

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI: CORREZIONI

1)

$$\boxed{\sqrt{2x+8} < x}$$
$$\begin{cases} 2x+8 \geq 0, 2x \geq -8, x \geq -4 \\ x > 0 \\ 2x+8 < x^2, x^2 - 2x - 8 > 0, (x+2)(x-4) > 0, x < -2 \vee x > 4 \end{cases}$$
$$\boxed{x > 4}$$

2)

$$\boxed{3\sqrt{x} < x+2}$$
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 > 0, x > -2 \\ 9x < x^2 + 4x + 4, x^2 - 5x + 4 > 0, (x-1)(x-4) > 0, x < 1 \vee x > 4 \end{cases}$$
$$\boxed{0 \leq x < 1 \vee x > 4}$$

3)

$$\boxed{\sqrt{x^2 - 4} + x < 5}$$
$$\boxed{\sqrt{x^2 - 4} < 5 - x}$$
$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0, x^2 \geq 4, |x| \geq 2, x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ 5 - x > 0, -x > -5, x < 5 \\ x^2 - 4 < 25 - 10x + x^2, 10x < 29, x < 29/10 \end{cases}$$
$$\boxed{x \leq -2 \vee 2 \leq x < 29/10}$$

5)

$$\boxed{\sqrt{30-x} < x}$$
$$\begin{cases} 30-x \geq 0, -x \geq -30, x \leq 30 \\ x > 0 \\ 30-x < x^2, x^2 + x - 30 > 0, (x+6)(x-5) > 0, x < -6 \vee x > 5 \end{cases}$$
$$\boxed{5 < x \leq 30}$$

6)

$$\boxed{\sqrt{x^2 - 2x + 5} < x}$$
$$\begin{cases} x^2 - 2x + 5 \geq 0, \text{ sempre verificata } (\Delta < 0) \\ x > 0 \\ x^2 - 2x + 5 < x^2, 2x - 5 > 0, x > 5/2 \end{cases}$$
$$\boxed{x > 5/2}$$

7)

$$\boxed{\sqrt{x^2 + 1} \leq x + 3}$$
$$\begin{cases} x^2 + 1 \geq 0, \text{ sempre verificata} \\ x + 3 \geq 0, x \geq -3 \\ x^2 + 1 \leq x^2 + 6x + 9, -6x \leq 8, x \geq -4/3 \end{cases}$$
$$\boxed{x \geq -4/3}$$

9)

$$\boxed{2(\sqrt{x}-x) < 1-x}$$

$$2\sqrt{x}-2x < 1-x$$

$$\boxed{2\sqrt{x} < x+1}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+1 > 0, x > -1 \\ 4x < x^2+2x+1, x^2-2x+1 > 0, (x-1)^2 > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

$$\boxed{x \geq 0 \text{ ma } x \neq 1}$$

10)

$$\boxed{\frac{\sqrt{x+1}}{2} \leq x}$$

$$\sqrt{x+1} \leq 2x$$

$$\boxed{\sqrt{x} \leq 2x-1}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0, x \geq 1/2 \\ x \leq 4x^2-4x+1, 4x^2-5x+1 \geq 0, x \leq 1/4 \vee x \geq 1 \end{cases}$$

$$\boxed{x \geq 1}$$

11)

$$\boxed{\sqrt{x+12} > x}$$

$$\begin{cases} x+12 \geq 0, x \geq -12 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x+12 > x^2, x^2-x-12 < 0, (x-4)(x+3) < 0, -3 < x < 4 \end{cases}$$

$$-12 \leq x < 0 \vee 0 \leq x < 4$$

$$\boxed{-12 \leq x < 4}$$

12)

$$\boxed{2\sqrt{x+3} > x}$$

$$\boxed{2\sqrt{x} > x-3}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x-3 < 0, x < 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x-3 \geq 0, x \geq 3 \\ 4x > x^2-6x+9, x^2-10x+9 < 0, (x-1)(x-9) < 0, 1 < x < 9 \end{cases}$$

$$0 \leq x < 3 \vee 3 \leq x < 9$$

$$\boxed{0 \leq x < 9}$$

13)

$$\boxed{\sqrt{2-x} > x}$$

$$\begin{cases} 2-x \geq 0, x \leq 2 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x > x^2, x^2+x-2 < 0, (x+2)(x-1) < 0, -2 < x < 1 \end{cases}$$

$$x < 0 \vee 0 \leq x < 1$$

$$\boxed{x < 1}$$

15)

$$\boxed{\sqrt{x^2 - 2x - 3} > x}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0, (x+1)(x-3) \geq 0, x \leq -1 \vee x \geq 3 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ \cancel{x^2 - 2x - 3} > \cancel{x^2}, 2x + 3 < 0, x < -3/2 \end{cases}$$

$$x \leq -1 \quad \vee \quad \text{sistema impossibile}$$

$$\boxed{x \leq -1}$$

17)

$$\boxed{\sqrt{x} > \frac{x}{3}}$$

$$\boxed{3\sqrt{x} > x}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x > x^2, x^2 - 9x < 0, x(x-9) < 0, 0 < x < 9 \end{cases}$$

$$\text{sist. imp.} \vee 0 < x < 9$$

$$\boxed{0 < x < 9}$$

19)

$$\boxed{\sqrt{x^2 + 4} > x - 5}$$

$$\begin{cases} x^2 + 4 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ x - 5 < 0, x < 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 5 \geq 0, x \geq 5 \\ \cancel{x^2 + 4} > \cancel{x^2} - 10x + 25, 10x > 21, x > 21/10 \end{cases}$$

$$x < 5 \vee x \geq 5$$

$$\boxed{\text{sempre verificata, } \forall x \in \mathbb{R}}$$

20)

$$\boxed{\sqrt{4x^2 + 2x + 1} > x + 1}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + 2x + 1 \geq 0 \text{ sempre verificata, } \forall x \in \mathbb{R} (\Delta < 0) \\ x + 1 < 0, x < -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x + 1 \geq 0, x \geq -1 \\ \cancel{4x^2 + 2x + 1} > \cancel{x^2 + 2x + 1}, 3x^2 > 0, x \neq 0 \end{cases}$$

$$x < -1 \vee x \geq -1 \text{ ma } x \neq 0$$

$$\boxed{x \neq 0}$$

21)

$$\boxed{\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq x - 1}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0, (x-1)(x-3) \geq 0, x \leq 1 \vee x \geq 3 \\ x - 1 < 0, x < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 1 \geq 0, x \geq 1 \\ \cancel{x^2 - 4x + 3} \geq \cancel{x^2} - 2x + 1, -2x \geq -2, x \leq 1 \end{cases}$$

