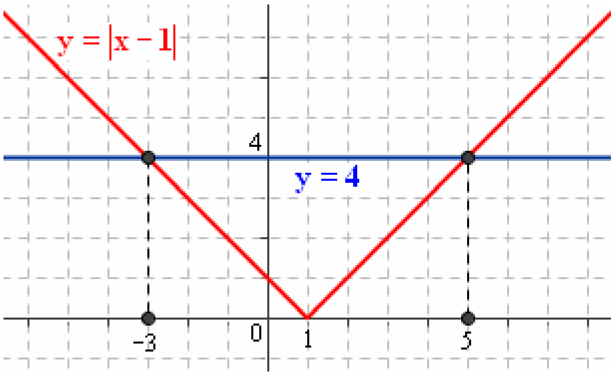
EQUAZIONI COL VALORE ASSOLUTO: CORREZIONI

1)

$|x-1|=4$

$x-1=\pm 4 \left\langle \begin{array}{ll} x-1=-4; & \boxed{x=-3} \\ x-1=4; & \boxed{x=5} \end{array} \right.$

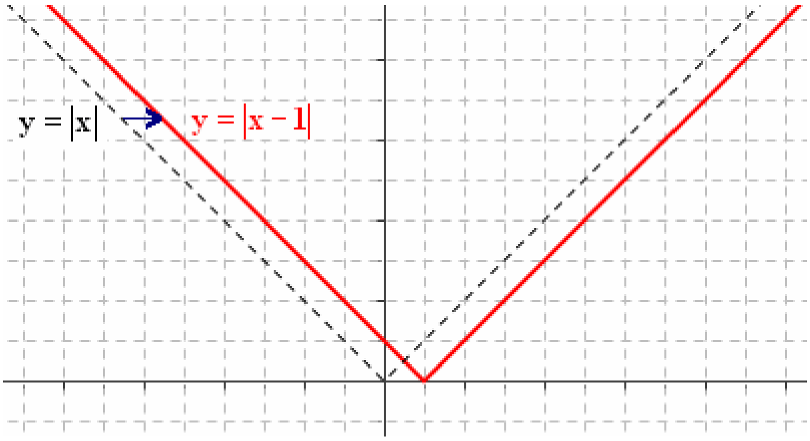
Risoluzione grafica:



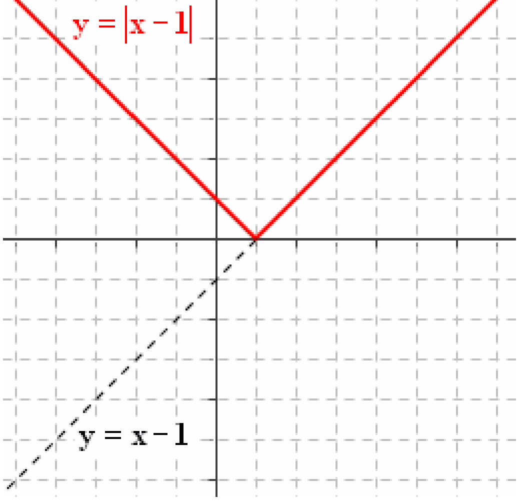
Il grafico della funzione $y=|x-1|$ si può tracciare

a) **normalmente, "per punti"**, assegnando dei valori a x e poi calcolando i corrispondenti valori di *y*;

b) o **pensando di ricavarlo dal grafico ben noto della funzione $y=|x|$**
per sostituzione di x con $x-1$
quindi **traslando il grafico ORIZZONTALMENTE di 1 unità verso DESTRA**
(effetto "*bastian contrario*"; da x a $x-1$, spostamento a *destra*):



c) oppure ancora, **pensando di ricavarlo dal grafico della funzione $y=x-1$**
tramite la manipolazione "passaggio al valore assoluto", che comporta di cancellare
la parte con ordinate negative per sostituirla con la sua simmetrica rispetto all'asse delle ascisse:



Nella figura, la funzione
$y=x-1$
è la retta inclinata di 45° in salita.
La parte della retta
con ordinate negative,
quella tratteggiata in figura,
è stata sostituita dalla sua simmetrica
rispetto all'asse delle ascisse.
Ed ecco, in tratto continuo,
il grafico della funzione
$y=|x-1|$.

2)

$|3-2x|=1$

$$3-2x=\pm 1 \left\langle \begin{array}{l} 3-2x=-1;\ \ -2x=-4;\ \ \boxed{x=2} \\ 3-2x=1;\ \ -2x=-2;\ \ \boxed{x=1} \end{array} \right.$$

OSSERVAZIONE

Se ti sta "antipatica" l'espressione $3-2x$,
qui puoi benissimo cambiarla in $2x-3$:
infatti è $|3-2x|=|2x-3|$, *perché due numeri opposti hanno ugual valore assoluto.*
Controlliamo pure: si ottengono, naturalmente, le stesse soluzioni!

