

B) LE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Sono quelle disequazioni nelle quali l'incognita compare, almeno una volta, sotto radice.

Esse vengono risolte eliminando la radice tramite elevamento a potenza; tuttavia, abbiamo già rilevato (Volume 2, pag. 138) che

- 1) **data una disuguaglianza,**
è SEMPRE lecito (qualunque siano i segni dei due membri)
elevare ambo i membri ad uno stesso esponente DISPARI,
o estrarne le radici con lo stesso indice DISPARI
 (nel senso che, così facendo, se si parte da una disuguaglianza vera,
 si è certi di pervenire alla fine ad una disuguaglianza ancora vera)
 mentre
- 2) **l'elevamento ad esponente PARI dei due membri di una disuguaglianza,**
o l'estrazione di radice con indice PARI dei due membri di una disuguaglianza,
sono leciti
SOLTANTO QUANDO I DUE MEMBRI DELLA DISUGUAGLIANZA DATA
SONO NUMERI POSITIVI O NULLI.

Da ciò si traggono, per le disequazioni, i due **principi di equivalenza** seguenti:

- 1) **in una disequazione,**
è SEMPRE lecito elevare ad uno stesso esponente DISPARI ambo i membri,
o estrarre la radice, con uno stesso indice DISPARI, di entrambi i membri:
così facendo, infatti, la disequazione considerata
si muterà SEMPRE in un'altra ad essa EQUIVALENTE, cioè avente le stesse soluzioni
- 2) **e invece in una disequazione**
è lecito elevare ad uno stesso esponente PARI entrambi i membri,
o estrarre la radice, con uno stesso indice PARI, di entrambi i membri
 (nel senso che così facendo si sarà certi di ottenere una disequazione EQUIVALENTE a quella data),
SOLTANTO QUANDO ognuno dei due membri è un'espressione che assume valore
POSITIVO O NULLO (≥ 0) SEMPRE, ossia:
 - ❑ **per qualsiasi valore di x ,**
 - ❑ **o perlomeno per qualsiasi valore di x appartenente al sottoinsieme di $\mathbb{R}$ al quale vogliamo confinare il nostro interesse e nell'ambito del quale cerchiamo le soluzioni.**

Ora affronteremo dunque lo studio delle disequazioni irrazionali, iniziando dalle tipologie più semplici e rilevanti.

Per quanto detto, i casi "delicati" sono soltanto quelli nei quali per liberarsi dalla radice occorre elevare almeno una volta ad esponente PARI.

Prima di cominciare, sarà opportuno ricordare alcune **QUESTIONI DI SEGNO E CONVENZIONI** riguardanti i radicali.

Parlando di radicali:

Se l'indice è **DISPARI**,

- il **radicando** potrà essere di **segno qualsiasi**: positivo, negativo o nullo
- e il **risultato** dell'estrazione di radice conserverà sempre lo **stesso segno del radicando**

Se l'indice è **PARI**,

- il **radicando** dovrà essere **positivo o nullo**, altrimenti l'operazione sarebbe impossibile (NOTA)
- il **risultato** dell'estrazione di radice è, **per convenzione, anch'esso positivo o nullo**
 (insomma, NON è ~~$\sqrt{9} = \pm 3$~~ , bensì $\sqrt{9} = 3$)

NOTA

... a meno di sconfinare in campo complesso, cosa che, salvo esplicito avviso contrario, è sottinteso non si faccia.
 E d'altronde, nell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi la comunità matematica **NON** definisce le relazioni di $<$ e $>$.

LE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI “DEL 1° TIPO”: $\sqrt{A(x)} < B(x)$

Ragioniamo su di un esempio, poi generalizzeremo.

$$(1) \sqrt{x-2} < x-4$$

Se un numero x è soluzione di (1), allora x :

- renderà possibile l'estrazione di radice “restando in campo reale”, cioè sarà tale che $\boxed{x-2 \geq 0}$;
- renderà strettamente positivo il secondo membro, cioè sarà tale che $\boxed{x-4 > 0}$
(e questo perché il secondo membro, se risulta strettamente maggiore del risultato dell'estrazione di una radice quadrata, che è un numero positivo o nullo, è di certo strettamente positivo);
- verificherà la disequazione che si ottiene elevando al quadrato, vale a dire la disequazione

$$\boxed{x-2 < (x-4)^2}$$

(infatti, se vale una disuguaglianza fra due numeri non negativi – e tali sono i due membri della (1) – allora varrà anche la disuguaglianza ottenibile elevando al quadrato).