$$x < 1 \quad \vee \quad x = 1$$

$$\boxed{x \leq 1}$$

24)

$$\boxed{\sqrt{x+2} \geq \frac{x-1}{2}}$$

$$\boxed{2\sqrt{x+2} \geq x-1}$$

$$\begin{cases} x+2 \geq 0, x \geq -2 \\ x-1 < 0, x < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 \geq 0, x \geq 1 \\ 4x+8 \geq x^2 - 2x+1, x^2 - 6x - 7 \leq 0, (x+1)(x-7) \leq 0, -1 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

$$-2 \leq x < 1 \quad \vee \quad 1 \leq x \leq 7$$

$$\boxed{-2 \leq x \leq 7}$$

26)

$$\sqrt{7-x} > -5$$

Affinché sia verificata, basta che il radicale esista in \mathbb{R} !

$$7-x \geq 0, \quad x \leq 7$$

27)

$$\sqrt{7-x} > 2$$

In questo caso particolare, sappiamo che la condizione di realtà è sovrabbondante, quindi possiamo evitare di porla!

$$7-x > 4, \quad -x > -3, \quad x < 3$$

31)

$$\sqrt{2x-3} < 5$$

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0, & x \geq 3/2 \\ 2x-3 < 25, & 2x < 28, & x < 14 \end{cases}$$

$$3/2 \leq x < 14$$

34)

$$\sqrt{x^2-4x+3} \leq 1$$

$$\begin{cases} x^2-4x+3 \geq 0, & (x-1)(x-3) \geq 0, & x \leq 1 \vee x \geq 3 \\ x^2-4x+3 \leq 1, & x^2-4x+2 \leq 0, & 2-\sqrt{2} \leq x \leq 2+\sqrt{2} \end{cases}$$

$$2-\sqrt{2} \leq x \leq 1 \vee 3 \leq x \leq 2+\sqrt{2}$$

35)

$$\sqrt{x-5} \leq \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} x-5 \geq 0, & x \geq 5 \\ x-5 \leq 3, & x \leq 8 \end{cases}$$

$$5 \leq x \leq 8$$

36)

$$\sqrt{8-x} < 0$$

impossibile: il risultato di una radice quadrata non può mai essere negativo

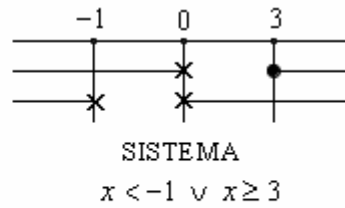
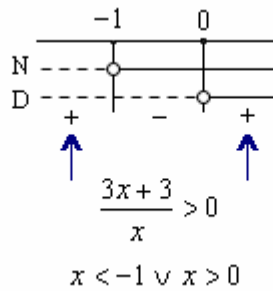
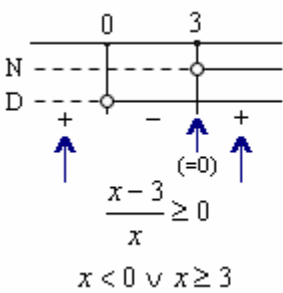
38)

$$\sqrt{\frac{x-3}{x}} < 2$$

$$\begin{cases} \frac{x-3}{x} \geq 0, & x < 0 \vee x \geq 3 \\ \frac{x-3}{x} < 4, & \frac{x-3}{x} - 4 < 0, & \frac{x-3-4x}{x} < 0, & \frac{-3x-3}{x} < 0, & \frac{3x+3}{x} > 0, & x < -1 \vee x > 0 \end{cases}$$

*volendo,
semplificabile
per 3*

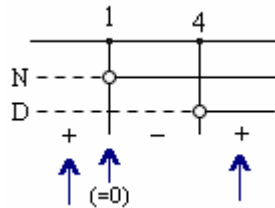
$$x < -1 \vee x \geq 3$$



40)

$$\sqrt{\frac{x-1}{x-4}} > -3$$

$$\frac{x-1}{x-4} \geq 0, \quad x \leq 1 \vee x > 4$$



41)

$$\sqrt{\frac{1+x^2}{2-x-x^2}} > -\frac{1}{4}$$

$$\frac{1+x^2}{2-x-x^2} \geq 0; \quad \frac{1+x^2}{x^2+x-2} \leq 0$$

$$\frac{1+x^2}{(x+2)(x-1)} \leq 0$$

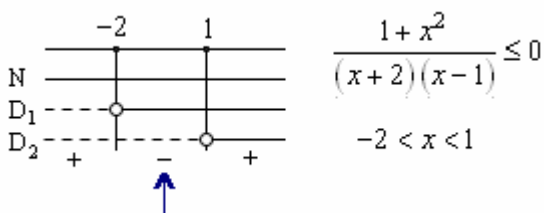
*Il Numeratore è sempre strettamente positivo,
la frazione quindi non si può annullare
ed è negativa quando lo è il Denominatore :*

ma la disequazione $(x+2)(x-1) < 0$

*(di 2° grado, con -2 e 1 per soluzioni dell'equazione associata)
è verificata quando*

$$-2 < x < 1.$$

La conclusione è confermata dallo schema sottostante :



42)

$$\sqrt{3x-1} < \sqrt{x+7}$$

$$\begin{cases} 3x-1 \geq 0, & x \geq 1/3 \\ x+7 \geq 0, & x \geq -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-1 < x+7, & 2x < 8, & x < 4 \end{cases}$$

$$\boxed{1/3 \leq x < 4}$$

46)

$$\sqrt{4-2x} \leq \sqrt{3-x}$$

$$\begin{cases} 4-2x \geq 0, & x \leq 2 \\ 3-x \geq 0, & x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4-2x \leq 3-x, & -x \leq -1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\boxed{1 \leq x \leq 2}$$

47)

