

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI IRRAZIONALI O COL VALORE ASSOLUTO

A) LE EQUAZIONI IRRAZIONALI E LE CONDIZIONI “A PRIORI”

Riprendiamo ora il discorso sulle equazioni irrazionali, avviato nel Volume 2 alle pagine 80 e seguenti.

- Abbiamo detto che sono così chiamate quelle equaz. che portano almeno una volta *l'incognita sotto radice*
- abbiamo visto che esse *si risolvono elevando una o più volte a potenza*
- ma abbiamo osservato che **quando si eleva ad esponente pari il passaggio potrebbe introdurre (non sempre lo fa, ma a volte lo fa) una o più “false soluzioni”, “soluzioni non accettabili”**
(*se due numeri sono uguali, allora elevandoli ad uno stesso esponente si otterranno ancora numeri uguali; ma se i risultati dell'elevamento ad uno stesso esponente PARI di due numeri sono uguali, i due numeri in questione non sono necessariamente uguali: potrebbero anche essere opposti*)
- e abbiamo raccomandato dunque, **per le equazioni irrazionali risolte elevando almeno una volta ad esponente pari, di sottoporre ciascuna soluzione che si trova alla fine alla “verifica di accettabilità”, sostituendola nell'equaz. di partenza per controllare se rende l'uguaglianza iniziale vera oppure no.**

Dunque fra le soluzioni dell'equaz. elevata ad esp. pari, *soltanto* quelle che superano il “test a posteriori di accettabilità” sono anche soluzioni dell'equazione di partenza, *mentre* le altre vengono *scartate*.

Ci domandiamo ora: ma sarà possibile, come si è soliti fare per una equazione *fratta*, stabilire anche per un'equazione irrazionale nella quale si eleva ad esponente *pari* delle “condizioni di accettabilità a priori”, cosicché le soluzioni trovate alla fine possano essere riconosciute come accettabili o non accettabili *semplicemente* andando a vedere se verificano o non verificano tali condizioni, *senza* stare a fare la sostituzione nell'equazione iniziale?

La risposta è affermativa, almeno per i casi più semplici. Vediamo.

Di fronte, ad esempio, all'equazione (1) $\sqrt{5-x} = x-3$

cosa possiamo dire, fin dall'inizio, sul numero incognito x ?

Beh, se un dato valore di x è soluzione di (1),

allora certamente x renderà eseguibile l'estrazione di radice restando in campo reale

(salvo esplicito avviso contrario, non si sconfinerà mai in campo complesso), quindi sarà $5-x \geq 0$.

Non solo: x sarà anche tale che $x-3 \geq 0$, perché rende il valore di $x-3$ uguale al risultato

di un'estrazione di radice quadrata, risultato che come sappiamo è per convenzione sempre ≥ 0 .

Inoltre, se un'uguaglianza è vera, sarà vera anche quell'uguaglianza che si ottiene

elevando al quadrato ambo i membri della prima, quindi x verificherà pure l'equazione $5-x = (x-3)^2$

Pertanto, se x è soluzione di (1), allora x sarà soluzione pure del sistema (2) $\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ 5-x = (x-3)^2 \end{cases}$.

E viceversa, se un dato valore di x è soluzione di (2), allora lo stesso valore di x è soluzione anche di (1):

infatti, se x verifica (2), allora in particolare x sarà tale da rendere vera l'uguaglianza $5-x = (x-3)^2$;

ma se vale un'uguaglianza fra numeri POSITIVI (e quella in gioco è certamente tale, perché il 2° membro,

in quanto quadrato, è senz'altro positivo) allora vale sicuramente anche l'uguaglianza ottenibile

estraendo le radici quadrate, quindi la $\sqrt{5-x} = \sqrt{(x-3)^2}$ ossia la $\sqrt{5-x} = |x-3|$ che però,

in virtù della seconda condizione del sistema, equivale a $\sqrt{5-x} = x-3$ ossia alla (1).