$|2x-3|=1$

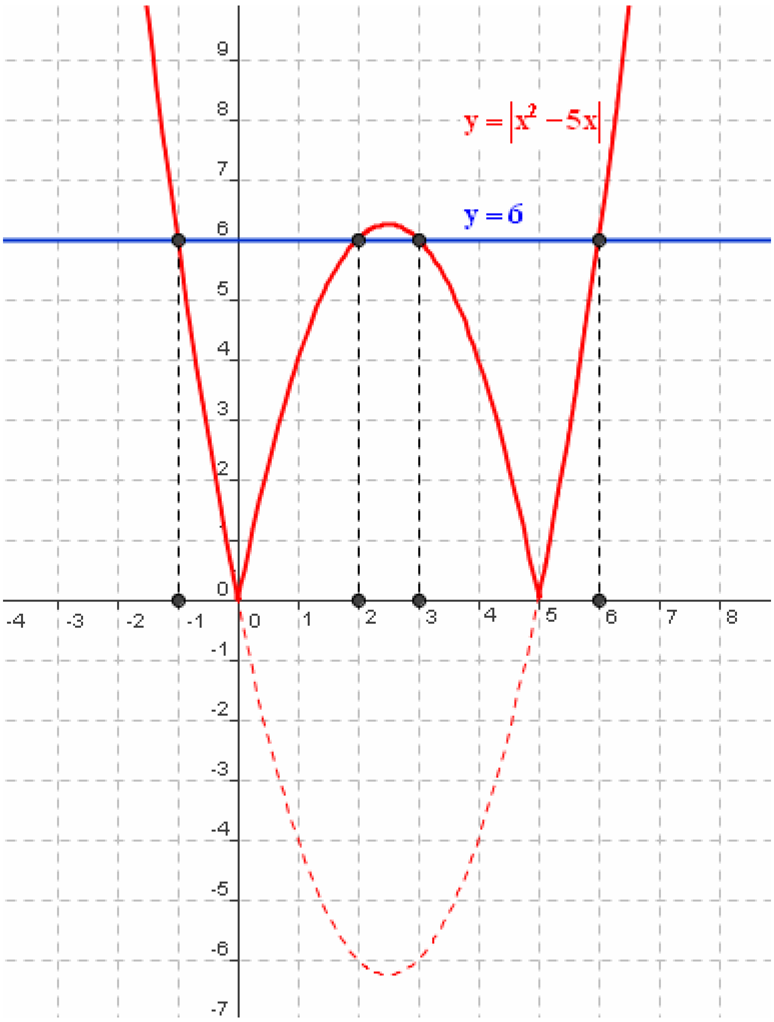
$$2x-3=\pm 1 \left\langle \begin{array}{l} 2x-3=-1;\ \ 2x=2;\ \ \boxed{x=1} \\ 2x-3=1;\ \ 2x=4;\ \ \boxed{x=2} \end{array} \right.$$

3)

$|x^2-5x|=6$

$$x^2-5x=\pm 6 \left\langle \begin{array}{l} x^2-5x=-6;\ \ x^2-5x+6=0;\ \ (x-2)(x-3)=0\ \ \ \boxed{x=2} \vee \boxed{x=3} \\ x^2-5x=6;\ \ x^2-5x-6=0;\ \ (x+1)(x-6)=0\ \ \ \boxed{x=-1} \vee \boxed{x=6} \end{array} \right.$$

Risoluzione grafica:



Il grafico della funzione
$y=|x^2-5x|$
è stato ricavato a partire dal grafico della parabola
$y=x^2-5x$
cancellando la parte con ordinate negative (quella che nella figura appare tratteggiata) per sostituirla con la sua simmetrica rispetto all'asse delle ascisse.

4)

$\left|x^2-4\right|=5$

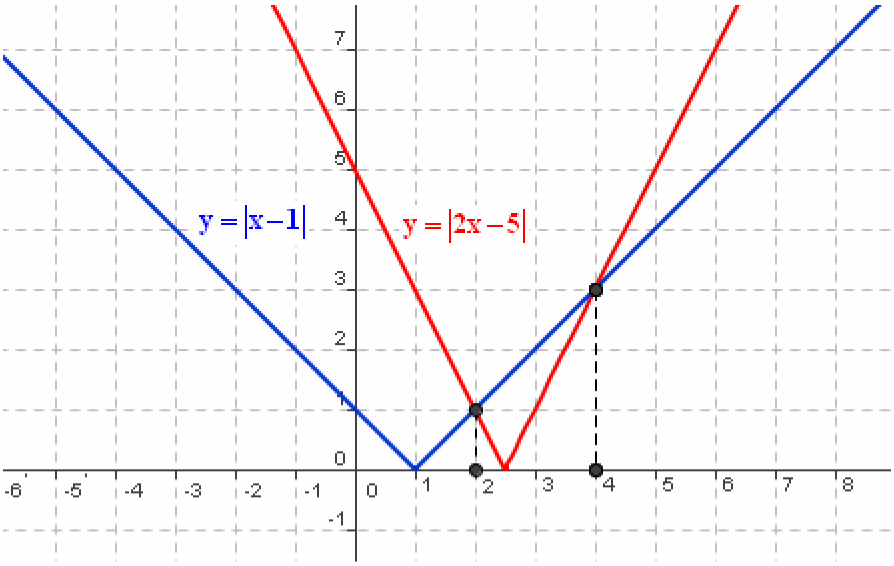
$$x^2-4=\pm 5 \left\langle \begin{array}{l} x^2-4=-5;\quad x^2=-1 \ \textit{impossibile} \\ x^2-4=5;\quad x^2=9;\quad \boxed{x=\pm 3} \end{array} \right.$$

10)