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} \leq \frac{\sqrt{x+1}}{3}$$

$$3\sqrt{x^2-1} \leq 2\sqrt{x+1}$$

$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0, & x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x+1 \geq 0, & x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2-9 \leq 4x+4, & 9x^2-4x-13 \leq 0, & -1 \leq x \leq 13/9 \end{cases}$$

$$\boxed{x = -1 \vee 1 \leq x \leq 13/9}$$

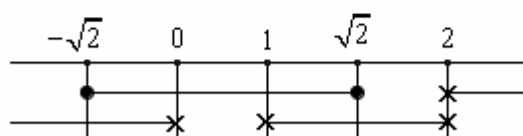
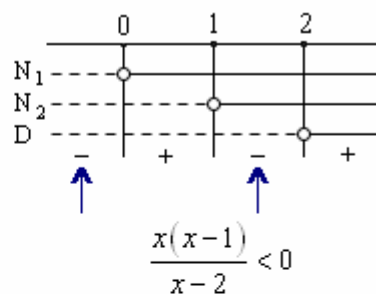
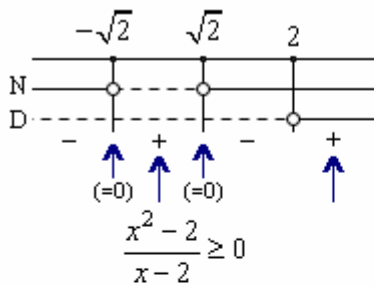
48)

$$\boxed{\sqrt{\frac{x^2-2}{x-2}} < 1}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2-2}{x-2} \geq 0 & -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \vee x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2-2}{x-2} < 1 & \frac{x^2-2}{x-2} - 1 < 0 & \frac{x^2-2-x+2}{x-2} < 0 & \frac{x(x-1)}{x-2} < 0 & x < 0 \vee 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$\boxed{-\sqrt{2} \leq x < 0 \vee 1 < x \leq \sqrt{2}}$$



SISTEMA

$$-\sqrt{2} \leq x < 0 \vee 1 < x \leq \sqrt{2}$$

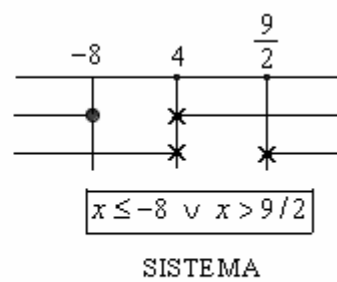
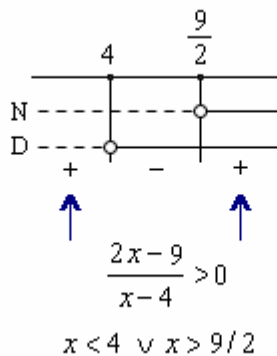
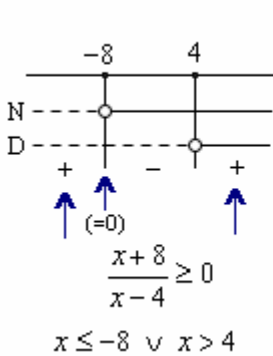
49)

$$\sqrt{\frac{x+8}{x-4}} < 5$$

$$\begin{cases} \frac{x+8}{x-4} \geq 0 & x \leq -8 \vee x > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+8}{x-4} < 25 & \frac{x+8}{x-4} - 25 < 0 & \frac{x+8-25x+100}{x-4} < 0 & \frac{-24x+108}{x-4} < 0 & \frac{2x-9}{x-4} > 0 & x < 4 \vee x > 9/2 \end{cases}$$

$$\boxed{x \leq -8 \vee x > 9/2}$$



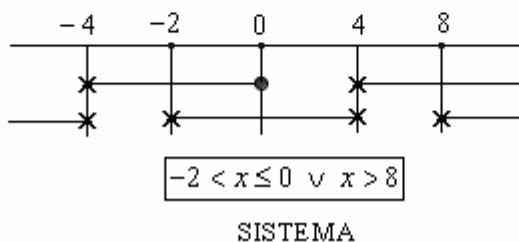
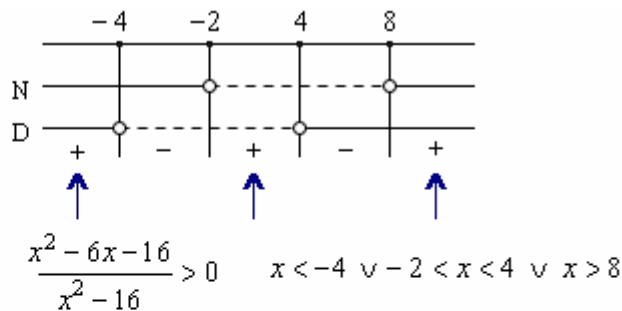
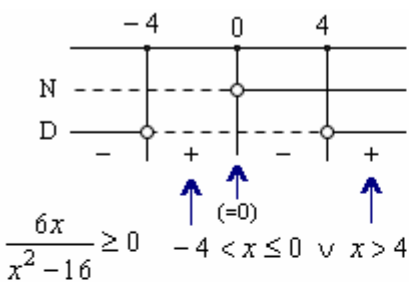
50)

$$\sqrt{\frac{6x}{x^2-16}} < 1$$

$$\begin{cases} \frac{6x}{x^2-16} \geq 0 & -4 < x \leq 0 \vee x > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6x}{x^2-16} < 1, & \frac{6x}{x^2-16} - 1 < 0, & \frac{6x-x^2+16}{x^2-16} < 0, & \frac{x^2-6x-16}{x^2-16} > 0, & x < -4 \vee -2 < x < 4 \vee x > 8 \end{cases}$$

$$\boxed{-2 < x \leq 0 \vee x > 8}$$



51)

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-3} - \sqrt{2x} < 0$$

Poniamo le condizioni di realtà dei radicali:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, & x \geq 1 \\ x-3 \geq 0, & x \geq 3 \\ 2x \geq 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

Trasportiamo un termine a secondo membro in modo che i due membri siano sicuramente positivi:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-3} < \sqrt{2x}$$

A questo punto eleviamo al quadrato:

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-3})^2 < (\sqrt{2x})^2$$

$$\cancel{x-1} + \cancel{x-3} + 2\sqrt{(x-1)(x-3)} < \cancel{2x}$$

$$\cancel{2}\sqrt{x^2 - 4x + 3} < \cancel{4}^2$$

Scrivere la condizione di realtà $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ sarebbe SUPERFLUO,

perché $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

e avevamo già posto prima le condizioni di positività di entrambi i fattori del prodotto

$$(\sqrt{x^2 - 4x + 3})^2 < 2^2$$

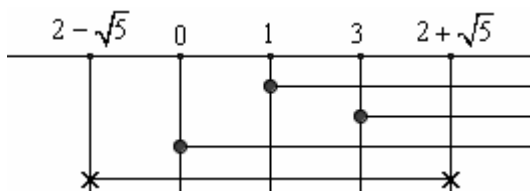
$$x^2 - 4x + 3 < 4$$

$$x^2 - 4x - 1 < 0$$

$$2 - \sqrt{5} < x < 2 + \sqrt{5}$$

In definitiva, tenendo conto delle condizioni poste precedentemente, avremo

$$3 \leq x < 2 + \sqrt{5}$$



52)

$$\boxed{\sqrt{x+3} > 2 - \sqrt{x-1}}$$

Poniamo le condizioni di realtà dei radicali:

$$\boxed{\begin{array}{l} x+3 \geq 0, \quad x \geq -3 \\ x-1 \geq 0, \quad x \geq 1 \end{array}}$$

