D) LE DISEQUAZIONI COL SIMBOLO DI VALORE ASSOLUTO

Iniziamo da alcuni casi particolari.

1) $\boxed{|x-5|<3}$

Il valore assoluto di un numero è uguale
(vedi pag. 26, definizione 3)
alla distanza dall'origine del punto che, su di una *number line*, rappresenta quel numero.

Allora il valore assoluto di un numero è <3 quando quel numero è compreso fra –3 e +3.

Ecco qui evidenziati i numeri reali la cui distanza dall'origine è <3.

(Le crocette escludono i valori –3 e +3, la cui distanza dall'origine è ***esattamente*** *3)*

Insomma:

$\boxed{|t|<3 \Leftrightarrow -3<t<3}$

e siccome il numero *t* da considerare è nel nostro caso $x-5$ avremo:

$\boxed{-3<x-5<3}$

Questa "doppia disequazione" può essere risolta

a) **tramite il sistema**

$\begin{cases} x-5>-3 & x>2 \\ x-5<3 & x<8 \end{cases}$ le cui soluzioni sono $\boxed{2<x<8}$

b) **oppure**, molto più rapidamente, **addizionando 5 a ciascun anello della catena**:

$-3^{+5}< x \cancel{-5} \cancel{^{+5}} < 3^{+5}$

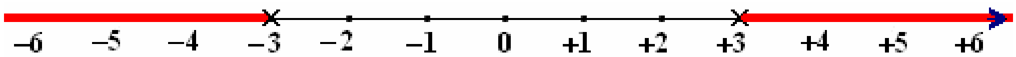
$\boxed{2<x<8}$

> In generale, una disequazione della forma
> $\boxed{|A(x)|<p \quad (p \in \mathbb{R},\ p>0)}$
> è equivalente alla doppia limitazione $\boxed{-p<A(x)<p}$

2) $\boxed{|x-5|>3}$

Il valore assoluto di un numero è >3 quando quel numero è < –3, oppure > +3.

Ecco qui evidenziati i numeri reali la cui distanza dall'origine è >3.



Insomma: $\boxed{|t|>3 \Leftrightarrow t<-3 \vee t>3}$

e siccome il numero *t* da considerare è nel nostro caso $x-5$ avremo:

$\boxed{x-5<-3 \vee x-5>3}$

ossia

$\boxed{x<2 \vee x>8}$

> In generale, una disequazione della forma
> $\boxed{|A(x)|>p \quad (p \in \mathbb{R},\ p>0)}$
> è equivalente alle due condizioni, separate da un "vel" logico: $\boxed{A(x)<-p \vee A(x)>p}$

3) $\boxed{|x-5|<-3}$ Si vede subito che è $\boxed{\text{IMPOSSIBILE}}$: un valore assoluto è sempre positivo o nullo, non potrà *mai* essere < di un numero negativo.

Una disequazione della forma $\boxed{|A(x)|<-p \quad (p\in\mathbb{R},\ p>0)}$ è IMPOSSIBILE

4) $\boxed{|x-5|>-3}$ Si vede subito che è $\boxed{\text{SEMPRE VERIFICATA}}$: un valore assoluto è sempre ≥ 0, quindi è *sempre* > di un numero negativo.

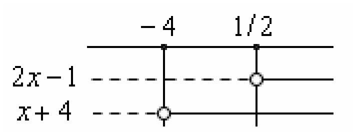
Una disequazione della forma $\boxed{|A(x)|>-p \quad (p\in\mathbb{R},\ p>0)}$ è SEMPRE VERIFICATA, $\forall x\in\mathbb{R}$

5) $\boxed{|2x-1|<|x+4|}$

***Quando non si rientra nei casi particolari* dei tipi sopra considerati, si procede**
a) *studiando il segno* di ogni singola espressione che compare entro le stanghette;
b) tracciando un "*quadro sinottico*" che riassuma tale studio dei segni;
c) poi *distinguendo la risoluzione "per casi", "per intervalli"*
e riconducendosi, dunque, a più sistemi di disequazioni separati da "vel" logici;
d) facendo, infine, l'*unione insiemistica* dei vari insiemi di soluzioni così trovati.

a) STUDIO DEI SEGNI $2x-1>0 \quad x>1/2$; $x+4>0 \quad x>-4$

b) QUADRO SINOTTICO



c) DISTINZIONE DEI VARI CASI: **("sinottico" = "che fa vedere le cose *tutte assieme*")**

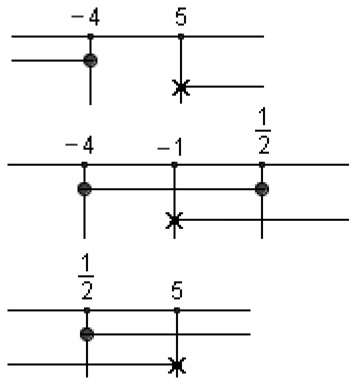
$$\boxed{|2x-1|<|x+4|} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}x\leq -4\\ -2x+1<-x-4\end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases}-4\leq x\leq 1/2\\ -2x+1<x+4\end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases}x\geq 1/2\\ 2x-1<x+4\end{cases}}$$

