

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI: ULTERIORI TIPI DI ESERCIZI

Se poi avessimo esercizi più complicati, potremmo comportarci come nell'esempio seguente.

$$10) \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} > 2$$

**Può una disuguaglianza o una disequazione essere elevata al quadrato?
O essere sottoposta ad estrazione di radice quadrata?**

Ribadiamolo:

entrambi i passaggi si possono effettuare a condizione che i due membri siano costanti positive (≥ 0), oppure siano espressioni contenenti l'incognita, ma positive (≥ 0) per ogni valore dell'incognita, o meglio per tutti i valori dell'incognita che vengono presi in considerazione in quel particolare contesto.

Allora: **trasportiamo** il secondo radicale a secondo membro,

$$\sqrt{2x+1} > 2 + \sqrt{x-3}$$

e tenendo conto che quando una radice quadrata esiste in campo reale, il suo valore è sempre positivo (≥ 0), ci troviamo di fronte proprio a una **disequazione a membri positivi**, che potrà essere elevata al quadrato. Dobbiamo però prima di tutto scrivere le “**condizioni di realtà dei radicali**” $2x+1 \geq 0$, $x-3 \geq 0$, ossia considerare esclusivamente quei valori di x che rendono estraibili entrambe le radici senza uscire da \mathbb{R} .

Controlla con attenzione lo schema qui sotto riportato:

$$\sqrt{2x+1} > 2 + \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ (\sqrt{2x+1})^2 > (2 + \sqrt{x-3})^2 \end{cases}$$

e vedrai che, in virtù di quanto detto nel riquadro sovrastante, grazie alla positività dei due membri della disequazione che viene elevata al quadrato, valgono effettivamente ENTRAMBE le implicazioni,

- **sia quella da sinistra a destra** (quindi: ogni soluz. della disequazione lo è anche del sistema),
- **sia quella da destra a sinistra** (quindi: ogni soluz. del sistema lo è anche della disequazione).

Ora dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ (\sqrt{2x+1})^2 > (2 + \sqrt{x-3})^2; \quad 2x+1 > 4 + x-3 + 4\sqrt{x-3}; \quad -4\sqrt{x-3} > -x; \quad 4\sqrt{x-3} < x \end{cases}$$

Risolviamo perciò la diseq. $4\sqrt{x-3} < x$, poi porremo le sue soluzioni a sistema con le altre due condizioni.

$$4\sqrt{x-3} < x \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x > 0 \\ 16(x-3) < x^2 \end{cases} \begin{cases} x \geq 3 \\ x > 0 \\ x^2 - 16x + 48 > 0; \quad x < 4 \vee x > 12 \end{cases} \quad 3 \leq x < 4 \vee x > 12$$

$$\text{Pertanto } \begin{cases} 2x+1 \geq 0; \quad x \geq -1/2 \\ x-3 \geq 0; \quad x \geq 3 \\ 3 \leq x < 4 \vee x > 12 \end{cases} \quad \text{e in definitiva, risolvendo il sistema, } \boxed{3 \leq x < 4 \vee x > 12}.$$

Di fronte a disequazioni irrazionali di forma non-standard, quindi,

- si pongono le condizioni di realtà di ogni radice quadrata presente,
- si cerca, se possibile, di trasportare i termini in modo da ottenere due membri certamente positivi,
- e se questo passaggio preliminare ha successo si eleva al quadrato e si prosegue.

In generale, di fronte ad ogni passaggio per la risoluzione di un'equazione, disequazione o sistema, occorre sempre chiedersi:

“Arrivati qui, SI POTREBBE TORNARE INDIETRO? La condizione ottenuta, o il sistema di condizioni ottenute, implica, a sua volta, la condizione o il sistema di partenza?”

SE LA RISPOSTA È AFFERMATIVA, IL PROCEDIMENTO È LECITO.