Trasportiamo un termine a primo membro
in modo che i due membri *siano* sicuramente positivi:

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} > 2$$

A questo punto eleviamo al quadrato:

$$(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1})^2 > 4$$

$$x+3+x-1+2\sqrt{(x+3)(x-1)} > 4$$

$$2\sqrt{(x+3)(x-1)} > 2-2x$$

Semplifichiamo per 2:

$$\sqrt{(x+3)(x-1)} > 1-x$$

$$\begin{cases} (x+3)(x-1) \geq 0 \\ 1-x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ (x+3)(x-1) > (1-x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 1 \\ x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 1 \\ \cancel{x^2} - x + 3x - 3 > 1 - 2x + \cancel{x^2}, \quad 4x > 4, \quad x > 1 \\ x > 1 \end{cases} \vee \text{ sistema impossibile}$$

In definitiva, viste anche
le condizioni poste precedentemente, avremo

$$\boxed{x > 1}$$

53)

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} < \sqrt{x+3} - \sqrt{x+4}$$

Poniamo le condizioni di realtà dei radicali:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, & x \geq -1 \\ x+2 \geq 0, & x \geq -2 \\ x+3 \geq 0, & x \geq -3 \\ x+4 \geq 0, & x \geq -4 \end{cases}$$

che, poste a sistema, danno $x \geq -1$.

Trasportiamo i termini in modo che i due membri siano sicuramente positivi:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} < \sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}$$

A questo punto eleviamo al quadrato:

$$(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4})^2 < (\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2})^2$$

$$\cancel{x+1} + \cancel{x+4} + 2\sqrt{(x+1)(x+4)} < \cancel{x+3} + \cancel{x+2} + 2\sqrt{(x+3)(x+2)}$$

Semplifichiamo per 2:

$$\sqrt{(x+1)(x+4)} < \sqrt{(x+3)(x+2)}$$

Scrivere le condizioni di positività dei radicandi

sarebbe SUPERFLUO,

perché avevamo già posto prima le condizioni di positività di tutti i fattori che li compongono.

Eleviamo al quadrato e otteniamo:

$$(x+1)(x+4) < (x+3)(x+2)$$

$$\cancel{x^2} + 4x + x + 4 < \cancel{x^2} + 2x + 3x + 6$$

cioè una disequazione sempre verificata, $\forall x \in \mathbb{R}$.

In definitiva, per le condizioni poste precedentemente, le soluzioni sono i valori

$$x \geq -1$$

74)

$$\frac{\sqrt{3x+1}-2x}{\sqrt{4x-3}-x} < 0$$

$N > 0$

$$\sqrt{3x+1}-2x > 0$$

$$\sqrt{3x+1} > 2x$$

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 2x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{3x+1 \geq 0} \text{ sovrabbondante} \\ 2x \geq 0 \\ 3x+1 > 4x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1/3 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - 3x - 1 < 0 \quad -1/4 < x < 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{-1/3 \leq x < 0 \vee 0 \leq x < 1}_{-1/3 \leq x < 1}$$

La condizione di esistenza "C. E."

(s'intende: "di realtà, di esistenza in \mathbb{R} , di esistenza in campo reale") è:

$$3x+1 \geq 0, \quad x \geq -1/3.$$

Dunque il Numeratore:

esiste solo quando $x \geq -1/3$ (NON esiste per $x < -1/3$), ed è

positivo per $-1/3 \leq x < 1$

nullo per $x = 1$ (invece, come abbiamo già visto e come si può controllare anche per sostituzione diretta, per $x = -1/3$ è > 0)

negativo per $x > 1$

$D > 0$

$$\sqrt{4x-3}-x > 0$$

$$\sqrt{4x-3} > x$$

$$\begin{cases} 4x-3 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{4x-3 \geq 0} \text{ sovrabbondante} \\ x \geq 0 \\ 4x-3 > x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3/4 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \quad 1 < x < 3 \end{cases}$$

sist. imposs. $1 < x < 3$

La condizione di esistenza (C. E.) è: $x \geq 3/4$

Dunque il Denominatore:

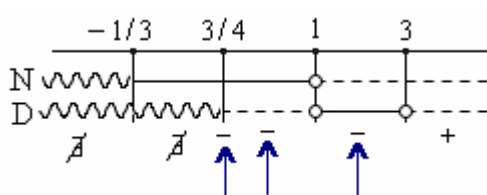
esiste solo quando $x \geq 3/4$ (NON esiste per $x < 3/4$), ed è

positivo per $1 < x < 3$

nullo per $x = 1, x = 3$ (controllalo sostituendo!)

negativo per $3/4 \leq x < 1 \vee x > 3$

Lo schema sottostante riassume lo studio di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore, sopra effettuato.



SIMBOLOGIA:

- ANNULLAMENTO
- POSITIVITA'
- NEGATIVITA'
- W W W NON ESISTENZA

Osserviamo che per $x=3/4$ il Numeratore è > 0 e il Denominatore è < 0 , quindi la frazione è < 0 e la disequazione è verificata.

La disequazione è verificata per $\boxed{3/4 \leq x < 3 \text{ ma } x \neq 1}$.

75)

$$\frac{\sqrt{4x+5}-x}{2\sqrt{x-x+3}} \geq 0$$

$N > 0$

$$\sqrt{4x+5}-x > 0$$

$$\sqrt{4x+5} > x$$

$$\begin{cases} 4x+5 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{4x+5 \geq 0} \text{ sovrabbondante} \\ x \geq 0 \\ 4x+5 > x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5/4 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x - 5 < 0 \quad -1 < x < 5 \end{cases}$$

$$\underbrace{-5/4 \leq x < 0 \quad \vee \quad 0 \leq x < 5}_{-5/4 \leq x < 5}$$

La condizione di esistenza "C. E."