Risolvendo ora i sistemi troviamo le soluzioni seguenti:

$$\begin{cases}x\leq -4\\ -2x+1<-x-4\end{cases};\quad \begin{cases}x\leq -4\\ -x<-5\end{cases};\quad \begin{cases}x\leq -4\\ x>5\end{cases} \quad \text{sistema } \boxed{\text{impossibile}}$$

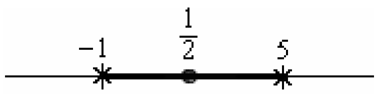
$$\begin{cases}-4\leq x\leq 1/2\\ -2x+1<x+4\end{cases};\quad \begin{cases}-4\leq x\leq 1/2\\ -3x<3\end{cases};\quad \begin{cases}-4\leq x\leq 1/2\\ x>-1\end{cases} \quad \boxed{-1<x\leq 1/2}$$

$$\begin{cases}x\geq 1/2\\ 2x-1<x+4\end{cases};\quad \begin{cases}x\geq 1/2\\ x<5\end{cases} \quad \boxed{\frac{1}{2}\leq x<5}$$



SCHEMI DI SISTEMA

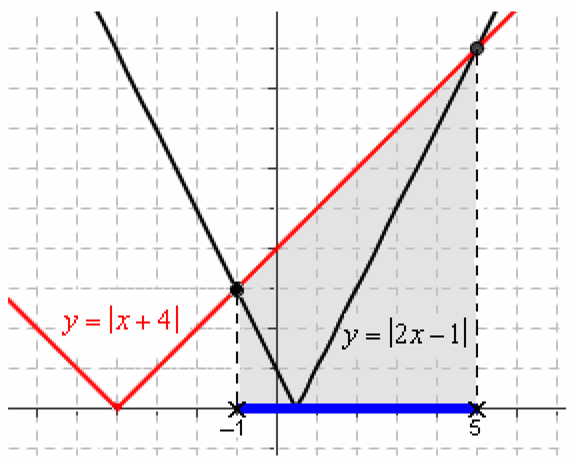
d) UNIONE INSIEMISTICA delle soluzioni trovate (essendo i sistemi separati da "vel" logici):



(lo "schema di unione", nei casi semplici, si può anche evitare! …)

... e si ottiene $\boxed{-1<x<5}$

La *risoluzione grafica* conferma la correttezza della conclusione raggiunta: il grafico della **funzione a 1° membro** si trova al di **sotto** (<) del grafico della funzione a 2° membro proprio per i **valori di *x*** **compresi strettamente tra –1 e 5.**



6)

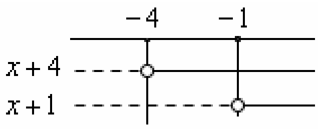
$$\boxed{|x+4|+x \geq 2|x+1|}$$

a) STUDIO SEI SEGNI

$x+4>0 \quad x>-4$

$x+1>0 \quad x>-1$

b) QUADRO SINOTTICO



c) DISTINZIONE DEI CASI

$$\begin{cases} x \leq -4 \\ \cancel{-x}-4\cancel{+x} \geq 2(-x-1); \quad -4 \geq -2x-2; \quad 2x \geq 2; \quad x \geq 1 \end{cases} \quad \boxed{\text{sistema impossibile}}$$

$$\begin{cases} -4 \leq x \leq -1 \\ x+4+x \geq 2(-x-1); \quad 2x+4 \geq -2x-2; \quad 4x \geq -6; \quad x \geq -3/2 \end{cases} \quad \boxed{-3/2 \leq x \leq -1}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x+4+x \geq 2(x+1); \quad \cancel{2x}+4 \geq \cancel{2x}+2; \quad 4 \geq 2 \text{ sempre verificata} \end{cases} \quad \boxed{x \geq -1}$$

d) UNIONE INSIEMISTICA

Facendo a questo punto l'*unione* degli intervalli ottenuti,

che sono $\varnothing$, $\left[-\frac{3}{2}, -1\right]$ e $[-1, +\infty)$, si ottiene $\boxed{x \geq -\frac{3}{2}}$

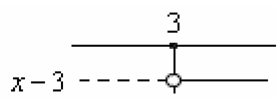
7)

$$\boxed{|x-3|>2x-1}$$

Qui entro stanghette c'è una sola espressione …
Procediamo allo stesso modo,
tenendo presente che però diversi passaggi si potrebbero fare "a mente".

a) STUDIO DEL SEGNO $\quad x-3>0 \quad x>3$

b) QUADRO SINOTTICO



c) DISTINZIONE DEI CASI

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ 3-x>2x-1; \quad -3x>-4; \quad x<4/3 \end{cases} \quad \boxed{x<\frac{4}{3}}$$

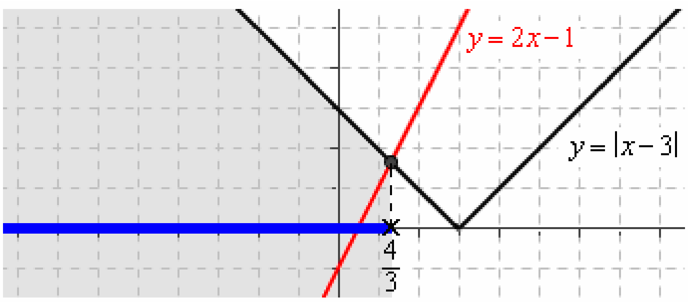
$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x-3>2x-1; \quad -x>2; \quad x<-2 \end{cases} \quad \boxed{\text{sistema impossibile}}$$

d) UNIONE INSIEMISTICA

Facendo a questo punto l'*unione* degli intervalli ottenuti,

che sono $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$ e l'insieme vuoto $\varnothing$, si ottiene $\boxed{x<\frac{4}{3}}$