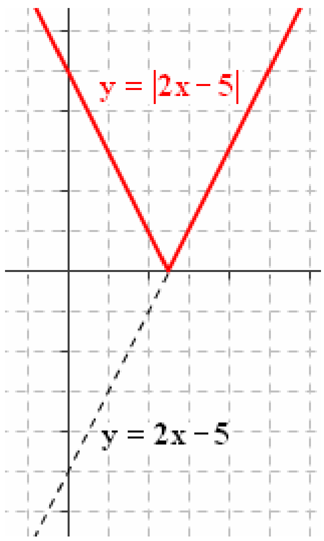
$\left|2x-5\right|=\left|x-1\right|$

$$2x-5=\pm(x-1)\left\langle \begin{array}{l} 2x-5=x-1;\quad \boxed{x=4} \\ 2x-5=-x+1;\quad 3x=6;\quad \boxed{x=2} \end{array} \right.$$

Risoluzione grafica:



Il grafico della funzione $y=\left|2x-5\right|$ *si può tracciare*
disegnando il grafico della retta $y=2x-5$,
poi sottoponendolo alla manipolazione "passaggio al valore assoluto"
ossia cancellandone la parte con ordinate negative
per sostituirla con la sua simmetrica rispetto all'asse delle ascisse:



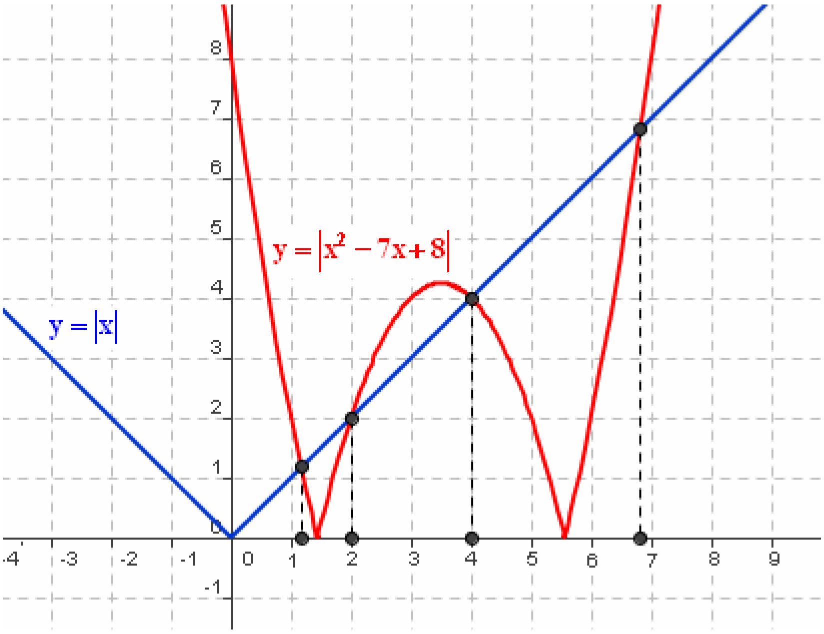
11)

$$\left|x^2-7x+8\right|=|x|$$

$$x^2-7x+8=\pm x\left\langle\begin{array}{l} x^2-7x+8=x;\;\; x^2-8x+8=0;\;\; x_{1,2}=4\pm\sqrt{16-8}=4\pm\sqrt{8}=\boxed{4\pm2\sqrt{2}} \\ x^2-7x+8=-x;\;\; x^2-6x+8=0;\;\; (x-2)(x-4)=0;\;\; \boxed{x=2}\vee\boxed{x=4} \end{array}\right.$$

NOTA: $\sqrt{2}$ vale circa 1.4, quindi $4-2\sqrt{2}\simeq4-2.8=1.2$ e $4+2\sqrt{2}\simeq4+2.8=6.8$

Risoluzione grafica:



12)

$$\left|x^2-3x\right|-|x-3|=0$$

$$\left|x^2-3x\right|=|x-3|$$

$$x^2-3x=\pm(x-3)\left\langle\begin{array}{l} x^2-3x=x-3;\;\; x^2-4x+3=0;\;\; (x-1)(x-3)=0;\;\; \boxed{x=1}\vee\boxed{x=3} \\ x^2-3x=-x+3;\;\; x^2-2x-3=0;\;\; (x+1)(x-3)=0;\;\; \boxed{x=-1}\vee\boxed{x=3} \end{array}\right.$$

Le soluzioni di questa equazione sono dunque: $x_1=-1,\;\; x_2=1,\;\; x_3=3.$

14)

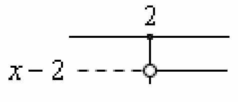
$|x-2| = 2x-7$

$2x-7 \geq 0; \quad x \geq 7/2$

$$x-2 = \pm(2x-7) \left\langle \begin{array}{l} x-2 = 2x-7; \quad -x=-5; \quad \boxed{x=5} \\ x-2=-2x+7; \quad 3x=9; \quad \cancel{x=3} \ \textit{non acc.} \ (\textit{non è} \geq 7/2) \end{array} \right.$$

OPPURE:

