

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI: CASI PARTICOLARI DEL 1° TIPO E DEL 2° TIPO

5)

$$\sqrt{x-7} < 2$$

E' del 1° tipo. La teoria generale ci dice che la disequazione equivale ad un sistema con 3 condizioni:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{1° TIPO} \\ \sqrt{A(x)} < B(x) \end{array}} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A(x) \geq 0 \text{ condizione "di realt\`a del radicale"} \\ B(x) > 0 \text{ condiz. "di positivit\`a del 2° membro"} \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{array} \right. \text{cio\`e, in questo caso, } \left\{ \begin{array}{l} x-7 \geq 0 \\ 2 > 0 \\ x-7 < 4 \end{array} \right.$$

Osserviamo per\`o che la seconda condizione \`e una disuguaglianza numerica non contenente l'incognita, vera di per s\`e, quindi superflua (*per questo* l'abbiamo cancellata).

$$\text{Allora il sistema si riduce alle sole due condizioni } \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x-7 \geq 0} \text{ (di realt\`a); } x \geq 7 \\ \boxed{x-7 < 4}; x < 11 \end{array} \right.$$

La nostra disequazione ha dunque come soluzioni i valori $\boxed{7 \leq x < 11}$.

Si sarebbe potuto anche arrivare a questa conclusione pi\`u rapidamente:

data la disequazione $\sqrt{x-7} < 2$, noi possiamo scrivere la condizione di realt\`a  $x-7 \geq 0$ , alla quale comunque  $x$  dovr\`a *necessariamente* soddisfare per essere soluzione, poi (essendo i due membri certamente esistenti e positivi per ogni valore di x che soddisfa tale condizione di realt\`a) elevare al quadrato ottenendo $x-7 < 4$.

Se dunque x \`e soluzione della disequazione data, allora  $x$  sar\`a soluzione del sistema $\left\{ \begin{array}{l} x-7 \geq 0; \\ x-7 < 4; \end{array} \right.$

e si pu\`o controllare che vale pure il *viceversa*, cio\`e che ogni soluzione del sistema lo \`e anche della diseq. (se  $x$  \`e soluz. del sistema, in particolare verifica la 2^a condizione e ne rende entrambi i membri positivi; ma se i due membri di una disuguaglianza vera sono positivi, allora \`e vera pure la disuguaglianza ottenibile estraendo la radice quadrata)

6)

$$\sqrt{x^2-9} > 4$$

Qui siamo nel 2° tipo.

La teoria generale ci dice che la disequazione equivale a una coppia di sistemi, separati da un "vel" logico:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{2° TIPO} \\ \sqrt{A(x)} > B(x) \end{array}} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} A(x) \geq 0 \text{ superflua, perch\`e} \\ \text{implicita nella 3^a} \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{array} \right. \text{ossia } \left\{ \begin{array}{l} x^2-9 \geq 0 \\ 4 < 0 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} 4 \geq 0 \\ x^2-9 > 16 \end{array} \right.$$

Spieghiamo ora le **cancellazioni**.

il 1° sistema, contenendo una condizione impossibile, \`e impossibile cio\`e non \`e verificato da nessun valore di  $x$  (non ci porta soluzioni, *per questo* l'abbiamo cancellato); nel 2° sistema, la condizione  $4 \geq 0$  non contiene  $x$  ed \`e banalmente vera, quindi \`e superflua, cancellabile. Sopravvive la sola condizione $x^2-9 > 16$, risolvendo la quale si trovano dunque le soluzioni della disequazione:

$$\boxed{x^2-9 > 16}; x^2 > 25; |x| > 5; \boxed{x < -5 \vee x > 5}.$$

Si sarebbe potuto anche arrivare a questa conclusione **pi\`u rapidamente:**

data la disequazione $\sqrt{x^2-9} > 4$ noi possiamo scrivere la condizione di realt\`a  $x^2-9 \geq 0$ , ponendo cos\`i alla x un vincolo al quale x dovr\`a *per forza* soddisfare se vuole essere soluzione, poi (dato che i due membri sono  $\geq 0$  per ogni valore di  $x$ ) elevare al quadrato ottenendo  $x^2-9 > 16$ ; senonch\`e, la condizione cos\`i ottenuta rende inutile a questo punto quell'altra, perch\`e se un numero \`e maggiore di 16, allora \`e *certamente* anche maggiore di 0.