… e la risoluzione grafica
conferma la nostra conclusione:
il grafico
della **funzione a 1° membro**
si trova al di **sopra** (>)
del grafico della funzione a 2° membro
proprio per i valori di x
minori di 4/3



8)

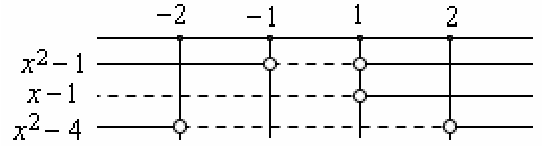
$$\boxed{x^2+\left|x^2-1\right|+\left|x-1\right|\le\left|x^2-4\right|}$$

STUDIAMO IL SEGNO di ciascuna espressione entro stanghette,
tracciamo un **"QUADRO SINOTTICO"** che riassuma lo studio effettuato,
DISTINGUIAMO I VARI CASI:

$x^2-1>0 \quad x<-1 \vee x>1$

$x-1>0 \quad x>1$

$x^2-4>0 \quad x<-2 \vee x>2$



$$\begin{cases} x\le -2 \\ x^2+\cancel{x^2}\cancel{-1}-x\cancel{+1}\le \cancel{x^2}-4;\quad x^2+x+4\le 0 \text{ imposs.}\,(\Delta<0) \end{cases} \quad \boxed{\text{sistema impossibile}}$$

$$\begin{cases} -2\le x\le -1 \\ x^2+x^2\cancel{-1}-x\cancel{+1}\le -x^2+4;\quad 3x^2-x-4\le 0;\quad -1\le x\le \frac{4}{3} \end{cases} \quad \boxed{x=-1}$$

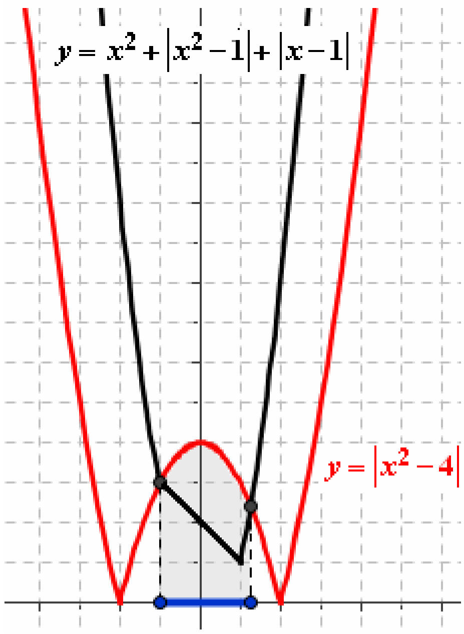
$$\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ \cancel{x^2}\cancel{-x^2}+1-x+1\le -x^2+4;\quad x^2-x-2\le 0;\quad -1\le x\le 2 \end{cases} \quad \boxed{-1\le x\le 1}$$

$$\begin{cases} 1\le x\le 2 \\ x^2+x^2-1+x-1\le -x^2+4;\quad 3x^2+x-6\le 0;\quad \underbrace{\frac{-1-\sqrt{73}}{6}}_{\approx -1,59}\le x\le \underbrace{\frac{-1+\sqrt{73}}{6}}_{\approx 1,26} \end{cases} \quad \boxed{1\le x\le \frac{-1+\sqrt{73}}{6}}$$

$$\begin{cases} x\ge 2 \\ \cancel{x^2}+x^2-1+x-1\le \cancel{x^2}-4;\quad x^2+x+2\le 0 \textit{ imposs.}\,(\Delta<0) \end{cases} \quad \boxed{\text{sistema impossibile}}$$

Facendo ora l'**UNIONE INSIEMISTICA** degli intervalli ottenuti, si ottiene $\boxed{-1\le x\le \frac{-1+\sqrt{73}}{6}}$

RISOLUZIONE GRAFICA



Disegnare la funzione

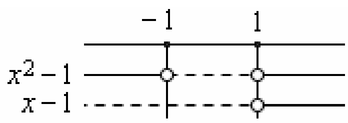
$y=\left|x^2-4\right|$

a secondo membro è immediato:
basta tracciare il grafico della parabola $y=x^2-4$
poi eliminare la parte con ordinate negative, sostituendola con la sua simmetrizzazione rispetto all'asse orizzontale.

Per la ***funzione a primo membro***

$y=x^2+\left|x^2-1\right|+\left|x-1\right|$

occorrerà invece ***distinguere fra più casi****.*
Ecco la parte del precedente "quadro sinottico", che si riferisce alle espressioni presenti a primo membro.