(s'intende: "di realtà, di esistenza in \mathbb{R} , di esistenza in campo reale") è:

$$4x+5 \geq 0, \quad x \geq -5/4$$

Dunque il Numeratore:

- esiste solo quando $x \geq -5/4$ (NON esiste per $x < -5/4$) ed è
- positivo per $-5/4 \leq x < 5$
- nullo per $x = 5$ (invece, come abbiamo già visto e come si può controllare anche per sostituzione diretta, per $x = -5/4$ è > 0)
- negativo per $x > 5$

$D > 0$

$$2\sqrt{x-x+3} > 0$$

$$2\sqrt{x} > x-3$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{x \geq 0} \text{ sovrabbondante} \\ x-3 \geq 0 \\ 4x > x^2 - 6x + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 10x + 9 < 0 \quad 1 < x < 9 \end{cases}$$

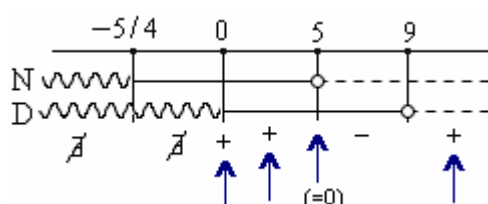
$$\underbrace{0 \leq x < 3 \quad \vee \quad 3 \leq x < 9}_{0 \leq x < 9}$$

La condizione di esistenza è: $x \geq 0$

Dunque il Denominatore:

- esiste solo quando $x \geq 0$ (NON esiste per $x < 0$) ed è
- positivo per $0 \leq x < 9$
- nullo per $x = 9$ (controllalo per sostituzione diretta! Invece, come abbiamo già visto e come, d'altronde, per sostituzione diretta puoi ricontrollare, per $x = 0$ è > 0)
- negativo per $x > 9$

Lo schema sottostante riassume lo studio fatto di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore:



SIMBOLOGIA:

- \circ ANNULLAMENTO
- POSITIVITA'
- NEGATIVITA'
- ~~~~ NON ESISTENZA

Osserviamo che per $x=0$ Numeratore e Denominatore sono entrambi > 0 , quindi la frazione è > 0 e la disequazione è verificata.

La disequazione è verificata per $\boxed{0 \leq x \leq 5 \vee x > 9}$.

76)

$$\frac{\sqrt{x-2}-x}{\sqrt{x+2}-x} > 0$$

$$N > 0$$

$$\sqrt{x-2}-x > 0$$

$$\sqrt{x-2} > x$$

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{x-2 \geq 0} \text{ sovrabbondante} \\ x \geq 0 \\ x-2 > x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x + 2 < 0 \text{ imposs. } (\Delta < 0) \end{cases}$$

I due sistemi sono entrambi impossibili:
il Numeratore non può mai essere > 0

La condizione di esistenza è $x \geq 2$.

Dunque il Numeratore:

- esiste solo quando $x \geq 2$ (NON esiste per $x < 2$)
- e laddove esiste, quindi per $x \geq 2$, è negativo (controlla tu stesso, sostituendo direttamente, la negatività anche per $x = 2$)

$$D > 0$$

$$\sqrt{x+2}-x > 0$$

$$\sqrt{x+2} > x$$

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{x+2 \geq 0} \text{ sovrabbondante} \\ x \geq 0 \\ x+2 > x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \quad -1 < x < 2 \end{cases}$$

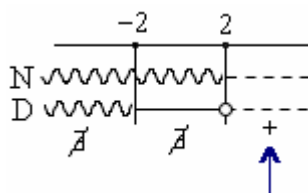
$$\underbrace{-2 \leq x < 0 \quad \vee \quad 0 \leq x < 2}_{-2 \leq x < 2}$$

La condizione di esistenza è: $x \geq -2$

Dunque il Denominatore:

- esiste solo quando $x \geq -2$ (NON esiste per $x < -2$) ed è
- positivo per $-2 \leq x < 2$
- nullo per $x = 2$ (invece, come puoi anche ricontrollare per sostituzione, con $x = -2$ è > 0)
- negativo per $x > 2$

Lo schema sottostante riassume lo studio di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore, sopra effettuato.



SIMBOLOGIA:

- \circ ANNULLAMENTO
- POSITIVITA'
- NEGATIVITA'
- ~~~~ NON ESISTENZA

La disequazione è verificata per $x > 2$.

77)

$$\frac{\sqrt{x^2 - 4 - x + 3}}{\sqrt{x^2 + 4 - x - 5}} < 0$$

$$N > 0$$

$$\sqrt{x^2 - 4 - x + 3} > 0$$

$$\sqrt{x^2 - 4} > x - 3$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{x^2 - 4} \geq 0 \text{ sovrabbondante} \\ x - 3 \geq 0 \\ \cancel{x^2 - 4} > \cancel{x^2} - 6x + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x < 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 3 \\ 6x > 13 \quad x > 13/6 \end{cases}$$

$$\underbrace{x \leq -2 \vee 2 \leq x < 3 \quad \vee \quad x \geq 3}_{x \leq -2 \vee x \geq 2}$$

La condizione di esistenza è: $x \leq -2 \vee x \geq 2$

Dunque il Numeratore:

- esiste solo quando $x \leq -2 \vee x \geq 2$ (NON esiste per $-2 < x < 2$)
- e, laddove esiste, è sempre > 0

$$D > 0$$

$$\sqrt{x^2 + 4 - x - 5} > 0$$

$$\sqrt{x^2 + 4} > x + 5$$

$$\begin{cases} x^2 + 4 \geq 0 \text{ sempre verificata} \\ x + 5 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{x^2 + 4} \geq 0 \text{ sovrabbondante} \\ x + 5 \geq 0 \\ \cancel{x^2 + 4} > \cancel{x^2} + 10x + 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{sempre verif.} \\ x < -5 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -5 \\ -10x > 21; \quad x < -21/10 \end{cases}$$

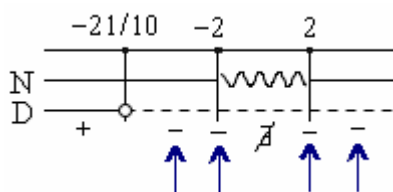
$$\underbrace{x < -5 \quad \vee \quad -5 \leq x < -21/10}_{x < -21/10}$$

La condizione di esistenza è sempre verificata.

Dunque il Denominatore:

- esiste per qualsiasi valore di x
- è positivo per $x < -21/10$
- è nullo per $x = -21/10$
- è negativo per $x > -21/10$

Lo schema sottostante riassume lo studio di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore, sopra effettuato.