Quindi, se x è soluzione di (1), allora x sarà soluzione anche del sistema

$$(2) \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-4 > 0 \\ x-2 < (x-4)^2 \end{cases}$$

E viceversa, si può dimostrare (NOTA) che se x è soluzione di (2), allora è anche soluzione di (1).

In definitiva, **la disequazione (1) e il sistema (2) hanno le stesse soluzioni, cioè sono equivalenti. La risoluzione della disequazione (1) si effettuerà quindi passando al sistema equivalente (2), che rispetto alla disequazione iniziale ha il vantaggio di non contenere la x sotto radice.**

NOTA

Supponiamo, infatti, che x sia soluzione del sistema (2).

Allora, essendo verificata la disuguaglianza

$$x-2 < (x-4)^2$$

ed essendo questa (per la prima condizione del sistema) una disuguaglianza fra numeri positivi, per la quale dunque è lecito estrarre le radici quadrate, si avrà anche

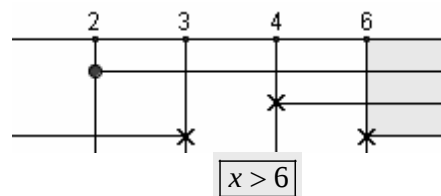
$$\sqrt{x-2} < \sqrt{(x-4)^2}$$

$$\sqrt{x-2} < |x-4| \text{ da cui}$$

(1) $\sqrt{x-2} < x-4$ in quanto, per la seconda condizione del sistema, si ha $|x-4| = x-4$

Insomma: $\boxed{(1) \sqrt{x-2} < x-4} \Leftrightarrow (2) \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-4 > 0 \\ x-2 < (x-4)^2 \end{cases}$ e risolvendo il sistema si ha:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x > 4 \\ x-2 < x^2-8x+16; \dots x^2-9x+18 > 0; \dots x < 3 \vee x > 6 \end{cases}$$



La disequazione irrazionale data è verificata per tutti i numeri reali $x > 6$: l'insieme delle sue soluzioni è l'intervallo $(6, +\infty)$.

IN GENERALE:

La disequazione $\boxed{\sqrt{A(x)} < B(x)}$ è equivalente al sistema $\begin{cases} A(x) \geq 0 & \text{condiz. "di realtà del radicale"} \\ B(x) > 0 & \text{condiz. "di positività del 2° membro"} \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$

LE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI “DEL 2° TIPO”: $\sqrt{A(x)} > B(x)$

Esempio:

$$(1) \sqrt{x^2-3} > x-1$$

Se un numero x è soluzione di (1), allora cosa possiamo dire su x ?

Innanzitutto possiamo dire che x rende la radice estraibile in campo reale, ossia è tale che $x^2-3 \geq 0$.

Poi, possiamo dire che:

- o x è tale che $x-1 < 0$
- oppure è tale che $x-1 \geq 0$;
ma in quest'ultimo caso x , poiché verifica una disuguaglianza fra due numeri non negativi, verificherà anche la disuguaglianza ottenibile elevando al quadrato e cioè la $x^2-3 > (x-1)^2$.

$$\text{Ricapitoliamo: } (1) \sqrt{x^2-3} > x-1 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x^2-3 > (x-1)^2 \end{cases}$$

Viceversa, si può vedere che, se un valore di x è soluzione di uno dei due sistemi (2) o (2'), allora quello stesso valore di x verificherà anche la (1):

(2) $\Rightarrow$ (1) perché se x è soluzione di (2), allora x è tale che esista, in campo reale, il risultato di $\sqrt{x^2-3}$; ma tale risultato, essendo un numero ≥ 0 , sarà *certainamente* maggiore di $x-1$ che è < 0 ; dunque per quell' x varrà la disuguaglianza $\sqrt{x^2-3} > x-1$ ossia la (1)

(2') $\Rightarrow$ (1) perché se x è soluzione di (2'), allora in particolare si ha $x^2-3 > (x-1)^2$, e i due membri di questa disuguaglianza sono due numeri ≥ 0 (il 2° m. perché è un quadrato, il 1° per la prima condiz. del sistema, o anche perché $>$ di un quadrato); ma allora la disuguaglianza si può sottoporre a estrazione di radice quadrata, quindi è vera anche la $\sqrt{x^2-3} > \sqrt{(x-1)^2}$ ossia $\sqrt{x^2-3} > |x-1|$ che però, essendo $x-1 \geq 0$, diventa $\sqrt{x^2-3} > x-1$: ossia, la (1).