Siamo così condotti ai casi:

$\boxed{x\le -1}$: $\boxed{y=}\,x^2+x^2\cancel{-1}-x\cancel{+1}=\boxed{2x^2-x}$ (*arco di parabola*)

$\boxed{-1\le x\le 1}$: $\boxed{y=}\,\cancel{x^2}\cancel{-x^2}+1-x+1=\boxed{-x+2}$ (*segmento di retta*)

$\boxed{x\ge 1}$: $\boxed{y=}\,x^2+x^2-1+x-1=\boxed{2x^2+x-2}$ (*arco di parabola*)

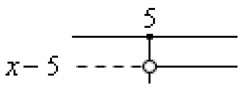
9)

$$\boxed{\frac{x}{|x-5|-2}<0}$$

a) STUDIAMO IL SEGNO dell'espressione entro stanghette:

$x-5>0 \quad x>5$

b) Un semplice QUADRO RIASSUNTIVO
(assolutamente NON indispensabile, data la semplicità della situazione) **potrebbe essere:**



c) DISTINGUIAMO I due CASI:

1° caso

$$\begin{cases} x \le 5 \\ \dfrac{x}{-x+5-2}<0; \quad \dfrac{x}{-x+3}<0; \quad \underbrace{\dfrac{x}{x-3}>0}_{\text{NOTA}} \end{cases}$$

NOTA – In questo passaggio, abbiamo cambiato i segni del denominatore:
così facendo, il segno della frazione cambia,
quindi deve cambiare anche il verso della disequazione che da < diventa >

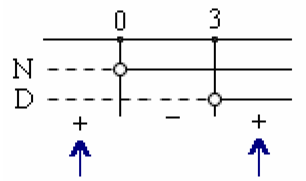
Dobbiamo risolvere la disequazione fratta:
ciò richiede di fare uno studio dei segni di Numeratore e Denominatore,
per poi tracciare uno schema per il confronto dei segni e trarre le conclusioni.

Vedi comunque il riquadro alla successiva pag. 41

$$\overset{\text{N}}{\underset{\text{D}}{\frac{x}{x-3}}}>0$$

$N>0 \quad x>0$

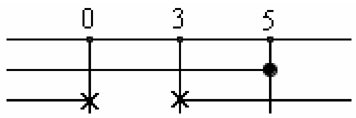
$D>0 \quad x-3>0 \quad x>3$



… e le soluzioni della disequazione fratta sono dunque i valori $x<0 \vee x>3$

Riprendiamo il sistema e avremo: $\begin{cases} x \le 5 \\ x<0 \vee x>3 \end{cases};$

uno "schema di sistema"



ci dice che le sue soluzioni sono i valori $\boxed{x<0 \vee 3<x \le 5}$

2° caso

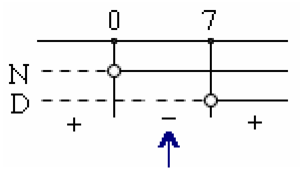
$$\begin{cases} x \ge 5 \\ \dfrac{x}{x-5-2}<0; \quad \dfrac{x}{x-7}<0 \end{cases}$$

Risolviamo la disequazione fratta:

$$\overset{\text{N}}{\underset{\text{D}}{\frac{x}{x-7}}}<0$$

$N>0 \quad x>0$

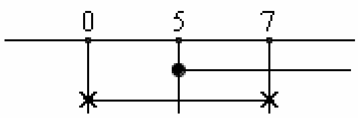
$D>0 \quad x-7>0 \quad x>7$



… e le soluzioni della disequazione fratta sono dunque i valori $0<x<7$

Riprendiamo il sistema e avremo: $\begin{cases} x \ge 5 \\ 0<x<7 \end{cases};$

uno "schema di sistema"

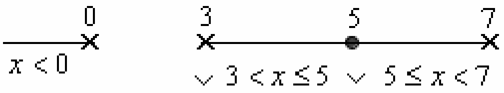


ci dice che le sue soluzioni sono i valori $\boxed{5 \le x<7}$

d) UNIONE INSIEMISTICA

Prendendo in esame i due casi, abbiamo dunque messo nel nostro “paniere” le soluzioni
$\boxed{x<0 \vee 3<x\le 5}$ e $\boxed{5\le x<7}$
quindi in definitiva (facciamo l’**unione insiemistica** dei vari intervalli)
le soluzioni della nostra disequazione sono gli *x* tali che
$\boxed{x<0 \vee 3<x<7}$.

Per effettuare questa “unione insiemistica” possiamo compilare, volendo, uno “schema di unione”:



nel quale gli intervalli-soluzione vendono disposti su di una stessa riga…
… ma nella maggior parte dei casi tale schema è superfluo:
basta mentalmente “far comunicare” fra loro, con attenzione, gli intervalli trovati.

OSSERVAZIONE
Esercizi come questo sono per loro natura piuttosto “lunghetti”.
C’è il modo, sovente, di rendere lo svolgimento un poco più spedito.

Ad esempio, di fronte alla disequazione $\frac{x}{x-3}>0$,
avremmo potuto trovarne le soluzioni anche immediatamente,
senza lo “schema per la disequazione fratta”, col ragionamento esposto nel seguente riquadro.

RISOLUZIONE RAPIDA DI UNA DISEQUAZIONE DELLA FORMA $\frac{ax+b}{cx+d}\gtrless 0$

- Il segno di un QUOZIENTE fra due numeri
  è uguale al segno che avrebbe il PRODOTTO fra quegli stessi numeri.
  Allora la condizione $\frac{x}{x-3}>0$ equivale perfettamente alla condizione $x(x-3)>0$.
  Ma quest’ultima è una disequazione di 2° grado,
  e dalla scomposizione in fattori
  si “leggono” istantaneamente le soluzioni dell’equazione associata, che sono 0 e 3;
  dobbiamo prendere i “valori esterni”,
  quindi le soluzioni della disequazione considerata saranno
  $x<0 \vee x>3$.