Una analisi attenta porterebbe a volte a riconoscere che alcune fra le condizioni poste sono superflue; tuttavia, **una condizione superflua può essere benissimo mantenuta, perché in questo modo non si sbaglia.**

Nel caso non sia possibile effettuare trasporti in modo da ottenere due membri certamente positivi per ogni x , restano aperti metodi risolutivi che si appoggiano ad una rappresentazione grafica.

Prendiamo la disequazione

$$11) \boxed{x + \sqrt{x+4} < \sqrt{x+2}}$$

La presenza di coefficienti tutti positivi non inganni!

Le condizioni di realtà $x \geq -4$, $x \geq -2$

ci dicono che dev'essere $x \geq -2$

ma ciò non ci assicura che x sia positivo;

e per i valori di x compresi fra -2 e 0 ,

il 1° membro potrebbe assumere valore negativo.

Non è perciò vero che i due membri siano positivi

“per tutti i valori di x che interessano”:

non possiamo elevare al quadrato!

Facciamo un grafico al computer,

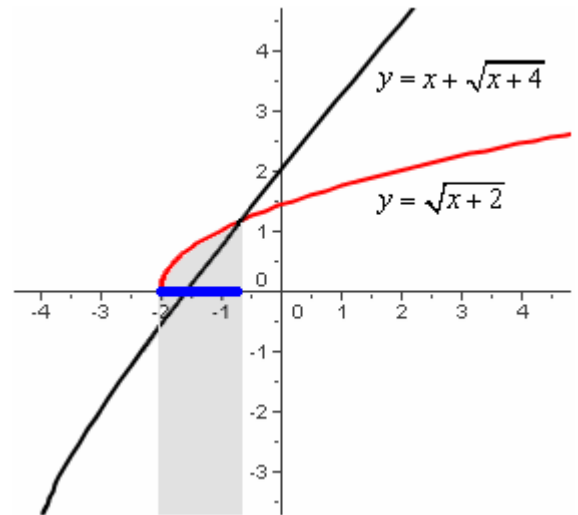
ad esempio col freeware GEOGEBRA.

Dal grafico possiamo desumere che la disuguaglianza

è verificata per tutti gli x che vanno dall'ascissa -2

(ascissa a partire dalla quale comincia ad esistere la funzione $y = \sqrt{x+2}$)

fino all'ascissa in corrispondenza della quale le due curve hanno il loro unico punto di intersezione.



Il software ci permette di determinare l'ascissa approssimativa del punto di intersezione fra i due grafici, che risulta essere circa $-0,67$.

La nostra diseq. ha come soluzioni i valori $\boxed{-2 \leq x < -0,67}$, dove quest'ultimo è un valore approssimato.

Certo, risoluzioni grafiche di questo tipo presuppongono riflessioni *ulteriori* riguardanti l'andamento dei grafici, finalizzate a domandarsi se intersezioni o “scavalcamenti” di un grafico rispetto all'altro possano aver luogo in un campo di ascisse *che il software non ha visualizzato*. Insomma, va valutato, con ragionamenti vari, il comportamento *generale* dei due grafici, anche al di fuori della zona che il software ha reso visibile.

$$12) \boxed{\sqrt[3]{x^2 + x - 1} < x}$$

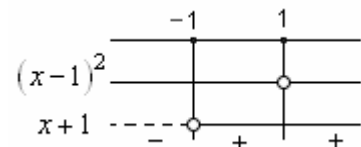
Qui per sbarazzarci della radice dobbiamo ELEVARE AL CUBO, quindi ad esponente dispari, PASSAGGIO SEMPRE LECITO, nel senso che porta sempre, senza dover porre nessuna condizione, ad una disequazione *equivalente* a quella di partenza.