Insomma, (1) e (2) si implicano vicendevolmente, si bi-implicano, sono *equivalenti*.

Si può anche osservare che, nell'ambito del sistema (2), la condizione $5-x \geq 0$ è *superflua* e si può eliminare,

perché è *conseguenza dell'ultima condizione*: infatti, se è $5-x = (x-3)^2$, allora è SENZ'ALTRO $5-x \geq 0$

(un'espressione uguale ad un quadrato è certamente non negativa, come lo è il quadrato).

Allora il sistema (2) può ridursi a $\begin{cases} \cancel{5-x \geq 0} \\ x-3 \geq 0 \\ 5-x = (x-3)^2 \end{cases}$ e in definitiva scopriamo che

l'equazione $\sqrt{5-x} = x-3$ equivale al sistema $\begin{cases} x-3 \geq 0 & \text{condizione di positività del 2° membro} \\ 5-x = (x-3)^2 & \text{condizione ottenibile elevando al quadrato} \end{cases}$

e che quindi le soluzioni di (1) sono quelle, fra le soluzioni dell'equazione ottenibile elevando al quadrato la (1), che soddisfano *anche* alla condizione di positività (*positività in senso lato*, cioè *non-negatività*) del 2° membro.

Riassumendo, questo discorso ci ha portato a stabilire che **per risolvere la (1) basterà porre la condizione di positività del suo 2° membro e poi elevare al quadrato.**

Quindi, di fronte alla

$$\sqrt{5-x} = x-3,$$

noi, sapendo che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 & \text{condizione di positività del 2° membro} \\ 5-x = (x-3)^2 & \text{condizione ottenibile elevando al quadrato} \end{cases}$$

facciamo, nella pratica, così:

a) **poniamo la condizione di positività del secondo membro** $x-3 \geq 0, x \geq 3$;

b) **poi eleviamo al quadrato** ottenendo $5-x = (x-3)^2$, che risolveremo **con il proposito di considerare alla fine accettabili, fra le soluzioni, solo quelle che risulteranno ≥ 3 .**

$$5-x = (x-3)^2$$

$$5-x = x^2 - 6x + 9$$

$$-x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$\cancel{x=1} \vee x=4$$

non accettabile!
Non è ≥ 3 !!!

Verifica tu stesso, per esercizio, sostituendo nell'equazione data inizialmente, che $x=4$ ne è soluzione mentre $x=1$ NON ne è soluzione (non rende i due membri uguali, bensì li rende opposti fra loro).

Generalizziamo.

Un'equazione della forma

$$(*) \sqrt{A(x)} = B(x)$$

può essere risolta ponendo la condizione $B(x) \geq 0$ di positività del 2° membro e poi elevando al quadrato, in quanto è equivalente al sistema

$$(**) \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^2 \end{cases}$$

nel quale la condizione $A(x) \geq 0$ può essere cancellata (se ce la teniamo, non sbagliamo; tuttavia la condizione è sovrabbondante, superflua, inutile) perché è implicita (NOTA) nella terza.

L'equivalenza fra l'equazione (*) e il sistema (**) può essere provata constatando che

(*) \Rightarrow (**), cioè: se un certo x è soluzione di (*), allora lo stesso x è soluzione anche di (**), perché

- se un'espressione è uguale al risultato di una radice quadrata, allora è certamente ≥ 0 ;
- e se vale un'uguaglianza, allora è vera anche quella che si ottiene elevandone i due membri al quadrato;

e viceversa

(**) \Rightarrow (*), cioè: se un certo x è soluzione di (**), allora lo stesso x è soluzione anche di (*), perché se vale un'uguaglianza fra numeri POSITIVI, allora è vera anche quella che si ottiene estraendo le radici quadrate dei suoi due membri; e in generale si ha $\sqrt{[B(x)]^2} = |B(x)|$, ma quando è, come nel nostro caso, $B(x) \geq 0$, allora si ha più semplicemente $\sqrt{[B(x)]^2} = B(x)$.

