

## ESEMPI SVOLTI

1)  $\sqrt{x-6} + 8 - x = 0$

Trasporto i termini che non stanno sotto radice a 2° membro, per ricondurmi a una forma “standard”:

$$\sqrt{x-6} = x-8$$

Ora pongo la condizione di positività del 2° membro, ed elevo al quadrato:

$$x-8 \geq 0; \quad x \geq 8$$

$$x-6 = (x-8)^2$$

$$x-6 = x^2 - 16x + 64; \quad x^2 - 17x + 70 = 0; \quad (x-7)(x-10) = 0;$$

~~$x=7$~~   $\vee$   $x=10$   
Non accettabile,  
perché non è  $\geq 8$ .

2)  $\frac{x}{3} = \sqrt{x-5} + 1$

Moltiplico per 3 per sbarazzarmi del denominatore

(in alternativa, avrei potuto fare il denominatore comune 3 in entrambi i membri per poi spedirlo via):

$$x = 3\sqrt{x-5} + 3$$

Isolo il radicale e mi riconduco a una forma “standard”:

$$-3\sqrt{x-5} = 3-x$$

$$3\sqrt{x-5} = x-3$$

Capisco che il fattore 3 che moltiplica il radicale non influisce sui vari ragionamenti, per cui pongo la condizione di positività del 2° membro, ed elevo al quadrato:

$$x-3 \geq 0; \quad x \geq 3$$

$$9(x-5) = (x-3)^2$$

$$9x-45 = x^2-6x+9; \quad x^2-15x+54=0; \quad (x-6)(x-9)=0; \quad x=6 \vee x=9 \text{ entrambe accettabili}$$

3)  $\sqrt{x^2-2x} = 2$

**Il secondo membro è positivo “per sua natura”.**

**Posso elevare al quadrato senza porre alcuna condizione.**

$$x^2-2x=4; \quad x^2-2x-4=0; \quad x=1 \pm \sqrt{1+4} = 1 \pm \sqrt{5}$$

**Le soluzioni trovate sono certamente accettabili:**

infatti, non c'è alcuna condizione supplementare a cui devono soddisfare.

*Tuttavia, potresti controllare sostituendo nell'equazione data (sarebbe un esercizietto semplice e carino sui radicali).*

4)  $\sqrt{x+7} = -4$

**Immediatamente**, possiamo dire che l'equazione è **IMPOSSIBILE**:

il risultato di una radice quadrata non può mai essere negativo. Anche:

la condizione di positività del secondo membro, richiesta dalla teoria generale, non può mai essere verificata.

5)  $\sqrt{x^3-x} = 0$

**Il risultato di una radice quadrata è 0 se e solo se è uguale a 0 il radicando.**

D'altronde, posso anche ragionare ricalcando la teoria generale,

e dire che la condizione di positività (= non-negatività) del 2° membro è SEMPRE verificata per cui posso elevare al quadrato senza alcuna condizione supplementare.

$$\text{Ottengo } x^3-x=0; \quad x(x^2-1)=0; \quad x(x+1)(x-1)=0; \quad x=0 \vee x=\pm 1$$

6)  $\sqrt[3]{x} = 4x$

**Dovendosi, per mandar via la radice, elevare ad esponente dispari, non c'è alcuna condizione da porre:**

$$x = 64x^3; \quad 64x^3-x=0; \quad x(64x^2-1)=0; \quad x=0 \vee x=\pm 1/8 \text{ certamente accettabili}$$

$$7) \quad \boxed{\sqrt[4]{x^2+6} + x = 0}$$

C'è una radice *quarta*, ed evidentemente mi comporto come se ci fosse una radice *quadrata*. Dunque

$\boxed{\sqrt[4]{x^2+6} = -x}$  e ora pongo la condizione di positività del 2° membro, ed elevo alla quarta:

$$-x \geq 0; \quad \boxed{x \leq 0}$$

$$x^2 + 6 = x^4; \quad x^4 - x^2 - 6 = 0; \quad (x^2 - 3) \underbrace{(x^2 + 2)}_{\neq 0 \forall x} = 0; \quad x^2 = 3, \quad x = \pm\sqrt{3}$$