SIMBOLOGIA:

- ANNULLAMENTO
- POSITIVITA'
- NEGATIVITA'
- ~~~~~ NON ESISTENZA

Osserviamo che per $x = -2$ e per $x = 2$ il Numeratore è > 0 e il Denominatore è < 0 , quindi la frazione è < 0 e la disequazione è verificata.

La disequazione è verificata per $\boxed{-\frac{21}{10} < x \leq -2 \vee x \geq 2}$.

78)

$$\frac{\sqrt{x^2+x-6}-x}{\sqrt{x+2}-3} > 0$$

$$N > 0$$

$$\sqrt{x^2+x-6}-x > 0$$

$$\sqrt{x^2+x-6} > x$$

$$\begin{cases} x^2+x-6 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{x^2+x-6} \geq 0 \text{ sovrabbondante} \\ x \geq 0 \\ \cancel{x^2+x-6} > \cancel{x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 2 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 6 \end{cases}$$

$$x \leq -3 \quad \vee \quad x > 6$$

La condizione di esistenza C.E. è: $x \leq -3 \vee x \geq 2$

Dunque il Numeratore:

- esiste solo quando $x \leq -3 \vee x \geq 2$ (NON esiste per $-3 < x < 2$)
- è > 0 per $x \leq -3 \vee x > 6$
- è $= 0$ per $x = 6$
- è < 0 per $2 \leq x < 6$

$$D > 0$$

$$\sqrt{x+2}-3 > 0$$

$$\sqrt{x+2} > 3$$

Sappiamo che questo è un caso particolare nel quale non occorre porre alcuna condizione!

Tuttavia, nello schema finale, sarà indispensabile tener conto della "C.E.", condizione di esistenza ovvero di realtà ($x \geq -2$)

$$x+2 > 9$$

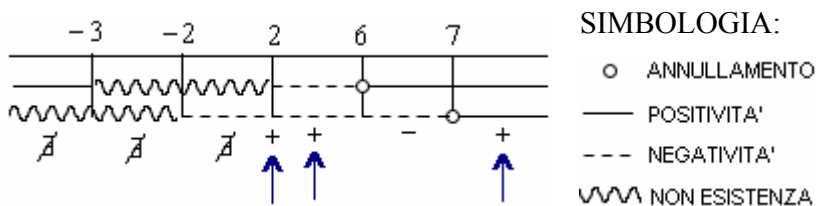
$$x > 7$$

La condizione di esistenza è $x \geq -2$,

e dunque il Denominatore:

- esiste per $x \geq -2$ (non esiste per $x < -2$)
- è > 0 per $x > 7$
- è $= 0$ per $x = 7$
- è < 0 per $-2 \leq x < 7$

Lo schema sottostante riassume lo studio di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore, sopra effettuato.



Osserviamo che per $x = 2$ Numeratore e Denominatore sono entrambi < 0 , quindi la frazione è > 0 e la disequazione è verificata

La disequazione è verificata per $\boxed{2 \leq x < 6 \vee x > 7}$.

79)

$$\frac{x - \sqrt{x+12}}{\sqrt{x+12} - 5} \leq 0$$

$N > 0$

$$x - \sqrt{x+12} > 0$$

$$x > \sqrt{x+12}$$

$$\sqrt{x+12} < x$$

$$\begin{cases} x+12 \geq 0; & x \geq -12 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$x > 0$$

$$\begin{cases} x+12 < x^2; & x^2 - x - 12 > 0; & (x+3)(x-4) > 0; & x < -3 \vee x > 4 \end{cases}$$

Soluzioni del sistema : $x > 4$

La condizione di esistenza è : $x \geq -12$

Dunque il Numeratore:

- esiste solo quando $x \geq -12$ (NON esiste per $x < -12$)
- è > 0 per $x > 4$
- è $= 0$ per $x = 4$
- è < 0 per $-12 \leq x < 4$

$D > 0$

$$\sqrt{x+12} - 5 > 0$$

$$\sqrt{x+12} > 5$$

Sappiamo che questo è un caso particolare nel quale non occorre porre alcuna condizione!

Tuttavia, nello schema finale,

sarà indispensabile tener conto della condizione di realtà $x \geq -12$

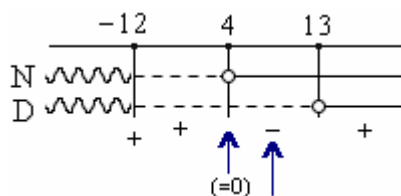
$$x+12 > 25$$

$$x > 13$$

Dunque il Denominatore:

- esiste per $x \geq -12$ (non esiste per $x < -12$)
- è > 0 per $x > 13$
- è $= 0$ per $x = 13$
- è < 0 per $-12 \leq x < 13$

Lo schema sottostante riassume lo studio di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore, sopra effettuato.



SIMBOLOGIA:

- ANNULLAMENTO
- POSITIVITA'
- - - NEGATIVITA'
- W W W NON ESISTENZA

La disequazione è verificata per $\boxed{4 \leq x < 13}$.

80)

$$\frac{2 - \sqrt{3-x}}{x^2 + x - 6} \geq 0$$

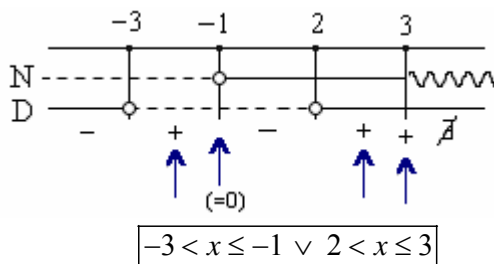
$$N > 0 \quad 2 - \sqrt{3-x} > 0 \quad -\sqrt{3-x} > -2$$

$\sqrt{3-x} < 2$ che sappiamo essere equivalente alla condizione ottenibile mediante elevamento al quadrato, posta a sistema con la condizione di esistenza.

$$\begin{cases} 3-x \geq 0; & x \leq 3 \text{ C.E. condizione di esistenza} \\ 3-x < 4; & -x < 1; \quad x > -1 \end{cases}$$

Dunque il numeratore: è > 0 per $-1 < x \leq 3$, ed esiste solo quando $x \leq 3$ (NON esiste per $x > 3$)

$$D > 0 \quad x^2 + x - 6 > 0, \quad (x+3)(x-2) > 0, \quad x < -3 \vee x > 2$$



SIMBOLOGIA:

- ANNULLAMENTO
- POSITIVITA'
- NEGATIVITA'
- ~~~~ NON ESISTENZA

Osserviamo che per $x=3$ Numeratore e Denominatore sono entrambi > 0 , quindi la frazione è > 0 e la disequazione è verificata

81)

$$\frac{\sqrt{x-4}-3}{\sqrt{x-2}-1} < 0$$

$$N > 0 \quad \sqrt{x-4}-3 > 0$$

$$\sqrt{x-4} > 3$$

Sappiamo che in questo caso particolare la condizione di realtà del radicale è, in relazione a questa disequazione $N > 0$, superflua; tuttavia, dovremo tenerne poi conto per compilare lo schema finale relativo alla disequazione $N/D < 0$.