Saranno dunque soluzioni di (*) quelle, fra le soluzioni dell'equazione ottenibile elevando al quadrato, che soddisfano alla condizione $B(x) \geq 0$ di positività del 2° membro.

NOTA

“Implicita” significa “contenuta, seppure nascostamente; sottintesa come conseguenza automatica”. Ad esempio, se una signora, conversando con un'amica, parla del suo “primo marito”, è *implicito* che ne ha avuti almeno due; se parlo di “minimo comune multiplo fra due numeri”, è *implicito* che mi sto riferendo a numeri interi. Nel nostro caso, la condizione $A(x) \geq 0$ è implicita nella terza condizione del sistema, perché se $A(x)$ è uguale ad un quadrato, allora *necessariamente* è $A(x) \geq 0$.

CASI PARTICOLARI

$$\sqrt{A(x)} = p \quad (p \in \mathbb{R}, p > 0)$$

Qui il 2° membro è una costante positiva: *si può elevare al quadrato senza porre alcuna condizione.*

$$\sqrt{A(x)} = -p \quad (p \in \mathbb{R}, p > 0)$$

Qui il 2° membro è una costante negativa.

L'equazione è impossibile: il risultato di una radice quadrata non può mai essere negativo.

$$\sqrt{A(x)} = 0$$

L'equazione è equivalente a $A(x) = 0$:

una radice quadrata ha risultato nullo se e solo se il suo radicando è nullo.

E vediamo ora un altro caso notevole; presenteremo, questa volta, subito il ragionamento teorico generale.

Un'equazione della forma

$$(*) \quad \sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$$

può essere risolta ponendo le condizioni $A(x) \geq 0$, $B(x) \geq 0$ di positività dei due membri e poi elevando al quadrato, perché è equivalente al sistema

$$(**) \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases}$$

nel quale fra le due condizioni $A(x) \geq 0$, $B(x) \geq 0$, una qualsiasi potrebbe essere cancellata (se ce la teniamo, non sbagliamo, tuttavia la condizione è sovrabbondante, superflua, inutile) in quanto è *implicita* nelle altre due condizioni del sistema.

L'equivalenza fra l'equazione (*) e il sistema (**) può essere provata constatando che

- (*) \Rightarrow (**), cioè: se un certo x è soluzione di (*), allora lo stesso x è soluzione anche di (**), perché
- se vale un'uguaglianza fra radici quadrate con l'intesa di restare in campo reale, allora entrambe sono estraibili in campo reale quindi hanno radicando positivo;
 - e se vale un'uguaglianza, allora è vera anche l'uguaglianza che si ottiene elevandone i due membri al quadrato;

e viceversa

- (**) \Rightarrow (*), cioè: se un certo x è soluzione di (**), allora lo stesso x è soluzione anche di (*) perché se vale un'uguaglianza fra numeri POSITIVI, allora è vera anche quella che si ottiene estraendo le radici quadrate dei suoi due membri.

Esempio.

$$\sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{2x - 2}$$

Pongo le condizioni di realtà dei radicali $x^2 - 5 \geq 0$, $2x - 2 \geq 0$;

ne lascio perdere una *qualsiasi*, ad esempio la prima che è un po' più complicata, e tengo solo l'altra:

$$2x - 2 \geq 0, \quad \boxed{x \geq 1}.$$

Elevo al quadrato e ottengo

$$x^2 - 5 = 2x - 2; \quad x^2 - 2x - 3 = 0; \quad (x - 3)(x + 1) = 0; \quad \boxed{x = 3} \vee \cancel{x = -1}$$

non accettabile!
Non è ≥ 1 !!!

Verifica tu stesso, per esercizio, sostituendo nell'equazione data, che $x = 3$ ne è soluzione, mentre $x = -1$ NON ne è soluzione (rende le due operazioni di radice NON eseguibili restando in campo reale).