Dunque:

$$x^2 + x - 1 < x^3$$

$$-x^3 + x^2 + x - 1 < 0; \quad x^3 - x^2 - x + 1 > 0; \quad \dots; \quad (x-1)^2(x+1) > 0;$$

$$\boxed{x > -1 \text{ ma } x \neq 1}$$



$$13) \boxed{\sqrt[4]{x^2 + 2} > x}$$

Si capisce che in questo caso occorrerà elevare alla quarta (esp. pari), *nei casi in cui ciò sia possibile*, e si opererà esattamente come per le disequazioni irrazionali “del 2° tipo” $\sqrt{A(x)} > B(x)$. Dunque:

$$\sqrt[4]{x^2 + 2} > x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 + 2 > x^4 \end{cases}$$

$$1^\circ \text{ sistema: } \begin{cases} x^2 + 2 \geq 0 \text{ sempre verificata} \\ \boxed{x < 0} \end{cases}$$

$$2^\circ \text{ sistema: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 2 > x^4; \quad x^4 - x^2 - 2 < 0; \quad (x^2 - 2) \cdot \underbrace{(x^2 + 1)}_{>0 \text{ sempre}} < 0; \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases} \quad \boxed{0 \leq x < \sqrt{2}}$$

$$\text{Soluzioni disequazione: } x < 0 \vee 0 \leq x < \sqrt{2} \text{ ossia } \boxed{x < \sqrt{2}}$$

$$14) \frac{\sqrt{x+12} - x}{\sqrt{x} - x + 6} < 0$$

N > 0

$$\sqrt{x+12} - x > 0$$

$$\sqrt{x+12} > x$$

$$\begin{cases} x+12 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+12 \geq 0 \text{ sovrabbondante} \\ x \geq 0 \\ x+12 > x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -12 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 12 < 0 \quad (x+3)(x-4) < 0 \quad -3 < x < 4 \end{cases}$$

$$\underbrace{-12 \leq x < 0 \quad \vee \quad 0 \leq x < 4}_{-12 \leq x < 4}$$

La condizione di esistenza è: $x+12 \geq 0$, $x \geq -12$

Dunque il Numeratore:

- esiste solo quando $x \geq -12$ (NON esiste per $x < -12$) ed è
- positivo per $-12 \leq x < 4$
- nullo per $x = 4$ (invece, come si può controllare, per $x = -12$ è > 0)
- negativo per $x > 4$

D > 0

$$\sqrt{x} - x + 6 > 0$$

$$\sqrt{x} > x - 6$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 6 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \text{ sovrabbondante} \\ x - 6 \geq 0 \\ x > x^2 - 12x + 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 6 \\ x^2 - 13x + 36 < 0 \quad (x-4)(x-9) < 0 \quad 4 < x < 9 \end{cases}$$

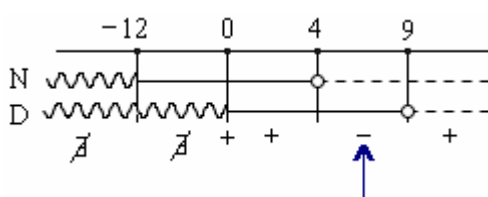
$$\underbrace{0 \leq x < 6 \quad \vee \quad 6 \leq x < 9}_{0 \leq x < 9}$$

La condizione di esistenza è: $x \geq 0$

Dunque il Denominatore:

- esiste solo quando $x \geq 0$ (NON esiste per $x < 0$) ed è
- positivo per $0 \leq x < 9$
- nullo per $x = 9$ (invece, come si può controllare, per $x = 0$ è > 0)
- negativo per $x > 9$

Lo schema sottostante riassume lo studio di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore, sopra effettuato.



SIMBOLOGIA:

- ANNULLAMENTO
- POSITIVITA'
- NEGATIVITA'
- ⋈ NON ESISTENZA

Osserviamo che per $x = 0$ numeratore e denominatore sono entrambi > 0 , quindi la frazione è > 0 e la disequazione NON è verificata

La disequazione è verificata per $\boxed{4 < x < 9}$.

Se invece il verso fosse stato $>$, la disequazione avrebbe avuto come soluzioni $0 \leq x < 4 \vee x > 9$.

