

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI UN PO' PIU' DIFFICILI

a) $|2|x-3|-x+2| < 6-x$

In questa **disequazione** abbiamo “**valore assoluto internamente a valore assoluto**”.

Cominciamo a considerare l'espressioncina col valore assoluto *più interna*:

siamo condotti alla distinzione di casi

$$x \leq 3, x \geq 3.$$

Avremo allora

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ |2(3-x)-x+2| < 6-x \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 3 \\ |2(x-3)-x+2| < 6-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ |6-2x-x+2| < 6-x \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 3 \\ |2x-6-x+2| < 6-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ |8-3x| < 6-x \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 3 \\ |x-4| < 6-x \end{cases}$$

Ora, nell'ambito di ciascuno dei due sistemi, siamo costretti ad un'altra distinzione di casi:

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ \begin{cases} x \leq 8/3 \\ |8-3x| < 6-x \end{cases} \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 8/3 \\ |3x-8| < 6-x \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x \leq 4 \\ |4-x| < 6-x \end{cases} \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 4 \\ |x-4| < 6-x \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ \begin{cases} x \leq 8/3 \\ x > 1 \end{cases} \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 8/3 \\ x < 7/2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x \leq 4 \\ \text{sempre verificata} \end{cases} \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 4 \\ x < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ 1 < x \leq \frac{8}{3} \vee \frac{8}{3} \leq x < \frac{7}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 4 \vee 4 \leq x < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ 1 < x < \frac{7}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 3 \\ x < 5 \end{cases}$$

$$1 < x \leq 3 \vee 3 \leq x < 5$$

perciò, in definitiva,

$$\boxed{1 < x < 5}$$

b) $|3-|x+4|| = |1-|x+4||$

Questa **equazione** è un po' più agevole da risolvere rispetto alla disequazione precedente; infatti è possibile scrivere

$$3-|x+4| = \pm(1-|x+4|)$$

$$\cancel{3-|x+4|} = \cancel{1-|x+4|} \vee 3-|x+4| = -1+|x+4|$$

$$\text{impossibile} \vee -2|x+4| = -4$$

$$|x+4| = 2$$

$$x+4 = \pm 2 \begin{cases} x+4 = 2; \boxed{x = -2} \\ x+4 = -2; \boxed{x = -6} \end{cases}$$

$$c) \sqrt{x^2 + 3|x|} < x + 2$$

Questa è una **disequazione “mista”**, ossia tanto *irrazionale* quanto *contenente l'incognita entro le stanghette di valore assoluto*.

1° MODO

Possiamo pensare innanzitutto al fatto che si tratti di una disequazione col *valore assoluto*, e allora distingueremo per prima cosa i due casi

$$x \geq 0 \text{ e } x \leq 0$$

(i due sistemi sono idealmente separati da un “vel” logico):

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ \sqrt{x^2 - 3x} < x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 3x \geq 0 \\ x + 2 > 0 \\ x^2 - 3x < (x + 2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x(x - 3) \geq 0; \quad x \leq 0 \vee x \geq 3 \\ x > -2 \\ x^2 - 3x < x^2 + 4x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 0 \vee x \geq 3 \\ x > -2 \\ -7x < 4; \quad x > -\frac{4}{7} \end{cases}$$

$$\text{Soluzioni sistema: } -\frac{4}{7} < x \leq 0$$

$$\text{In definitiva, abbiamo } -\frac{4}{7} < x \leq 0 \vee x \geq 0 \text{ e dunque } \boxed{x > -\frac{4}{7}}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + 3x} < x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 3x \geq 0 \\ x + 2 > 0 \\ x^2 + 3x < (x + 2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x(x + 3) \geq 0; \quad x \leq -3 \vee x \geq 0 \\ x > -2 \\ x^2 + 3x < x^2 + 4x + 4; \quad -x < 4; \quad x > -4 \end{cases}$$

$$\text{Soluzioni sistema: } x \geq 0$$

2° MODO

Oppure possiamo pensare innanzitutto al fatto che si tratti di una disequazione *irrazionale*, e allora scriveremo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x^2 + 3|x| \geq 0 \\ x + 2 > 0 \\ x^2 + 3|x| < (x + 2)^2 \end{cases}$$