In definitiva, dato questo “viceversa”,

l'implicazione che avevamo scritto da sinistra verso destra diventa una *doppia* implicazione e abbiamo

$$(1) \sqrt{x^2-3} > x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x^2-3 > (x-1)^2 \end{cases}$$

Insomma, la nostra disequazione EQUIVALE ad una coppia di sistemi separati da un “vel” logico e saranno sue soluzioni quei valori di x che soddisfano il sistema (2) o, in alternativa, il (2') :

noi risolveremo il (2), risolveremo il (2'), e metteremo nel nostro “paniere” di soluzioni tanto le soluzioni dell'uno quanto quelle dell'altro: faremo, insomma, per trovare le soluzioni di (1), l' UNIONE INSIEMISTICA fra l'insieme delle soluzioni di (2) e l'insieme delle soluzioni di (2').

IN GENERALE

La disequazione

$$\sqrt{A(x)} > B(x)$$

è equivalente alla coppia di sistemi, separati da un VEL logico:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

ossia ne sono soluzioni quei valori di x che rendono, in alternativa:

- reale il radicale e *negativo* il secondo membro;
- oppure reale il radicale, *positivo o nullo* il secondo membro e verificata la condizione ottenibile elevando al quadrato.

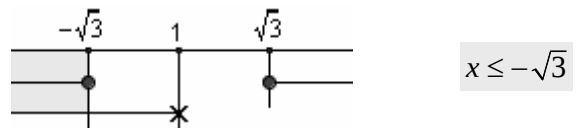
La successiva OSSERVAZIONE 1 chiarirà come nel 2° sistema si potrebbe anche eliminare la prima fra le tre condizioni.

Terminiamo dunque la risoluzione dell'esempio proposto.

$$\sqrt{x^2-3} > x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x^2-3 > (x-1)^2 \end{cases}$$

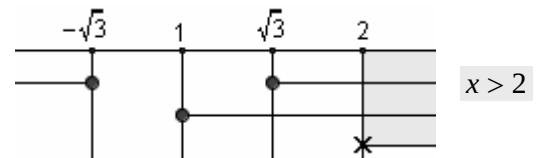
Primo sistema:

$$\begin{cases} x^2-3 \geq 0; & x^2 \geq 3; & |x| \geq \sqrt{3}; & x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3} \\ x-1 < 0; & x < 1 \end{cases}$$



Secondo sistema:

$$\begin{cases} x^2-3 \geq 0; & x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3} \\ x-1 \geq 0; & x \geq 1 \\ x^2-3 > (x-1)^2; & \dots & x > 2 \end{cases}$$



per cui, in definitiva, la disequazione irrazionale data è verificata per tutti gli x tali che $x \leq -\sqrt{3} \vee x > 2$:
l'insieme delle sue soluzioni è l'insieme $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup (2, +\infty)$.

OSSERVAZIONE 1

A ben guardare, nell'ambito del sistema

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

la prima condizione (quella “di realtà del radicale”) è SUPERFLUA, perché IMPLICITA nella terza condizione

(se $A(x) > [B(x)]^2$, allora $A(x)$, essendo $>$ di un quadrato che è ≥ 0 , sarà CERTAMENTE > 0)

e potrebbe dunque essere eliminata: $\begin{cases} \cancel{A(x) \geq 0} \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$. Se, d'altra parte, ce la teniamo, NON sbaglieremo.

OSSERVAZIONE 2

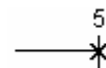
L'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{A(x)} > B(x)$ è l' UNIONE INSIEMISTICA

fra gli insiemi delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \cancel{A(x) \geq 0} \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$.

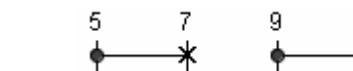
Volendo, si potrebbe “costruire graficamente” tale unione insiemistica tramite uno *SCHEMA DI UNIONE* nel quale rappresentremmo, **SU DI UNA STESSA NUMBER LINE**, le soluzioni di ENTRAMBI i sistemi PER POI ANDARE A PRENDERE **TUTTE** LE SOLUZIONI IN QUESTO MODO EVIDENZIATE.

Ad esempio,

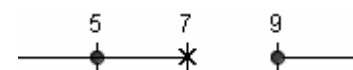
se il primo fra i due sistemi avesse le soluzioni $x < 5$



e il secondo sistema avesse come soluzioni $5 \leq x < 7 \vee x \geq 9$,



lo SCHEMA DI UNIONE sarebbe quello riportato qui a destra



e la disequazione avrebbe dunque come soluzioni $x < 7 \vee x \geq 9$.