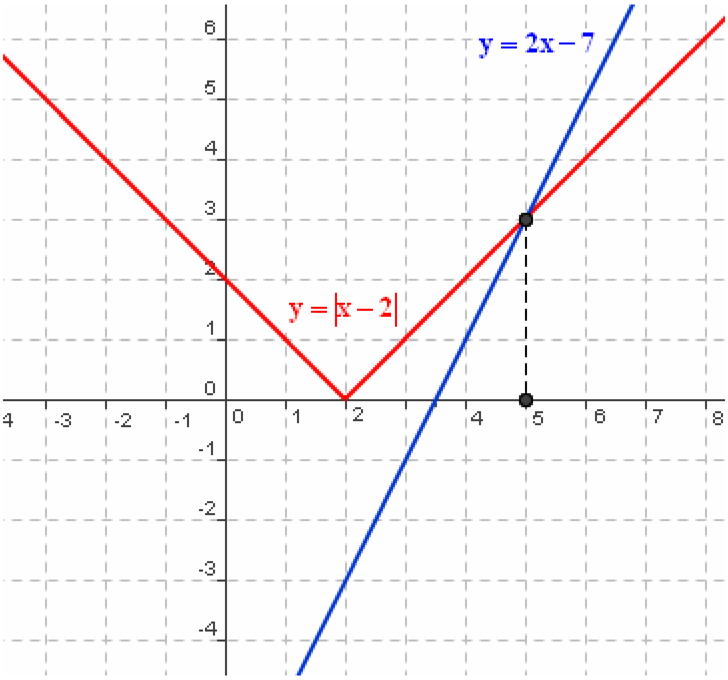
$x-2>0 \quad x>2$



$x \leq 2: \quad -x+2=2x-7; \; -3x=-9; \; \cancel{x=3}$ *non acc.* (*non è* ≤ 2)

$x \geq 2: \quad x-2=2x-7; \; -x=-5; \; \boxed{x=5}$

Risoluzione grafica:



16)

$|3x-8| = x-4$

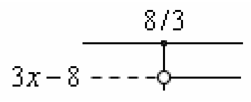
$x-4 \geq 0 \quad x \geq 4$

$$3x-8 = \pm(x-4) \left\langle \begin{array}{l} 3x-8 = x-4; \quad 2x = 4; \quad \cancel{x=2} \ \textit{non acc.}\ (\textit{non è} \geq 4) \\ 3x-8 = -x+4; \quad 4x = 12; \quad \cancel{x=3} \ \textit{non acc.}\ (\textit{non è} \geq 4) \end{array} \right.$$

Questa equazione è perciò IMPOSSIBILE.

ANCHE:

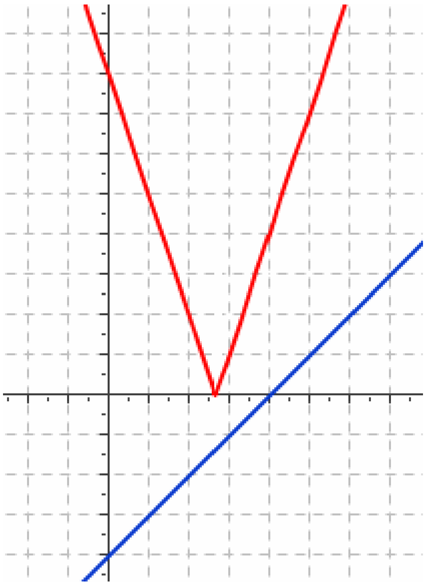
$3x-8 > 0 \quad x > 8/3$



$x \leq \dfrac{8}{3} \quad -3x+8 = x-4; \quad -4x = -12; \quad \cancel{x=3} \ \textit{non acc.} \left(\textit{non è} \leq \dfrac{8}{3}\right)$

$x \geq \dfrac{8}{3} \quad 3x-8 = x-4; \quad 2x = 4; \quad \cancel{x=2} \ \textit{non acc.} \left(\textit{non è} \geq \dfrac{8}{3}\right)$

Risoluzione grafica:



In effetti,
i due grafici
non hanno
intersezione.

17)

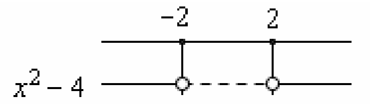
$|x^2-4| = 3x$

$3x \geq 0 \quad x \geq 0$

$$x^2-4=\pm 3x \left\langle \begin{array}{l} x^2-4=3x;\quad x^2-3x-4=0 \quad (x+1)(x-4)=0 \quad \underset{\substack{non\ acc.\\ non\ è\ \geq 0}}{\cancel{x=-1}} \vee \boxed{x=4} \\ x^2-4=-3x \quad x^2+3x-4=0 \quad (x+4)(x-1)=0 \quad \underset{\substack{non\ acc.\\ non\ è\ \geq 0}}{\cancel{x=-4}} \vee \boxed{x=1} \end{array}\right.$$

OPPURE:

$x^2-4>0 \quad x<-2 \vee x>2$



$x \leq -2 \vee x \geq 2:\ x^2-4=3x \quad x^2-3x-4=0$

$$(x+1)(x-4)=0 \qquad \underset{\substack{non\ acc.\\ non\ appartiene\\ all'insieme\ considerato}}{\cancel{x=-1}} \qquad \vee \ \boxed{x=4}$$

$-2 \leq x \leq 2:\qquad -x^2+4=3x \quad -x^2-3x+4=0 \quad x^2+3x-4=0$

$$(x+4)(x-1)=0 \qquad \underset{\substack{non\ acc.\\ non\ appartiene\\ all'insieme\ considerato}}{\cancel{x=-4}} \qquad \vee \ \boxed{x=1}$$

Risoluzione grafica:

18)

$|x^2-8x+14| = x^2-8x+18$

$x^2-8x+18 \geq 0 \quad$ *sempre verificata* $(\Delta<0)$

$$x^2-8x+14=\pm\left(x^2-8x+18\right)\left\langle \begin{array}{l} \cancel{x^2}\ \cancel{-8x}+14=\cancel{x^2}\ \cancel{-8x}+18 \quad impossibile \\ x^2-8x+14=-x^2+8x-18 \ \ldots \ (x-4)^2=0 \quad \boxed{x=4} \end{array}\right.$$