... ma per la condizione posta, solo la soluzione negativa è accettabile; quindi  $\boxed{x = -\sqrt{3}}$

$$8) \quad \boxed{\frac{\sqrt{-4x-3}}{3} - \frac{\sqrt{x^2-5}}{2} = 0}$$

Mi libero dai denominatori facendo il denominatore comune (in alternativa: moltiplicando per 6 ...):

$$\frac{2\sqrt{-4x-3} - 3\sqrt{x^2-5}}{6} = 0$$

Porto in forma standard  $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$  :

$$\boxed{2\sqrt{-4x-3} = 3\sqrt{x^2-5}}$$

Pongo le condizioni di realtà dei radicali:

$$-4x - 3 \geq 0; \quad 4x + 3 \leq 0; \quad \boxed{x \leq -\frac{3}{4}}$$

$$x^2 - 5 \geq 0; \quad \boxed{x \leq -\sqrt{5} \vee x \geq \sqrt{5}}$$

Le due condizioni poste, *messe a sistema*, mi danno come condizione di accettabilità  $\boxed{x \leq -\sqrt{5}}$

(in alternativa, potevo anche evitare di risolverne il sistema,

proponendomi di confrontare – alla fine – le soluzioni trovate, con *entrambe* le condizioni poste;

oppure ancora potevo *eliminare una* fra le condizioni *a piacere*, come dice la teoria).

Elevo al quadrato:

$$4(-4x-3) = 9(x^2-5)$$

$$-16x - 12 = 9x^2 - 45$$

$$9x^2 + 16x - 33 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 297}}{9} = \frac{-8 \pm \sqrt{361}}{9} = \frac{-8 \pm 19}{9} = \left\langle \begin{array}{l} \boxed{-3} \\ \boxed{11/9} \end{array} \right\rangle \text{ non accettabile}$$

$$9) \quad \boxed{\sqrt{x-1} - \sqrt{6-x} = \sqrt{2x-9}}$$

Pongo le condizioni di realtà e trasporto i termini in modo da ottenere due membri positivi:

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1 \geq 0; \quad x \geq 1 \\ 6-x \geq 0; \quad -x \geq -6; \quad x \leq 6 \\ 2x-9 \geq 0; \quad x \geq 9/2 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\sqrt{x-1} = \sqrt{2x-9} + \sqrt{6-x}}$$

Elevo al quadrato:

$$(\sqrt{x-1})^2 = (\sqrt{2x-9} + \sqrt{6-x})^2$$

$$\cancel{x} - 1 = 2\cancel{x} - 9 + 6\cancel{x} + 2\sqrt{(2x-9)(6-x)}$$

$$-2\sqrt{12x - 2x^2 - 54 + 9x} = -2;$$

$$\sqrt{-2x^2 + 21x - 54} = 1$$

Essendo il 2° membro una costante positiva posso elevare al quadrato senza porre alcuna condizione:

$$-2x^2 + 21x - 54 = 1; \quad -2x^2 + 21x - 55 = 0; \quad 2x^2 - 21x + 55 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 440}}{4} = \frac{21 \pm 1}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \boxed{5} \\ \boxed{11/2} \end{array} \right\rangle \text{ entrambe accettabili!!!}$$

10)

Nei casi in cui non sia possibile tramite spostamenti di termini ottenere due membri certamente  $\geq 0$ , si potranno anche porre le varie condizioni di realtà – che permetteranno quindi eventualmente, alla fine, di scartare subito qualcuna fra le soluzioni ottenute – ... ma ciò non basterà (NOTA): di norma si sarà comunque costretti a sottoporre ciascuna soluzione non scartata al “test di accettabilità a posteriori”, sostituendo nell’equazione di partenza.

NOTA: a meno che le condizioni di realtà finiscano per assicurare anche la positività dei due membri:

ad esempio, di fronte all’equazione  $x + \sqrt{x} = \sqrt{5x^2 - 1}$ , la condizione di realtà

del 1° radicale è  $x \geq 0$ , e sotto questa condizione la positività del 1° membro è certa)

Si potrà anche, specialmente in casi non gestibili algebricamente, ricorrere alla RISOLUZIONE GRAFICA, che di norma consentirà solamente di trovare, per le soluzioni, valori approssimati.