dopodiché distingueremo i due casi $x \geq 0$ e $x \leq 0$ e avremo

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 3x \geq 0 \\ x + 2 > 0 \\ x^2 - 3x < (x + 2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 3x \geq 0 \\ x + 2 > 0 \\ x^2 + 3x < (x + 2)^2 \end{cases}$$

ritornando così alla stessa situazione algebrica precedente,

con (ovviamente) le medesime soluzioni di prima: $\boxed{x > -\frac{4}{7}}$

$$d) \sqrt{|x-8|} > |x-1|+1$$

1° MODO

Possiamo pensare innanzitutto al fatto che si tratti di una disequazione col *valore assoluto*, e allora distingueremo per prima cosa i tre casi

$$x \leq 1, 1 \leq x \leq 8, x \geq 8$$

(i tre sistemi sono idealmente separati da un "vel" logico):

$\begin{cases} x \leq 1 \\ \sqrt{8-x} > 1-x+1 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \leq x \leq 8 \\ \sqrt{8-x} > x-1 \end{cases}$	$\begin{cases} x \geq 8 \\ \sqrt{x-8} > x-1 \end{cases}$
$\begin{cases} x \leq 1 \\ \sqrt{8-x} > 2-x \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \leq x \leq 8 \\ \begin{cases} x < 0 \\ 8-x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ 8-x > x^2 \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} x \geq 8 \\ \begin{cases} x < 0 \\ x-8 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x-8 > x^2 \end{cases} \end{cases}$
$\begin{cases} x \leq 1 \\ \begin{cases} 2-x < 0 \\ 8-x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 8-x > (2-x)^2 \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \leq x \leq 8 \\ \begin{cases} x < 0 \\ x \leq 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+x-8 < 0 \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} x \geq 8 \\ \begin{cases} x < 0 \\ x \geq 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x+8 < 0 \end{cases} \end{cases}$
$\begin{cases} x \leq 1 \\ \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 2 \\ 8-x > 4-4x+x^2 \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \leq x \leq 8 \\ \begin{cases} x < 0 \\ x < 0 \vee \frac{-1-\sqrt{33}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} x \geq 8 \\ \text{imp.} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x+8 < 0 \text{ imp.} \end{cases} \end{cases}$
$\begin{cases} x \leq 1 \\ 2 < x \leq 8 \vee \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2-3x-4 < 0 \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \leq x \leq 8 \\ \begin{cases} x < 0 \\ x < 0 \vee 0 \leq x < \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} x \geq 8 \\ \text{imp.} \vee \text{imp.} \end{cases}$
$\begin{cases} x \leq 1 \\ 2 < x \leq 8 \vee \begin{cases} x \leq 2 \\ -1 < x < 4 \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \leq x \leq 8 \\ \begin{cases} x < \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} x \geq 8 \\ \text{imp.} \end{cases}$
$\begin{cases} x \leq 1 \\ 2 < x \leq 8 \vee -1 < x \leq 2 \end{cases}$	$\boxed{1 \leq x < \frac{-1+\sqrt{33}}{2}}$	<p>Sistema impossibile</p>
$\begin{cases} x \leq 1 \\ -1 < x \leq 8 \end{cases}$		
$\boxed{-1 < x \leq 1}$		

In definitiva, le soluzioni della disequazione sono $-1 < x \leq 1 \vee 1 \leq x < \frac{-1+\sqrt{33}}{2}$ ovvero $\boxed{-1 < x < \frac{-1+\sqrt{33}}{2}}$

2° MODO

MEGLIO, IN QUESTO CASO,

pensare innanzitutto al fatto che si tratti di una disequazione *irrazionale*, scrivendo dunque la coppia di sistemi:

$$\begin{cases} |x-1|+1 < 0 \text{ imp.} \\ |x-8| \geq 0 \text{ sempre verif.} \end{cases} \vee \begin{cases} |x-1|+1 \geq 0 \text{ sempre verif.} \\ |x-8| > (|x-1|+1)^2 \end{cases}$$

Sistema impossibile

Quindi la disequazione data finisce per essere equivalente alla

$$|x-8| > (|x-1|+1)^2,$$

ossia alla

$$|x-8| > |x-1|^2 + 2|x-1|+1; \quad |x-8| > (x-1)^2 + 2|x-1|+1; \quad |x-8| > x^2 - 2x + 2 + 2|x-1|$$

Prova a risolverla e vedrai che troverai, più rapidamente, le stesse soluzioni di prima.