- Allo stesso modo, la disequazione $\frac{x}{x-7}<0$ equivale alla $x(x-7)<0$,
  disequazione di 2° grado per la quale le soluzioni dell’equazione associata
  si “leggono” subito osservando la scomposizione in fattori, e sono 0 e 7.
  Qui, per via del <, vanno presi i “valori interni”,
  quindi le soluzioni della disequazione considerata saranno
  $0<x<7$.

- Un ultimo esempio.
  Se la disequazione proposta fosse
  $\boxed{\frac{x+5}{2x-1}\ge 0}$,
  noi prenderemmo i “valori esterni” rispetto a –5 e 1/2,
  più anche il valore –5 per il quale si annulla il numeratore
  (infatti il verso è $\ge$, e una frazione è uguale a 0
  quando si annulla il suo NUMERATORE,
  purché non si annulli contemporaneamente anche il denominatore)
  e avremmo dunque, come soluzioni,
  $\boxed{x\le -5 \vee x>\frac{1}{2}}$

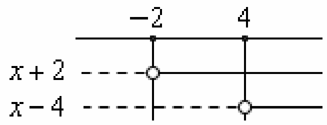
10)

$$\boxed{\frac{|x+2|-2x-1}{|x-4|-x}>0}$$

a) STUDIAMO IL SEGNO di ciascuna espressione entro stanghette:

$x+2>0 \quad x>-2$
$x-4>0 \quad x>4$

b) Tracciamo un "QUADRO SINOTTICO" che riassuma lo studio precedente:



c) DISTINGUIAMO I VARI CASI:

1° caso

$$\begin{cases} x\le -2 \\ \dfrac{-x-2-2x-1}{-x+4-x}>0; \quad \dfrac{-3x-3}{-2x+4}>0; \quad \underbrace{\dfrac{-x-1}{-x+2}>0}_{\text{NOTA 1}}; \quad \underbrace{\dfrac{x+1}{x-2}>0}_{\text{NOTA 2}} \end{cases}$$

NOTA 1 – In questo passaggio, abbiamo diviso per 3 e moltiplicato per 2 ambo i membri

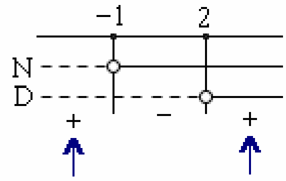
NOTA 2 – In questo passaggio, abbiamo cambiato i segni sia del num. che del denom.: così facendo, la frazione rimane inalterata, quindi il verso NON deve cambiare

Dobbiamo risolvere la disequazione fratta: possiamo applicare il "metodo rapido" prima studiato, oppure, più "classicamente", fare uno studio dei segni di Numeratore e Denominatore, per poi tracciare uno schema per il confronto dei segni e trarre le conclusioni.

$$\frac{\overset{\text{N}}{x+1}}{\underset{\text{D}}{x-2}}>0$$

N > 0 $\quad x+1>0 \quad x>-1$

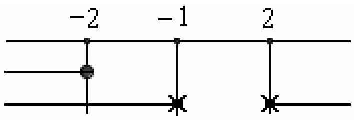
D > 0 $\quad x-2>0 \quad x>2$



… e le soluzioni della disequazione fratta sono dunque i valori $x<-1 \vee x>2$

Riprendiamo il sistema e avremo: $\begin{cases} x\le -2 \\ x<-1 \vee x>2 \end{cases}$;

uno "schema di sistema"



ci dice che le sue soluzioni sono i valori $\boxed{x\le -2}$

2° caso

$$\begin{cases} -2\le x\le 4 \\ \dfrac{x+2-2x-1}{-x+4-x}>0; \quad \dfrac{-x+1}{-2x+4}>0; \quad \underbrace{\dfrac{-x+1}{-x+2}>0}_{\text{NOTA 3}} \quad \underbrace{\dfrac{x-1}{x-2}>0}_{\text{NOTA 4}} \end{cases}$$

NOTA 3 – In questo passaggio, abbiamo moltiplicato per 2 ambo i membri

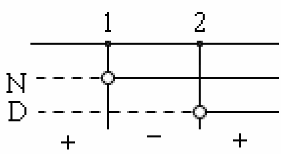
NOTA 4 – In questo passaggio, abbiamo cambiato i segni sia del num. che del denom.: così facendo, la frazione rimane inalterata, quindi il verso NON deve cambiare

Risolviamo la disequazione fratta:

$$\frac{\overset{\text{N}}{x-1}}{\underset{\text{D}}{x-2}}>0$$

N > 0 $\quad x-1>0 \quad x>1$

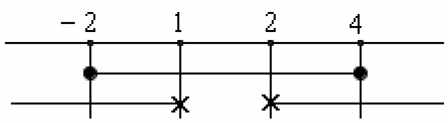
D > 0 $\quad x-2>0 \quad x>2$



… e le soluzioni della disequazione fratta sono dunque i valori $x<1 \;\vee\; x>2$