OPPURE :

$x^2-8x+14>0 \quad \left(x_{1,2}=4\pm\sqrt{16-14}=4\pm\sqrt{2}\right) \quad x<4-\sqrt{2} \ \vee \ x>4+\sqrt{2}$

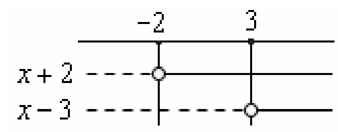
per cui

$x \leq 4-\sqrt{2} \ \vee \ x \geq 4+\sqrt{2}: \qquad \cancel{x^2}\ \cancel{-8x}+14=\cancel{x^2}\ \cancel{-8x}+18 \quad impossibile$

$4-\sqrt{2} \leq x \leq 4+\sqrt{2}: \qquad -x^2+8x-14=x^2-8x+18;\ \ldots\ x^2-8x+16=0 \quad (x-4)^2=0 \quad \boxed{x=4}$

19) $|x+2|+|x-3|=x+4$

$x+2>0 \quad quando \quad x>-2$
$x-3>0 \quad quando \quad x>3$

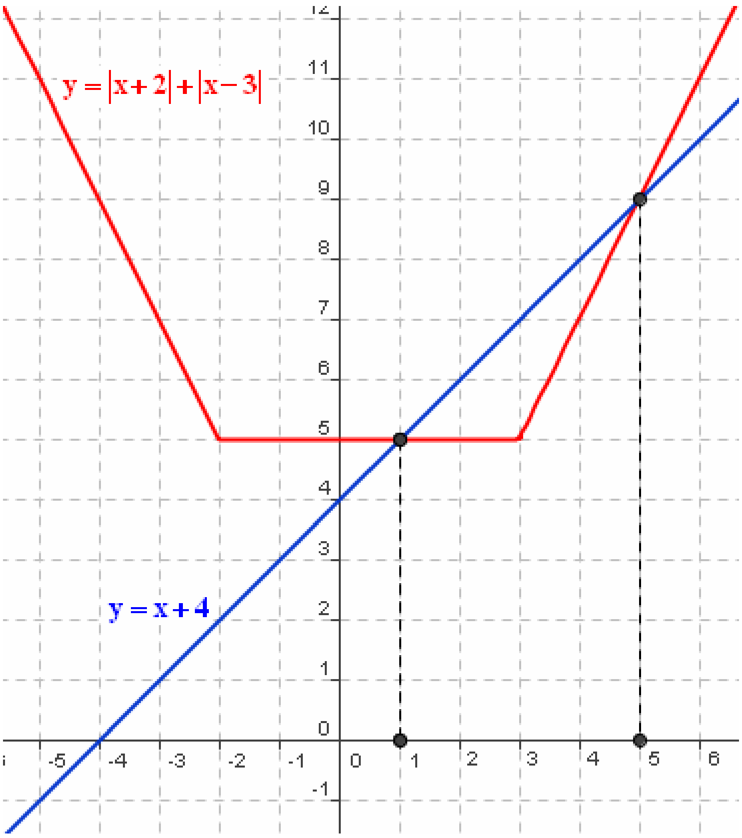


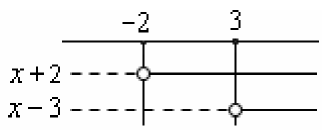
$x\le -2: \quad -x-2-x+3=x+4; \quad -3x=3;$
$\cancel{x=-1}$ non accettabile (non appartiene all'intervallo considerato)

$-2\le x\le 3: \quad \cancel{x}+2-x+3=\cancel{x}+4; \quad -x=-1;$
$\boxed{x=1}$ accettabile (appartiene all'intervallo considerato)

$x\ge 3: \quad \cancel{x}+2+x-3=\cancel{x}+4$
$\boxed{x=5}$ accettabile (appartiene all'intervallo considerato)

Risoluzione grafica:





La funzione a **secondo membro**
$y=x+4$
ha come grafico
una retta inclinata di 45° “in salita”.

Per tracciare il grafico
della funzione a primo membro
$y=|x+2|+|x-3|$
dobbiamo distinguere fra i tre intervalli:

a) $\boxed{x\le -2}$
nel quale la funzione assume la forma
$\boxed{y=}-x-2-x+3=\boxed{-2x+1}$

b) $\boxed{-2\le x\le 3}$
nel quale la funzione diventa
$\boxed{y=}x+2-x+3=\boxed{5}$

c) $\boxed{x\ge 3}$
nel quale la funzione diventa
$\boxed{y=}x+2+x-3=\boxed{2x-1}$

La funzione a primo membro
va dunque disegnata “a pezzi”:

a) semiretta in discesa su $(-\infty,-2]$
b) segmento orizzontale su $[-2,3]$
c) semiretta in salita su $[3,+\infty)$

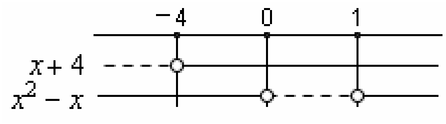
Così occorre fare con qualunque funzione che contenga la variabile indipendente più volte entro le stanghette di valore assoluto:

- **studiare il segno di ogni singola espressione entro stanghette,**
- **compilare un “quadro sinottico” come quello riportato qui sopra,**
- **e disegnare “a pezzi”, calcolando l’espressione che la funzione assume nei vari intervalli.**

Se invece per tracciare il grafico ci si serve di un **software** *opportuno,*
occorre tener presente che, ad esempio, $|x+2|$ *si digiterà* **abs**$(x+2)$.

