrt{7} \vee x = -2-\sqrt{7} \vee x = \pm 1 \vee x = \pm 3$

2) $x = \dfrac{2}{3}$

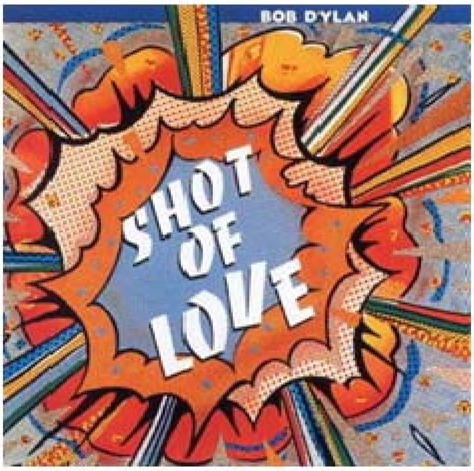
3) $-4 < x < 12.$
Si può anche riscriverla come $-10 < |x+2| - 2x < 10$

4) $x > 2.$
Se si riflette sul fatto che deve essere $x > 0$
affinché si possano avere delle soluzioni,
la risoluzione risulta molto più semplice ...

5) $-1 < x < 3$

6) $-1 < x < 4$ *ma* $x \neq 0$

7) $-\dfrac{4}{7} < x \leq 0 \vee 3 \leq x < 4$



8) $-8 < x < 6$

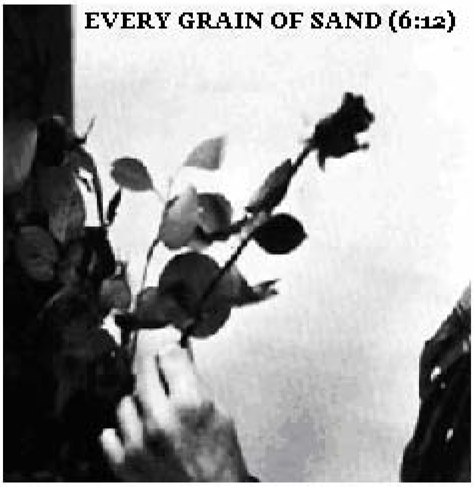
9) $x < -5 \vee x > \dfrac{5}{3}$

10) $x > 3$

11) $2 < x < 10$

12) $-2 < x < 0 \vee 2 < x < 4$

13) $x > \dfrac{3}{2}$



14) $x < -1 \vee x > 7$

15) $x < -\dfrac{1}{2} \vee x > 7$

16) $-1 \leq x < 3$

17) $x < 1 \vee x > 4$

18) $x = -5 \vee x = 0$

19) $x = -6 \vee x = 0$

20) $x = 1 \vee x = 5$

21) $x = -2 \vee x = 1$

22) $x = -2$

23) $x = \pm 1 \vee x = \pm 2 \vee x = \pm \dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$ (può essere conveniente, qui, porre innanzitutto $|x| = y$ ...)

24) $-2 < x < 4$