Dunque,

la condizione di realtà di N ("condizione di esistenza", C.E.) è: $x-4 \geq 0, \quad x \geq 4$

$$N > 0 \quad x-4 > 9, \quad x > 13$$

$$D > 0 \quad \sqrt{x-2}-1 > 0$$

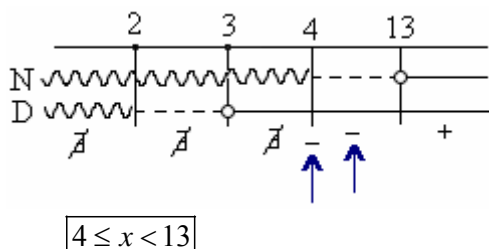
$$\sqrt{x-2} > 1$$

Sappiamo che in questo caso particolare la condizione di realtà del radicale è, in relazione a questa disequazione $D > 0$, superflua; tuttavia, dovremo tenerne poi conto per compilare lo schema finale relativo alla disequazione $N/D < 0$.

Dunque,

la condizione di realtà di D ("condizione di esistenza", C.E.) è: $x-2 \geq 0, \quad x \geq 2$

$$D > 0 \quad x-2 > 1, \quad x > 3$$



SIMBOLOGIA:

- ANNULLAMENTO
- POSITIVITA'
- NEGATIVITA'
- ~~~~ NON ESISTENZA

Osserviamo che per $x = 4$ il Numeratore è < 0 e il Denominatore è > 0 , quindi la frazione è < 0 e la disequazione è verificata.

82)

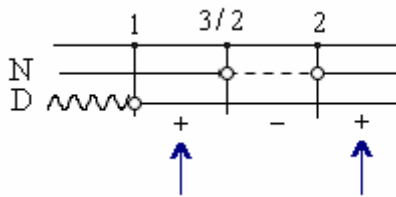
$$\boxed{\frac{2x^2 - 7x + 6}{\sqrt{x-1}} > 0}$$

$$N > 0 \quad 2x^2 - 7x + 6 > 0 \quad \text{Soluzioni dell'equazione associata: } x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{7 \pm 1}{4} = \left\langle \frac{3}{2} \right\rangle 2$$

$$x < 3/2 \vee x > 2$$

$$D > 0 \quad \sqrt{x-1} > 0 \quad x > 1.$$

Il denominatore, essendo una radice quadrata, non può essere negativo;
 esiste solo per $x \geq 1$,
 per $x = 1$ si annulla,
 per $x > 1$ è > 0 .



SIMBOLOGIA:

- ANNULLAMENTO
- POSITIVITA'
- - - NEGATIVITA'
- ~~~~ NON ESISTENZA

$$\boxed{1 < x < \frac{3}{2} \vee x > 2}$$

RISOLUZIONE PIU' VELOCE

Avremmo potuto risolvere anche **molto più rapidamente**.

Il denominatore, essendo una radice quadrata, laddove esiste in campo reale, è positivo, e non influisce, dunque, sul segno della frazione:

può essere pertanto eliminato,

se si tiene conto che le soluzioni della disequazione data dovranno comunque essere > 1

(la condizione $x > 1$ mette assieme la condizione di realtà del radicale

e la condizione di non annullamento del denominatore).

Scriviamo dunque la condizione $x \geq 1$, mandiamo via il denominatore

$$\frac{2x^2 - 7x + 6}{\cancel{\sqrt{x-1}}} > 0$$

e risolviamo:

troveremo $x < 3/2 \vee x > 2$,

ma tenendo conto a questo punto della condizione posta,

concluderemo che le soluzioni della disequazione data sono i valori

$$\boxed{1 < x < \frac{3}{2} \vee x > 2}.$$

83)

$$\frac{\sqrt{x-2}}{x-4} \leq 0$$

A volte capita di incontrare disequazioni irrazionali molto semplici che si possono risolvere rapidissimamente, col solo ragionamento, senza schemi.

Vediamo ad esempio quella proposta.

Il radicale a numeratore, laddove esiste in campo reale, è positivo (non-negativo); ma esso esiste per $x \geq 2$ si annulla per $x=2$.

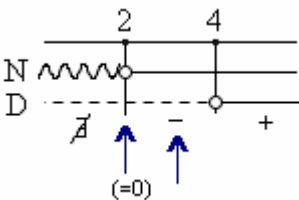
Pertanto la disequazione, che porta il verso \leq , sarà verificata da quei valori di x che rendono

- ♪ il denominatore < 0 ,
- ♪ oppure il numeratore $= 0$,
- ♪ compatibilmente sempre però con la realtà del radicale.

Di conseguenza siamo subito in grado, anche senza schemi particolari, di affermare che le soluzioni sono

$$2 \leq x < 4$$

Tuttavia, se si preferisce, o anche per confermare il ragionamento precedente, ecco lo schema che riassume esistenza e segno di Numeratore e Denominatore:



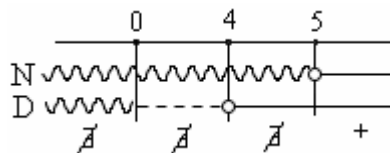
84)

$$\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-2}} < 0$$

Lo schema che riassume lo studio di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore, è riportato qui a fianco.

La disequazione è

IMPOSSIBILE.



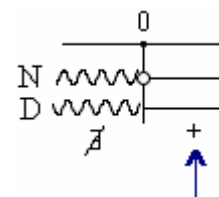
85)

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} > 0$$

Lo schema che riassume lo studio di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore, è riportato qui a fianco.

La disequazione è verificata per

$$x > 0$$



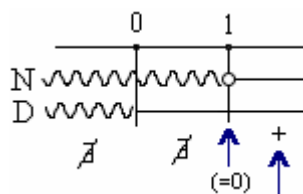
86)

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \geq 0$$

Lo schema che riassume lo studio di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore, è riportato qui a fianco.