In definitiva, dalla disequazione discende come conseguenza la condizione $x^2-9 > 16$;

e viceversa,

se x verifica quest'ultima condizione, allora x rende vera una disuguaglianza fra numeri positivi quindi render\`a vera anche la disuguaglianza ottenibile estraendone la radice quadrata, ossia la disuguaglianza $\sqrt{x^2-9} > 4$.

7)

$$\sqrt{3x-2} < -8$$

Si vede istantaneamente che questa disequazione è **IMPOSSIBILE**.

Il risultato di un'estrazione di radice quadrata, quando esiste in campo reale, è *sempre* ≥ 0 , non può quindi *mai* essere minore di un numero negativo.

8)

$$\sqrt{3x-2} > -8$$

Il risultato di un'estrazione di radice quadrata, *quando esiste* in campo reale, è *sempre* ≥ 0 , quindi *certamente* maggiore di un numero negativo.

Le soluzioni di questa disequazione sono dunque tutti e soli i valori di x che rendono possibile l'estrazione di radice restando in campo reale.

La disequazione data **EQUIVALE** perciò **ALLA SOLA CONDIZIONE DI REALTÀ'**

$$\boxed{3x-2 \geq 0}; \quad x \geq 2/3.$$

Controlla pure, caro lettore, come, se avessimo applicato pedissequamente la "normale" teoria sulle disequazioni irrazionali del 1° e del 2° tipo alle disequazioni 7) e 8), saremmo giunti alle medesime conclusioni alle quali ci ha consentito di pervenire un ragionamento più rapido.

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI: UN ALTRO CASO

E se avessimo $\boxed{\sqrt{A(x)} \lesseqgtr \sqrt{B(x)}}$, come dovremmo comportarci?

Osserviamo innanzitutto che possiamo pensare soltanto al $<$, oppure soltanto al $>$, a nostra scelta, in quanto i due casi sono perfettamente speculari (studiato uno, è studiato anche l'altro, perché riconducibile al precedente semplicemente riscrivendo la disuguaglianza al rovescio, da destra a sinistra).

Pensiamo allora, ad esempio, alla

$$(*) \quad \sqrt{A(x)} < \sqrt{B(x)}.$$

Innanzitutto, se un valore di x soddisfa alla (*), allora renderà estraibili in campo reale entrambi i radicali, cioè soddisferà simultaneamente ad entrambe le condizioni $A(x) \geq 0$, $B(x) \geq 0$ e inoltre, rendendo vera una disuguaglianza fra numeri positivi, verificherà anche la disuguaglianza ottenibile elevando al quadrato: $A(x) < B(x)$.

Pertanto, se x è soluzione della (*), allora x sarà soluzione anche del sistema

$$(**) \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases}$$

E' poi facile controllare che se x è soluzione di (**), allora x è anche soluzione di (*) (di una disuguaglianza fra numeri positivi è lecito estrarre la radice quadrata).

Pertanto (*) ha come SISTEMA EQUIVALENTE (**).

Osserviamo, fra l'altro, che in (**) la 2^a condizione è superflua, perché è conseguenza delle altre due.

In definitiva avremo:

$$\sqrt{A(x)} < \sqrt{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \text{ superflua, implicita nelle altre due} \\ A(x) < B(x) \end{cases}$$

9) Un esempio:

$$\sqrt{2x-3} > \sqrt{x-4}$$

Abbiamo volutamente preso un esempio *col* $>$ anziché *col* $<$!
Se vuoi, puoi riscrivere al rovescio $\sqrt{x-4} < \sqrt{2x-3}$,
ma questo non è indispensabile per il ragionamento.

Dunque:

$$\begin{cases} \cancel{2x-3 \geq 0} \text{ superflua, implicita nelle altre due} \\ x-4 \geq 0; \quad x \geq 4 \\ 2x-3 > x-4; \quad x > -1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \boxed{x \geq 4}.$$

NOTA
Se ti dimentichi
di cancellare
una condizione superflua,
la cosa non deve preoccuparti:
l'esercizio esce giusto lo stesso!