Riprendiamo il sistema e avremo: $\begin{cases} -2\le x\le 4 \\ x<1 \;\vee\; x>2 \end{cases}$;

uno "schema di sistema"



ci dice che le sue soluzioni sono i valori $\boxed{-2\le x<1 \vee 2<x\le 4}$

3° caso

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ \dfrac{x+2-2x-1}{\cancel{x}-4-\cancel{x}} > 0; \quad \dfrac{-x+1}{-4} > 0; \quad \underbrace{\dfrac{x-1}{4} > 0}_{\text{NOTA 5}}; \quad \underbrace{x-1>0}_{\text{NOTA 6}}; \quad x>1 \end{cases}$$

NOTA 5 – In questo passaggio, abbiamo cambiato i segni sia del num. che del denom.: così facendo, la frazione rimane inalterata, quindi il verso NON deve cambiare

NOTA 6 – In questo passaggio, abbiamo moltiplicato per 4 ambo i membri

Anche senza uno "schema di sistema" (evitabile, data la grande semplicità della situazione) ne traiamo che le soluzioni di questo sistema sono i valori

$\boxed{x \geq 4}$

d) UNIONE INSIEMISTICA

Ricapitoliamo: esaminando i vari vasi, abbiamo trovato le soluzioni

$\boxed{x \leq -2}$; $\boxed{-2 \leq x < 1 \vee 2 < x \leq 4}$; $\boxed{x \geq 4}$

quindi in definitiva (facciamo l'**unione insiemistica** dei vari intervalli)
le soluzioni della nostra disequazione sono gli *x* tali che

$\boxed{x < 1 \vee x > 2}$.

11)

$\boxed{\dfrac{|x-5|-4}{|x-3|} < 0}$ **POSSIBILITA' DI PROCEDERE MOLTO RAPIDAMENTE!**

Qui basta una semplice riflessione per abbreviare *tantissimo* la risoluzione.
Il denominatore, essendo un valore assoluto, è positivo per sua natura,
quindi non influisce sul segno della frazione, e **lo possiamo eliminare:**
dobbiamo soltanto ricordarci di escludere quel valore eccezionale (il 3) per il quale si annulla.

$$\frac{|x-5|-4}{\cancel{|x-3|}} < 0 \quad (x \neq 3)$$

Abbiamo ora una disequazione di tipo particolare, risolubile molto rapidamente:

$$|x-5|-4<0 \qquad |x-5|<4 \qquad -4<x-5<4 \qquad 1<x<9$$

Ricordandoci a questo punto della condizione posta,
concluderemo scrivendo che le soluzioni della nostra disequazione sono i valori

$\boxed{1 < x < 9 \text{ ma } x \neq 3}$.

L'insieme delle soluzioni si può scrivere come $S = (1, 9) - \{3\}$ oppure come $S = (1, 3) \cup (3, 9)$.

12)

$\boxed{\dfrac{|3x-7|+2}{|4x-3|-1} \geq 0}$ **POSSIBILITA' DI PROCEDERE MOLTO RAPIDAMENTE!**

Qui possiamo osservare **che il numeratore,**
somma di un valore assoluto con un numero strettamente positivo,
è >0 per qualsiasi valore di *x*, quindi non influisce sul segno della frazione.
Tale numeratore non si può annullare,
quindi non si può annullare, per nessun valore di *x*, nemmeno la frazione.
La disequazione perciò potrà essere verificata solo come disuguaglianza stretta (col >).
E le sue soluzioni saranno quei valori di *x* che rendono il *denominatore* >0:

$$\frac{|3x-7|+2}{|4x-3|-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\overset{1}{\cancel{|3x-7|+2}}}{|4x-3|-1} \geq 0 \Leftrightarrow |4x-3|-1>0 \Leftrightarrow |4x-3|>1$$

$$4x-3<-1 \vee 4x-3>1$$

$$4x<2 \vee 4x>4$$

$$\boxed{x<1/2 \ \vee \ x>1}$$

13)

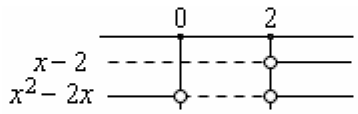
$$\boxed{\frac{3x+|x-2|}{|x^2-2x|-1} \le 0}$$

a) STUDIAMO IL SEGNO di ciascuna espressione entro stanghette:

$x-2>0 \quad x>2$

$x^2-2x>0 \quad x(x-2)>0 \quad x<0 \vee x>2$

b) Tracciamo un "QUADRO SINOTTICO" che riassuma lo studio precedente:



c) DISTINGUIAMO I VARI CASI:

1° caso

$$\begin{cases} x \le 0 \\ \dfrac{3x-x+2}{x^2-2x-1} \le 0; \quad \dfrac{2x+2}{x^2-2x-1} \le 0; \quad \underbrace{\dfrac{x+1}{x^2-2x-1} \le 0}_{\text{NOTA}} \end{cases}$$

NOTA
In questo passaggio, abbiamo diviso ambo i membri per 2

Dobbiamo risolvere la disequazione fratta:
ciò richiede di fare uno studio dei segni di Numeratore e Denominatore,
per poi tracciare uno schema per il confronto dei segni e trarre le conclusioni.

