

## ESEMPI SVOLTI SULLE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI DEL 1° E DEL 2° TIPO

1)

$$\sqrt{x^2+1} < 1-3x$$

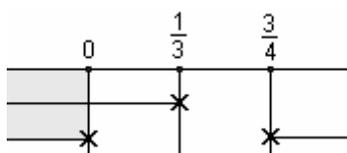
La disequazione assegnata è del "1° tipo";  
passo allora al sistema equivalente

$$\begin{cases} x^2+1 \geq 0 \\ 1-3x > 0 \\ x^2+1 < (1-3x)^2 \end{cases}$$

SEMPRE VERIFICATA,  $\forall x$  (NOTA)

$$-3x > -1; \quad 3x < 1; \quad x < 1/3$$

$$x^2+1 < 1-6x+9x^2; \quad -8x^2+6x < 0; \quad x^2-\frac{3}{2}x > 0; \quad x(4x-3) > 0; \quad x < 0 \vee x > 3/4$$



$x < 0$ : le soluzioni del sistema, quindi della disequaz., sono i numeri negativi.

$$\boxed{\text{1° TIPO}} \quad \sqrt{A(x)} < B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 & \text{condizione "di realtà del radicale"} \\ B(x) > 0 & \text{condiz. "di positività del 2° membro"} \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$$

NOTA

Una condizione sempre verificata è,  
nell'ambito di un sistema, superflua, ininfluyente,  
e pertanto può essere ignorata, può essere eliminata.

2)

$$\sqrt{x+2} > 2x+1$$

La disequazione assegnata è del "2° tipo";  
passo allora ai due sistemi equivalententi

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2x+1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{x+2 \geq 0} & \text{superflua, implicita nella 3ª} \\ 2x+1 \geq 0 \\ x+2 > (2x+1)^2 \end{cases}$$

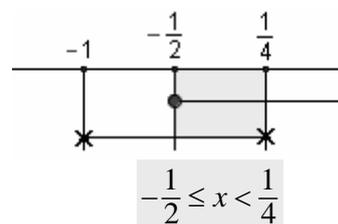
$$\boxed{\text{2° TIPO}} \quad \sqrt{A(x)} > B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{A(x) \geq 0} & \text{superflua, perché} \\ & \text{implicita nella 3ª} \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

I due sistemi sono separati da un "vel" logico:

un valore di  $x$  sarà soluzione della mia disequaz. qualora sia soluzione o dell'uno, oppure dell'altro sistema (alla fine, farò l'unione insiemistica fra gli insiemi delle soluzioni dei due sistemi).

$$\begin{cases} x+2 \geq 0; & x \geq -2 \\ 2x+1 < 0; & x < -1/2 \end{cases} \quad -2 \leq x < -1/2$$

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0; & x \geq -1/2 \\ x+2 > (2x+1)^2; & -4x^2-3x+1 > 0; \quad 4x^2+3x-1 < 0; \quad -1 < x < 1/4 \end{cases}$$

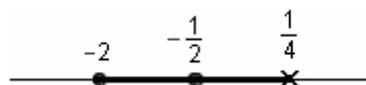


Soluzioni della disequazione:

$$-2 \leq x < -1/2 \vee -1/2 \leq x < 1/4,$$

ossia, utilizzando eventualmente uno "schema di unione"  $\rightarrow$   
(ma la situazione è qui particolarmente semplice,  
potremmo benissimo fare a meno dello "schema di unione"):

$$\boxed{-2 \leq x < 1/4}$$



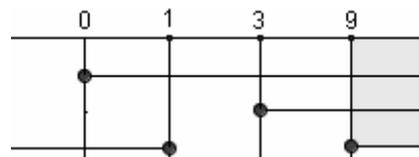
3)

$$\boxed{2\sqrt{x} \leq x-3} \quad (\sqrt{4x} \leq x-3)$$

La disequazione assegnata è una variante del “1° tipo”; se ripercorri i ragionamenti fatti a pag. 11, adattandoli alla presenza di un  $\leq$  anziché di un  $<$ , capirai che il sistema equivalente è

$$\begin{cases} 4x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ 4x \leq (x-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 3 \\ 4x \leq x^2 - 6x + 9; \quad x^2 - 10x + 9 \geq 0; \quad (x-1)(x-9) \geq 0; \quad x \leq 1 \vee x \geq 9 \end{cases}$$



Le soluzioni del sistema, e quindi della disequazione proposta, sono i valori  $\boxed{x \geq 9}$ .

4)

$$\boxed{\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq x}$$

La disequazione assegnata è una variante del “2° tipo”; se ripercorri i ragionamenti fatti a pag. 12, adattandoli alla presenza di un  $\geq$  anziché di un  $>$ , capirai che la coppia di sistemi equivalenti è

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x < 0 \text{ (NOTA)} \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{x^2 - 5x + 4} \geq 0 \text{ superflua, implicita nella 3ª} \\ x \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 \geq x^2 \end{cases}$$

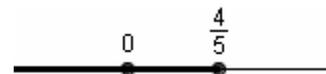
NOTA  
Nulla cambia qui,  
perché la distinzione di casi  
( $x < 0$ , oppure,  
nell'altro sistema,  $x \geq 0$ )  
è sempre la stessa!

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0; \quad x \leq 1 \vee x \geq 4 \\ x < 0 \end{cases} \text{ Soluz. 1° sistema: } x < 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 \geq x^2; \quad 5x - 4 \leq 0; \quad x \leq 4/5 \end{cases} \text{ Soluz. 2° sistema: } 0 \leq x \leq 4/5$$

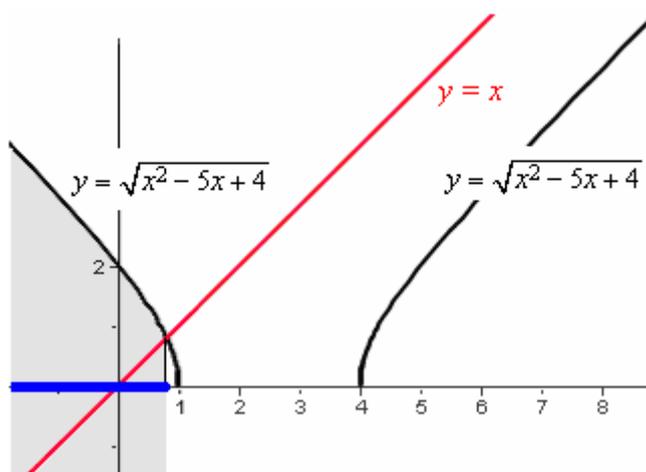
Con o senza lo “schema di unione” (che comunque riportiamo qui a destra)

si trae che le soluzioni della disequazione sono i valori  $\boxed{x \leq \frac{4}{5}}$



Vogliamo **controllare per via grafica**  
la validità della conclusione ottenuta?

Ci basterà utilizzare un qualunque software,  
ad esempio il freeware **GEOGEBRA**,  
che sia in grado di diagrammare una funzione,  
per tracciare i grafici  
del primo membro  
e del secondo membro  
in uno stesso riferimento cartesiano,  
**e poi andare a vedere per quali valori di x**  
**la y corrispondente**  
**sul grafico del primo membro**  
**è maggiore, o uguale,**  
**della y corrispondente**  
**sul grafico del 2° membro.**



La curva  $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$  è costituita da due rami.  
Effettivamente, la conclusione

$$\boxed{x \leq \frac{4}{5}}$$

appare plausibile.