La disequazione è verificata per

$$x \geq 1$$



87)

$$\frac{\sqrt{1-8x}}{\sqrt{1+2x-8x^2}-4x} > 0$$

Il numeratore, essendo una radice quadrata, non può essere negativo; mandiamolo via dunque,

scrivendo però la sua condizione

di esistenza+non annullamento $x < 1/8$.

Infatti, i valori di x che rendono il numeratore non esistente o nullo non possono essere soluzione della disequazione data,

mentre fra gli altri valori (quelli, appunto, $< 1/8$)

saranno soluzioni quelli che rendono il *denominatore* > 0 .

Dunque :

$$\sqrt{1+2x-8x^2}-4x > 0$$

$$\sqrt{1+2x-8x^2} > 4x$$

$$\begin{cases} 1+2x-8x^2 \geq 0 \\ 4x < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \cancel{1+2x-8x^2} \geq 0 \text{ sovrabbondante} \\ 4x \geq 0 \\ 1+2x-8x^2 > 16x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2-2x-1 \leq 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 24x^2-2x-1 < 0 \end{cases} \quad -\frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} \leq x < 0 \quad \vee \quad 0 \leq x < \frac{1}{4}$$

La disequazione $D > 0$ ha perciò le soluzioni $-\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{4}$,

e fra questi valori, quelli che sono simultaneamente $< \frac{1}{8}$ sono:

$$\boxed{-\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{8}}$$

88)

$$\frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x^2 - 12}}{121 - x^2} \geq 0$$

 $N > 0$

$$2\sqrt{x} - \sqrt{x^2 - 12} > 0$$

$$2\sqrt{x} > \sqrt{x^2 - 12}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 12 \geq 0; \quad x \leq -2\sqrt{3} \vee x \geq 2\sqrt{3} \\ 4x > x^2 - 12; \quad x^2 - 4x - 12 < 0; \quad (x+2)(x-6) < 0; \quad -2 < x < 6 \end{cases}$$

Il sistema è verificato per

$$2\sqrt{3} \leq x < 6,$$

e queste sono dunque anche le soluzioni della disequazione $N > 0$.

Bisognerà, per lo schema finale, tenere conto anche della condizione di esistenza (C. E.) del numeratore N :

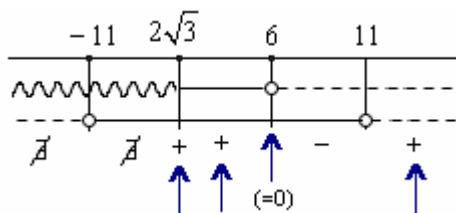
questa è data dal sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 12 \geq 0; \quad x \leq -2\sqrt{3} \vee x \geq 2\sqrt{3} \end{cases}$$

ossia è: $x \geq 2\sqrt{3}$

 $D > 0$

$$121 - x^2 > 0; \quad x^2 - 121 < 0; \quad -11 < x < 11$$



Soluzioni: $2\sqrt{3} \leq x < 6 \vee x > 11$

89)

$$\sqrt{\frac{x-7}{x+5}} > -3$$

Il risultato di un'estrazione di radice quadrata, *qualora esista in campo reale*, è ≥ 0 e pertanto *senz'altro* maggiore di un numero negativo.

Quindi, affinché questa disequazione sia verificata, occorre e basta che il radicale sia estraibile con risultato in \mathbb{R} , ossia *occorre e basta che il radicando sia non-negativo*.

La disequazione data è perciò equivalente alla disequazione

$$\frac{x-7}{x+5} \geq 0$$

risolubile con uno schemino oppure col metodo rapido, e avente per soluzioni i valori

$$x < -5 \vee x \geq 7$$

90)

$$\sqrt{\frac{x-7}{x+5}} > 3$$

Sappiamo che in questo caso

$$\sqrt{A(x)} > p, \quad p \in \mathbb{R}, \quad p > 0$$

porre la condizione di realtà del radicale è superfluo.

Perciò possiamo elevare al quadrato senza alcun'altra condizione e ottenere

$$\frac{x-7}{x+5} > 9; \quad \frac{x-7}{x+5} - 9 > 0; \quad \frac{x-7-9x-45}{x+5} > 0; \quad \frac{-8x-52}{x+5} > 0$$

$\frac{8x+52}{x+5} < 0$ (*cambiando i segni al numeratore, cambia il segno della frazione quindi dobbiamo cambiare anche il verso della disequazione*)

$$\frac{2x+13}{x+5} < 0 \quad (\text{abbiamo semplificato per 4})$$

$$-\frac{13}{2} < x < -5$$

91)

$$\sqrt{\frac{x-7}{x+5}} < 3$$

La disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \frac{x-7}{x+5} \geq 0 \\ \frac{x-7}{x+5} < 9 \end{cases}$$

La prima disequazione del sistema è verificata per $x < -5 \vee x \geq 7$,

la seconda per $x < -\frac{13}{2} \vee x > -5$;

il sistema (come anche, dunque, la disequazione di partenza) è perciò verificato per

$$x < -\frac{13}{2} \vee x \geq 7$$

94)

$$\sqrt[3]{13x-12x^2} > 2x-1$$

Possiamo elevare al cubo
senza porre alcuna condizione,
perché indice del radicale
ed esponente al quale eleviamo sono DISPARI.

$$13x - 12x^2 > 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

$$8x^3 - 7x - 1 < 0$$

Scomposizione col metodo di Ruffini:

$$P(x) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 8 & 0 & -7 & -1 \\ 1 & & 8 & 8 & 1 \\ \hline & 8 & 8 & 1 & 0 \end{array}$$

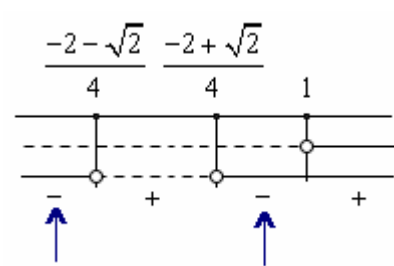
$$(x-1)(8x^2+8x+1) < 0$$

Studio del segno dei fattori in gioco:

$$x-1 > 0 \quad x > 1$$

$$8x^2+8x+1 > 0 \quad \text{Soluzioni dell'eq. associata: } x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{8} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{4}$$

$$x < \frac{-2-\sqrt{2}}{4} \vee x > \frac{-2+\sqrt{2}}{4}$$



$$x < \frac{-2-\sqrt{2}}{4} \vee \frac{-2+\sqrt{2}}{4} < x < 1$$