Esempio:  $x^3 + \sqrt{2-x} = \sqrt{x+8}$

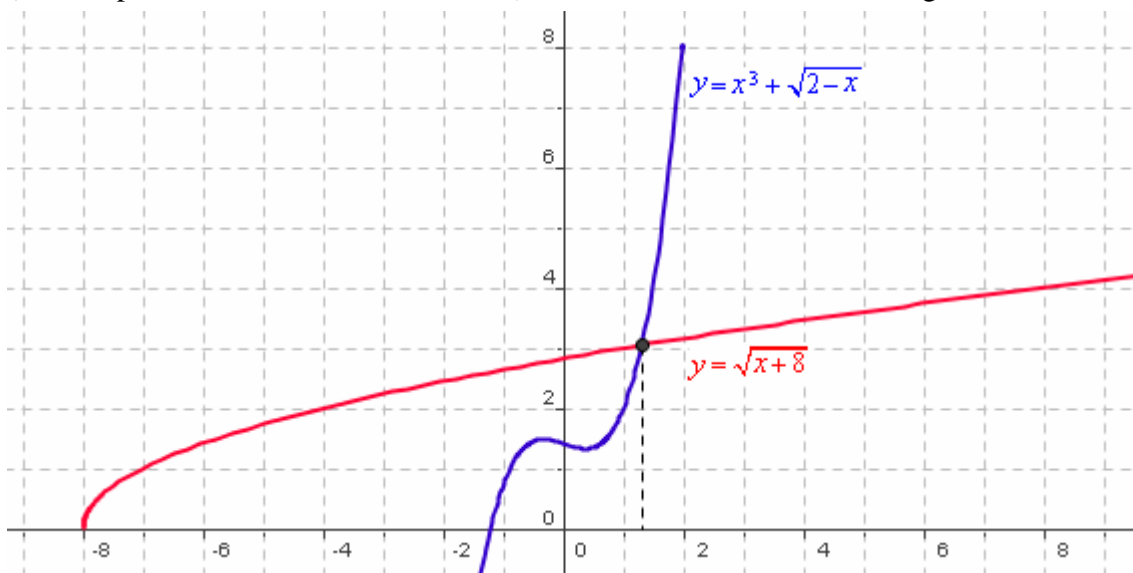
Le condizioni di realtà dei radicali sono  $x \leq 2$ ,  $x \geq -8$

e in definitiva, per la realtà dei radicali, deve essere  $-8 \leq x \leq 2$ .

Una soluzione  $x$  della nostra disequazione potrebbe dunque anche essere negativa; non siamo certi che i due membri siano positivi per ogni valore ammissibile di  $x$ .

Del resto, elevare al quadrato significherebbe ottenere un’equazione complicata, nella quale sarebbe ancora presente un radicale e che richiederebbe quindi un ulteriore elevamento al quadrato per l’eliminazione di questo.

Abbandoniamo l’idea di risolvere per via algebrica, andiamo al computer e con un software appropriato (ad esempio il bel freeware GEOGEBRA) ci affidiamo ad una risoluzione grafica. Otteniamo



e ci rendiamo conto che i due grafici non possono avere altre intersezioni oltre a quella visibile in figura; l’equazione  $x^3 + \sqrt{2-x} = \sqrt{x+8}$ , infatti, non può avere soluzioni esterne all’intervallo che va da  $-8$  a  $+2$ :

- il radicale  $\sqrt{2-x}$  esiste soltanto per  $2-x \geq 0$ ,  $x \leq 2$ ,
- mentre il radicale  $\sqrt{x+8}$  esiste soltanto per  $x+8 \geq 0$ ,  $x \geq -8$ .

L’equazione ha dunque una e una sola soluzione, compresa fra 1 e 2, che il software approssima a circa 1,3

Un esercizio di difficoltà superiore potrebbe consistere nel richiedere questa risoluzione grafica SENZA consentire allo studente l’uso del computer. L’impresa non è insormontabile, perché

- il grafico della funzione  $y = x^3$  dovrebbe essere familiare all’allievo, mentre quelli delle funz.  $y = \sqrt{2-x}$ ,  $y = \sqrt{x+8}$  dovrebbero potersi ricavare abbastanza facilmente, “per manipolazione” (Vol. 2, pag. 114), a partire dal grafico noto della funzione “madre”  $y = \sqrt{x}$ .
- Il grafico di  $y = x^3 + \sqrt{2-x}$  si potrebbe quindi costruire “per somma”: presa una ascissa, si sommano le ordinate delle due funzioni che fanno da addendi.

Così facendo, dovrebbe essere possibile riconoscere, pur senza computer, che si ha 1 e 1 sola soluzione e che questa cade nell’intervallo (1, 2). Tale soluz. potrebbe poi essere approssimata in modo più accurato utilizzando metodi della cosiddetta “analisi numerica”, ad esempio il semplice “metodo di bisezione”.