20) $2|x+4| = |x^2 - x| - 2$

$x+4>0 \quad x>-4$
$x^2 - x > 0 \quad x(x-1)>0 \quad x<0 \vee x>1$



$x \le -4$:

$$2(-x-4) = x^2 - x - 2; \; -2x - 8 = x^2 - x - 2; \; x^2 + x + 6 = 0; \; \textit{impossibile} \; (\Delta < 0)$$

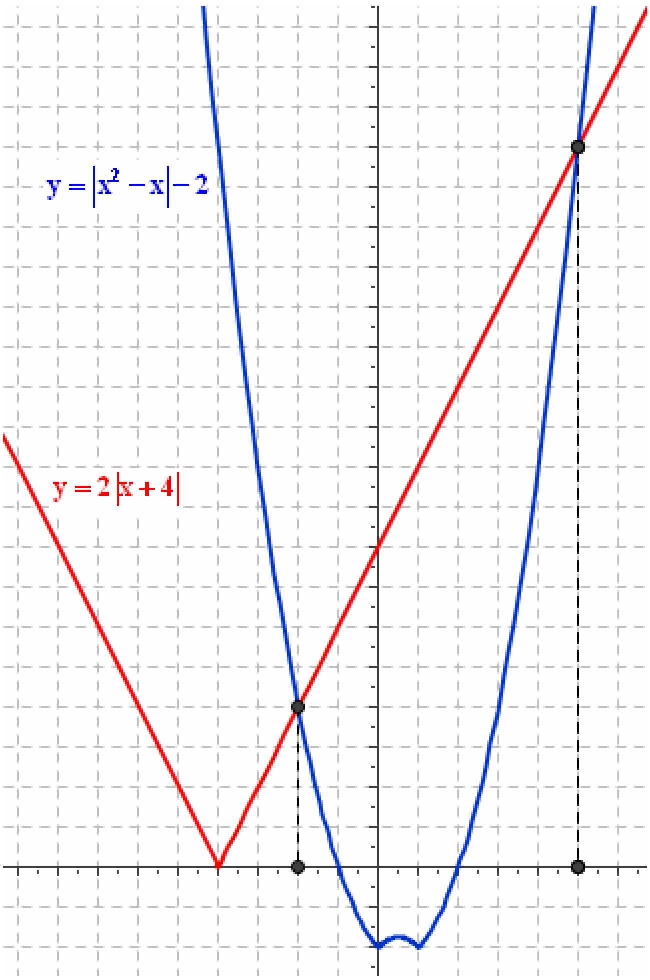
$-4 \le x \le 0 \vee x \ge 1$
(abbiamo messo assieme i due casi perché il segno delle due espressioni è il medesimo):

$$2(x+4) = x^2 - x - 2; \; 2x + 8 = x^2 - x - 2; \; x^2 - 3x - 10 = 0;$$
$$(x+2)(x-5) = 0 \; \boxed{x=-2} \vee \boxed{x=5}$$

$0 \le x \le 1$:

$$2(x+4) = -x^2 + x - 2; \; 2x + 8 = -x^2 + x - 2; \; x^2 + x + 10 = 0; \; \textit{impossibile} \; (\Delta < 0)$$

Risoluzione grafica



La funzione a **primo membro** è

per $\boxed{x \le -4}$: $\boxed{y=} 2(-x-4) = \boxed{-2x-8}$

per $\boxed{x \ge -4}$: $\boxed{y=} 2(x+4) = \boxed{2x+8}$

... oppure è disegnabile
a partire dal grafico della $y = |x|$,
traslandolo orizzontalmente a sinistra di 4 unità
poi raddoppiando tutte le ordinate.

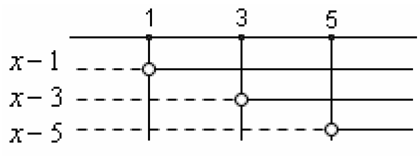
La funzione a **secondo membro** è

per $\boxed{x \le 0 \vee x \ge 1}$: $\boxed{y = x^2 - x - 2}$
(arco di parabola con
la concavità verso l'alto)

per $\boxed{0 \le x \le 1}$: $\boxed{y = -x^2 + x - 2}$
(arco di parabola con
la concavità verso il basso)