15) $\frac{\sqrt{x-1}-3}{x^2-2x} > 0$

$N > 0 \quad \sqrt{x-1}-3 > 0 \quad \sqrt{x-1} > 3$

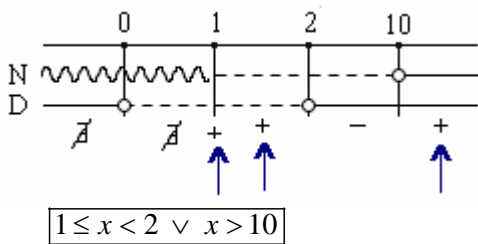
Sappiamo che per risolvere questa disequazione non è necessario porre alcuna condizione; tuttavia, della condizione di realtà $x-1 \geq 0, x \geq 1$ occorrerà tener conto nello schema finale!

$x-1 > 9; \quad x > 10$

Dunque il Numeratore: è > 0 per $x > 10$; ma esiste solo per $x \geq 1$ (non esiste quindi per $x < 1$) perciò sarà < 0 quando $1 \leq x < 10$.

Come si può controllare, il Numeratore è $= 0$ quando $x = 10$.

$D > 0 \quad x^2-2x > 0, \quad x(x-2) > 0, \quad x < 0 \vee x > 2$



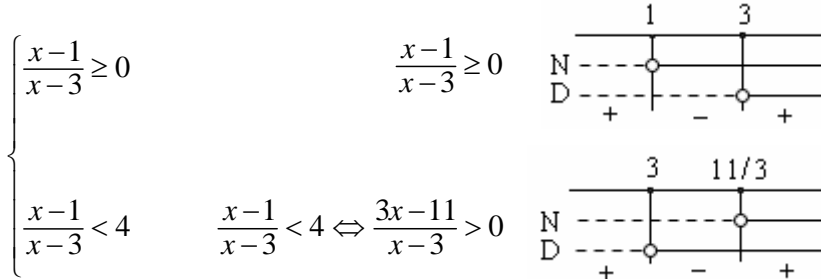
$1 \leq x < 2 \vee x > 10$

SIMBOLOGIA:
 ○ ANNULLAMENTO
 — POSITIVITA'
 - - - NEGATIVITA'
 ~~~~~ NON ESISTENZA

Osserviamo che per  $x = 1$  numeratore e denominatore sono entrambi  $< 0$ , quindi la frazione è  $> 0$  e la disequazione è verificata

16)  $\sqrt{\frac{x-1}{x-3}} < 2$

La disequazione è equivalente al sistema:



Ti invito ad andare a vedere, a pag. 41, un bel metodo per risolvere rapidissimamente le disequazioni fratte, aventi N e D entrambi di 1° grado

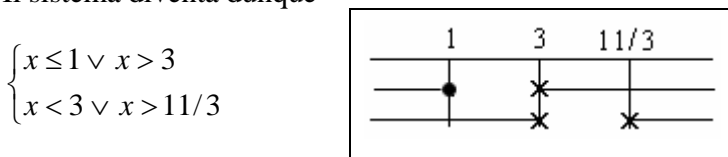
La condizione  $\frac{x-1}{x-3} \geq 0$  è verificata per  $x \leq 1 \vee x > 3$

L'altra condizione  $\frac{x-1}{x-3} < 4$

equivale a  $\frac{x-1}{x-3} - 4 < 0; \quad \frac{x-1-4x+12}{x-3} < 0; \quad \frac{11-3x}{x-3} < 0; \quad \frac{3x-11}{x-3} > 0$

ed è quindi verificata per  $x < 3 \vee x > 11/3$

Il sistema diventa dunque



$\begin{cases} x \leq 1 \vee x > 3 \\ x < 3 \vee x > 11/3 \end{cases}$

e le sue soluzioni, dunque anche le soluzioni della disequazione proposta, sono

$x \leq 1 \vee x > \frac{11}{3}$