$$\frac{\overset{\text{N}}{x+1}}{\underset{\text{D}}{x^2-2x-1}} \le 0$$

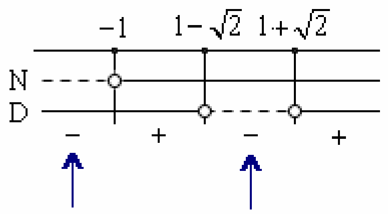
$\text{N}>0 \quad x+1>0 \quad x>-1$

$\text{D}>0 \quad x^2-2x-1>0$ Le soluzioni dell' "equazione associata" sono:

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$;

dobbiamo prendere i "valori esterni", quindi avremo

$x < 1-\sqrt{2} \ \vee \ x > 1+\sqrt{2}$

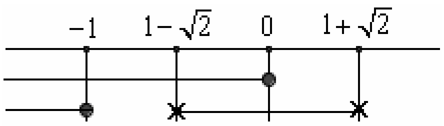


Le soluzioni della disequazione fratta sono dunque: $x \le -1 \ \vee \ 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$.

Riprendiamo il sistema e avremo:

$$\begin{cases} x \le 0 \\ x \le -1 \ \vee \ 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

Con lo "schema di sistema"



ricaviamo che le soluzioni del sistema sono: $\boxed{x \le -1 \ \vee \ 1-\sqrt{2} < x \le 0}$

2° caso

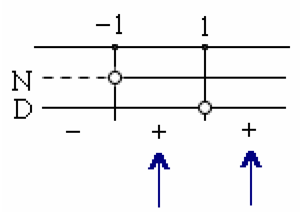
$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{3x - x + 2}{-x^2 + 2x - 1} \le 0; \quad \dfrac{2x+2}{-x^2+2x-1} \le 0; \quad \underbrace{\dfrac{x+1}{x^2-2x+1} \ge 0}_{\text{NOTA}}; \quad \dfrac{x+1}{(x-1)^2} \ge 0 \end{cases}$$

NOTA
In questo passaggio, abbiamo
a) diviso ambo i membri per 2
b) cambiato i segni a denominatore;
in questo modo, **tutta la frazione cambia di segno** e bisogna **cambiare anche il verso** della disequazione, che da $\le$ si muta in $\ge$

Risolviamo la disequazione fratta:

$$\frac{\overset{\text{N}}{x+1}}{\underset{\text{D}}{(x-1)^2}} \ge 0$$

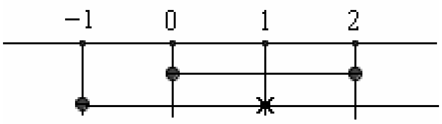
N > 0 $\quad x+1>0 \quad x>-1$
D > 0 $\quad (x-1)^2>0 \quad x \ne 1$



Le soluzioni della disequazione fratta sono dunque: $x \ge -1$ ma $x \ne 1$.

Riprendiamo il sistema e avremo: $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x \ge -1 \quad \text{ma } x \ne 1 \end{cases}$

Con lo "schema di sistema"



ricaviamo che le soluzioni del sistema sono: $\boxed{0 \le x \le 2 \quad \text{ma } x \ne 1}$

3° caso

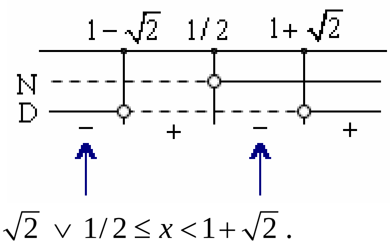
$$\begin{cases} x \ge 2 \\ \dfrac{3x + x - 2}{x^2 - 2x - 1} \le 0; \quad \dfrac{4x-2}{x^2-2x-1} \le 0; \quad \underbrace{\dfrac{2x-1}{x^2-2x-1} \le 0}_{\text{NOTA}} \end{cases}$$

NOTA - In questo passaggio, abbiamo diviso ambo i membri per 2

Risolviamo la disequazione fratta:

$$\frac{\overset{\text{N}}{2x-1}}{\underset{\text{D}}{x^2-2x-1}} \le 0$$

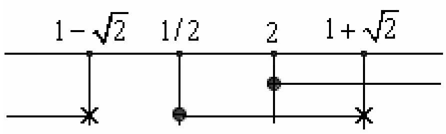
N > 0 $\quad 2x-1>0 \quad x>1/2$
D > 0 $\quad x^2-2x-1>0$
$\quad x<1-\sqrt{2} \vee x>1+\sqrt{2}$



Le soluzioni della disequazione fratta sono dunque: $x<1-\sqrt{2} \ \vee \ 1/2 \le x < 1+\sqrt{2}$.

Riprendiamo il sistema e avremo: $\begin{cases} x \ge 2 \\ x<1-\sqrt{2} \ \vee \ 1/2 \le x < 1+\sqrt{2} \end{cases}$

Con lo "schema di sistema"



ricaviamo che le soluzioni del sistema sono: $\boxed{2 \le x < 1+\sqrt{2}}$

d) Facendo ora l'UNIONE INSIEMISTICA dei tre insiemi di soluzioni trovati, abbiamo infine le soluzioni della nostra disequazione:

$\boxed{x \le -1 \ \vee \ 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2} \ \text{ma } x \ne 1}$.