21) $|x-1|+|x-3|=|x-5|$

$x-1>0 \quad x>1$
$x-3>0 \quad x>3$
$x-5>0 \quad x>5$



$x \leq 1:$

$1-x+3-x=5-x$
$-x=1$
$\boxed{x=-1}$

$1 \leq x \leq 3:$

$x-1+3-x=5-x$
$\boxed{x=3}$

$3 \leq x \leq 5:$

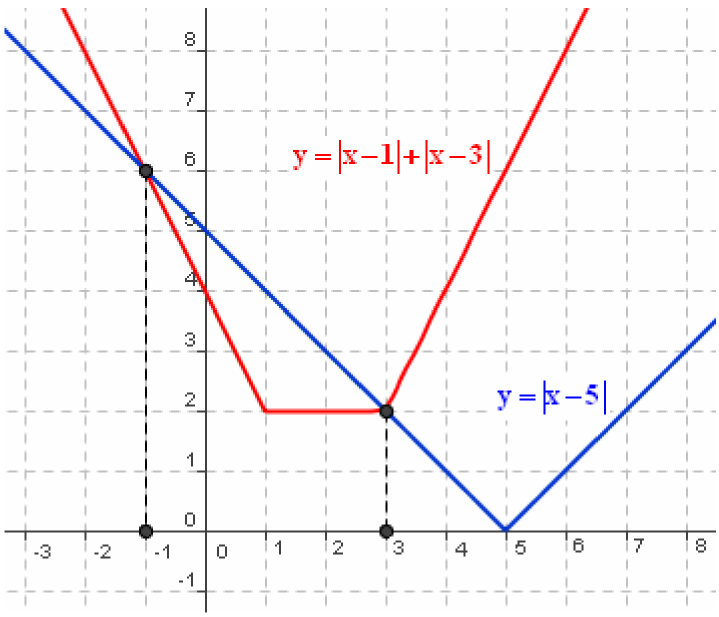
$x-1+x-3=5-x$
$3x=9$
$\boxed{x=3}$

$x \geq 5:$

$x-1+x-3=x-5$
$\cancel{x=-1}$
non acc.

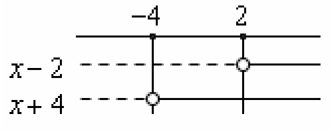
Le soluzioni sono dunque: $x=-1, \;\; x=3$
E' normale che la soluzione $x=3$ sia stata trovata due volte: infatti essa coincide con l'estremità comune di due degli intervalli e quindi la possibilità che $x=3$ sia, eventualmente, soluzione viene valutata con riferimento ad ENTRAMBI questi intervalli.

Risoluzione grafica:



22) $2|x-2|+3x=|x+4|$

$x-2>0 \quad x>2$
$x+4>0 \quad x>-4$



$x \le -4$

$2(-x+2)+3x=-x-4; \ -2x+4+3x=-x-4; \ 2x=-8$

$\boxed{x=-4}$

$-4 \le x \le 2$

$2(-x+2)+3x=x+4$

$\cancel{-2x}\ \cancel{+4}\ \cancel{+3x}\ =\ \cancel{x}\ \cancel{+4}$

equazione indeterminata;

quindi TUTTI i valori i x tali che $\boxed{-4 \le x \le 2}$

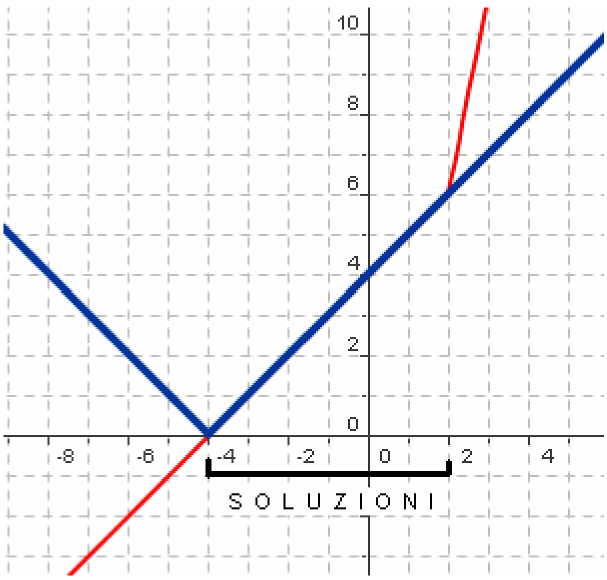
sono soluzione

$x \ge 2$

$2(x-2)+3x=x+4; \ 2x-4+3x=x+4; \ 4x=8; \ \boxed{x=2}$

In definitiva, sono soluzioni di questa equazione
gli infiniti numeri reali x tali che $\boxed{-4 \le x \le 2}$

Risoluzione grafica:

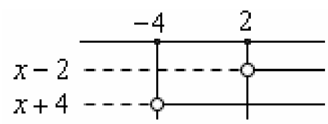


La curva disegnata a tratto più marcato è la $y=|x+4|$,
con la sua tipica forma a $\vee$ "ereditata" dalla funzione $y=|x|$,
in quanto il grafico della $y=|x+4|$ si può pensare come ottenibile da quello della $y=|x|$
per traslazione orizzontale di 4 unità verso *sinistra* (effetto "bastian contrario").

L'altra curva, dal tratto più sottile, è la $y=2|x-2|+3x$.

Nell'intervallo $[-4, 2]$ la prima "copre" la seconda,
perché lì i due grafici sono sovrapposti.
Infatti, per $-4 \le x \le 2$, è

- $y=2|x-2|+3x=2(-x+2)+3x=-2x+4+3x=x+4$
- $y=|x+4|=x+4$

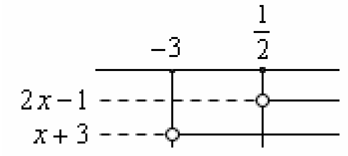


23)