EQUAZIONI NELLE QUALI OCCORRE ELEVARE SOLO AD ESPONENTE DISPARI

Non presentano nessuna difficoltà:

il passaggio è sempre effettuabile, senza dover porre **NESSUNA CONDIZIONE**, perché muta sempre l'equazione data in un'equazione certamente equivalente a quella di partenza.

Infatti, prendendo ad es. l'esponente 3: se due numeri sono uguali, allora sono uguali anche i loro cubi; e viceversa, se due numeri (di segno qualsiasi) sono uguali fra loro, allora certamente esistono e sono uguali anche le loro radici cubiche.

... E IN CASI PIU' COMPLICATI, COME CI SI COMPORTA?

In generale, si pongono le condizioni di realtà di tutti i radicali presenti, e si cerca di trasportare i termini in modo che i due membri siano certamente positivi (≥ 0) per ogni valore ammissibile di x (non sempre ciò è possibile ...).

Soltanto a questo punto si eleva al quadrato: così facendo, infatti, si è certi di pervenire ad un'equazione la quale (considerata congiuntamente con le condizioni di realtà) è equivalente a quella di partenza.

Vediamo un esempio.

$$\sqrt{2x-14} - \sqrt{x-8} = 1$$

Risolvo:

- a) pongo le condizioni di realtà dei radicali $2x-14 \geq 0$ ($x \geq 7$), $x-8 \geq 0$ ($x \geq 8$) le quali danno, in definitiva (devono essere considerate come se fossero "a sistema", perché vogliamo limitarci a considerare quei valori di x che le verificano *entrambe*)

$$\boxed{x \geq 8}$$

- b) Ora trasporto i termini in modo da avere due membri ciascuno dei quali sia positivo (nel senso di: non-negativo, ≥ 0) per ogni valore ammissibile di x :

$$(*) \sqrt{2x-14} = 1 + \sqrt{x-8}$$

Ce l'ho fatta, perché so che una radice quadrata, quando è estraibile restando in campo reale, dà sempre un risultato non-negativo.

- c) Infine elevo al quadrato:

$$(**) (\sqrt{2x-14})^2 = (1 + \sqrt{x-8})^2$$

e osservo che, per via di quella positività di ciascun membro della (*)

che mi sono assicurato col trasporto dei termini, in effetti (*) e (**) sono equivalenti:

(*) \Rightarrow (**) perché se due numeri sono uguali, allora lo sono anche i loro quadrati;

(**) \Rightarrow (*) perché se i quadrati di due numeri NON NEGATIVI sono uguali, allora lo sono anche i due numeri stessi

(osserviamo che questa conclusione non si sarebbe potuta trarre se sui segni dei due numeri non ci fosse stata alcuna informazione)

Allora

$$2x-14 = 1 + x-8 + 2\sqrt{x-8}$$

$$-2\sqrt{x-8} = -x+7$$

$$2\sqrt{x-8} = x-7$$

e siamo pervenuti ad una equazione di un tipo già considerato

(la presenza del fattore esterno 2 non influisce, come possiamo facilissimamente controllare, sui ragionamenti fatti con riferimento al caso $\sqrt{A(x)} = B(x)$). Dunque

$$x-7 \geq 0; \boxed{x \geq 7}$$

$$4(x-8) = (x-7)^2$$

$$4x-32 = x^2-14x+49$$

$$-x^2+18x-81 = 0$$

$$x^2-18x+81 = 0$$

$$(x-9)^2 = 0$$

$$\boxed{x=9} \text{ accettabile perché soddisfa a tutte le condizioni prima poste.}$$

Una analisi più accurata mostrerebbe che addirittura in parecchi casi le condizioni di realtà che vengono poste prima di elevare al quadrato ... si rivelano superflue!

Potrai riflettere tu, se vuoi, di fronte agli esercizi che svolgerai, *quando e perché* si verifica questo fatto, ma noi *volutamente non approfondiamo questo argomento*;

sia per brevità, sia per sottolineare che comunque

una condizione superflua può essere benissimo mantenuta: così facendo, non si sbaglia.