14)

$$\boxed{\left|\frac{x-1}{x-2}\right|<3}$$

$$-3<\frac{x-1}{x-2}<3$$

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-2}>-3\\[2mm]\dfrac{x-1}{x-2}<3\end{cases}$$

$$1^{a}\ \text{disequazione}:\ \frac{x-1}{x-2}>-3\quad \frac{x-1}{x-2}+3>0\quad \frac{x-1+3x-6}{x-2}>0\quad \frac{4x-7}{x-2}>0\qquad x<\frac{7}{4}\vee x>2$$

$$2^{a}\ \text{disequazione}:\ \frac{x-1}{x-2}<3\quad \frac{x-1}{x-2}-3<0\quad \frac{x-1-3x+6}{x-2}<0\quad \frac{-2x+5}{x-2}<0\quad \frac{2x-5}{x-2}>0\qquad x<2\vee x>\frac{5}{2}$$

$$\text{Sistema}:\begin{cases}x<\dfrac{7}{4}\vee x>2\\[2mm]x<2\vee x>\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

da cui

$$\boxed{x<\frac{7}{4}\vee x>\frac{5}{2}}$$

15)

$$\boxed{\left|\frac{x-1}{x}\right|>3}$$

$$\frac{x-1}{x}<-3 \qquad \vee \qquad \frac{x-1}{x}>3$$

$$\frac{x-1}{x}+3<0 \qquad \vee \qquad \frac{x-1}{x}-3>0$$

$$\frac{x-1+3x}{x}<0 \qquad \vee \qquad \frac{x-1-3x}{x}>0$$

$$\frac{4x-1}{x}<0 \qquad \vee \qquad \frac{-2x-1}{x}>0$$

$$\frac{4x-1}{x}<0 \qquad \vee \qquad \frac{2x+1}{x}<0$$

$$0<x<\frac{1}{4} \qquad \vee \qquad -\frac{1}{2}<x<0$$

quindi, in definitiva,

$$\boxed{-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{4}\ \text{ ma }\ x\neq 0}$$

16)

$$\boxed{1<|2x-1|<3}$$

$$1<2x-1<3\ \vee\ -3<2x-1<-1$$

$$2<2x<4\quad \vee\ -2<2x<0$$

$$\boxed{1<x<2\quad \vee -1<x<0}$$

17)

$\boxed{\left|x^2-6x+8\right|+\left|x^2-x-12\right|>0}$

Un valore assoluto è sempre ≥ 0,
quindi anche la somma di due valori assoluti sarà sempre ≥ 0;
anzi, la somma di due valori assoluti di norma è addirittura *strettamente* positiva (>0), tranne che in quei casi eccezionali in cui si annullano in simultanea sia l'uno che l'altro valore assoluto.
Basta allora, per trovare le soluzioni della disequazione col >,
escludere quei valori di *x* (ammesso che esistano) per i quali
sono simultaneamente =0 sia l'una che l'altra espressione entro stanghette
(quindi, sia l'uno che l'altro valore assoluto).
Andiamo dunque alla ricerca di tali eventuali valori.
Risolviamo le equazioni $x^2-6x+8=0,\ \ x^2-x-12=0$.

$x^2-6x+8=0\ \ (x-2)(x-4)=0\ \ x=2 \vee x=4$

$x^2-x-12=0\ \ (x+3)(x-4)=0\ \ x=-3 \vee x=4$

Dunque effettivamente *le due equazioni hanno una soluzione in comune*!
Esiste un valore, il 4, per cui entrambi i valori assoluti si annullano in simultanea,
per il quale quindi la somma dei due valori assoluti è nulla
e la disequazione, eccezionalmente, NON è verificata;
per qualsiasi altro valore di *x* invece è verificata.
Le soluzioni sono in definitiva tutti i valori

$\boxed{x \neq 4}$.

L'insieme delle soluzioni è

$\mathrm{S}=\mathbb{R}-\{4\}=(-\infty,+\infty)-\{4\}=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$

18)

$\boxed{\left|x^2+3\right|-|x|^2-|5x+2|>0}$

Se si riflette un attimo, la risoluzione potrà essere rapidissima perché:

- x^2+3 è >0 per ogni x quindi possiamo sciogliere le stanghette: $\left|x^2+3\right|=x^2+3$
- è $|x|^2=x^2$ qualunque sia x, quindi anche in questo caso le stanghette se ne possono andare.

La disequazione diventa perciò

$\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}-|5x+2|>0$

$-|5x+2|>-3$

$|5x+2|<3$

$-3<5x+2<3$ e sottraendo 2 da tutti gli anelli della catena otteniamo

$-5<5x<1$ da cui, dividendo per 5 tutti gli anelli della catena,

$\boxed{-1<x<1/5}$

19)

$\boxed{|x|\cdot|x-5|>6}$

Il *prodotto* di due valori assoluti è uguale al valore assoluto del prodotto:

$|\mathrm{a}|\cdot|\mathrm{b}|=|\mathrm{ab}|\quad \forall \mathrm{a},\mathrm{b}\in\mathbb{R}$ (occhio: *non così* sarebbe per la somma!)

Quindi

$|x(x-5)|>6$ *da cui*

$x(x-5)<-6 \quad \vee \quad x(x-5)>6$

$x^2-5x<-6 \quad \vee \quad x^2-5x>6$

$x^2-5x+6<0 \quad \vee \quad x^2-5x-6>0$

$\boxed{2<x<3 \qquad \vee \quad x<-1 \vee x>6}$