$|2x-1|-|x+3|+x=2$

$2x-1>0 \quad x>\frac{1}{2}$

$x+3>0 \quad x>-3$

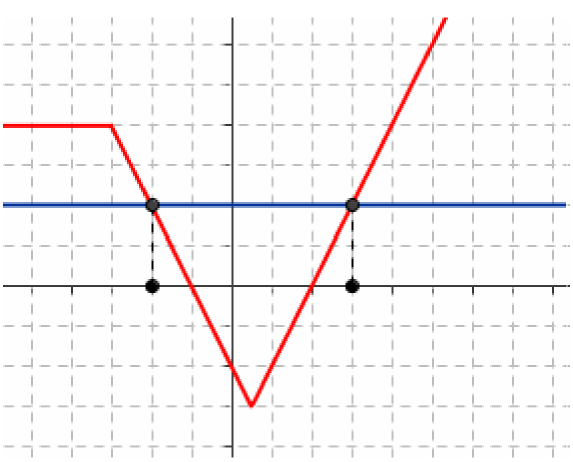


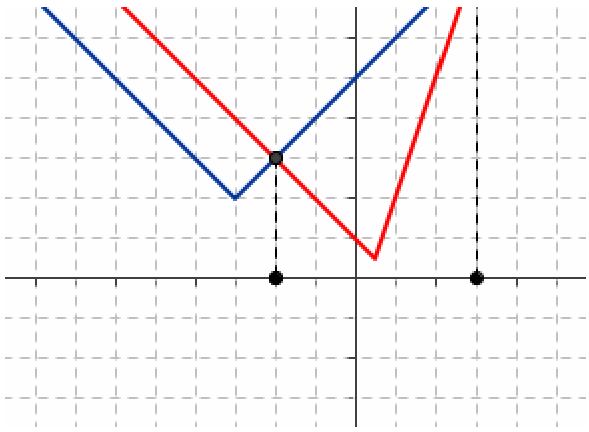
$x\le -3 \qquad -2x+1-(-x-3)+x=2;\ \ \cancel{-2x}+1\cancel{+x}+3\cancel{+x}=2$ *impossibile*

$-3\le x\le \frac{1}{2} \qquad -2x+1-(x+3)+x=2;\ \ -2x+1\cancel{-x}-3\cancel{+x}=2;\ \ -2x=4;\ \ \boxed{x=-2}$

$x\ge \frac{1}{2} \qquad 2x-1-(x+3)+x=2;\ \ 2x-1\cancel{-x}-3\cancel{+x}=2;\ \ 2x=6;\ \ \boxed{x=3}$

Risoluzione grafica:





Tenendo l'equazione sotto la forma data

$$|2x-1|-|x+3|+x=2$$

avremo che il primo membro diventa:

per $\boxed{x\le -3}$,

$\boxed{y=}-2x+1-(-x-3)+x=$

$=\cancel{-2x}+1\cancel{+x}+3\cancel{+x}=\boxed{4}$

per $\boxed{-3\le x\le \frac{1}{2}}$,

$\boxed{y=}-2x+1-(x+3)+x=$

$=-2x+1\cancel{-x}-3\cancel{+x}=\boxed{-2x-2}$

per $\boxed{x\ge \frac{1}{2}}$,

$\boxed{y=}2x-1-(x+3)+x=$

$=2x-1\cancel{-x}-3\cancel{+x}=\boxed{2x-4}$

Portando invece l'equazione sotto la forma

$$|2x-1|+x=|x+3|+2$$

la risoluzione grafica è quella mostrata nella figura qui sopra, perché
la funzione a **primo membro** risulta essere

per $\boxed{x\le \frac{1}{2}}$, $\boxed{y=}-2x+1+x=\boxed{-x+1}$

per $\boxed{x\ge \frac{1}{2}}$, $\boxed{y=}2x-1+x=\boxed{3x-1}$

mentre la funzione a **secondo membro** risulta essere

per $\boxed{x\le -3}$, $\boxed{y=}-x-3+2=\boxed{-x-1}$

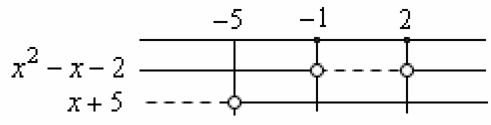
per $\boxed{x\ge -3}$, $\boxed{y=}x+3+2=\boxed{x+5}$

24)

$\left|x^2-x-2\right| = x+2\left|x+5\right|$

$x^2-x-2>0 \quad (x+1)(x-2)>0 \quad x<-1 \ \vee \ x>2$

$x+5>0 \quad x>-5$



$x \le -5$

$x^2-x-2 = x+2(-x-5)$

$x^2 \cancel{-x} - 2 = \cancel{x} \cancel{-2x} - 10$

$x^2 = -8$ *impossibile*

$-5 \le x \le -1 \ \vee \ x \ge 2$

(abbiamo riunito i due casi perché il segno delle espressioni considerate è, in entrambi, lo stesso)

$x^2-x-2 = x+2(x+5); \quad x^2-x-2 = x+2x+10$

$x^2-4x-12=0; \quad (x+2)(x-6)=0$

$\boxed{x=-2} \ \vee \ \boxed{x=6}$ (entrambe accettabili perché rientrano negli intervalli considerati)

$-1 \le x \le 2$

$-x^2+x+2 = x+2(x+5)$

$-x^2 \cancel{+x} + 2 = \cancel{x} + 2x + 10$

$-x^2-2x-8=0$

$x^2+2x+8=0$ *impossibile* $(\Delta<0)$

25)

$x = \left|x^2-7x+6\right|+1$

$-\left|x^2-7x+6\right| = 1-x$

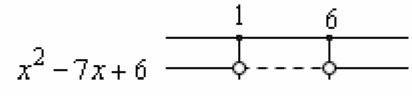
$\left|x^2-7x+6\right| = x-1$

$x-1 \ge 0, \ x \ge 1$

$$x^2-7x+6 = \pm(x-1) \left\langle \begin{array}{l} x^2-7x+6=x-1; \ x^2-8x+7=0; \ (x-1)(x-7)=0; \ \boxed{x=1} \ \vee \ \boxed{x=7} \\ x^2-7x+6=-x+1; \ x^2-6x+5=0; \ (x-1)(x-5)=0; \ \boxed{x=1} \ \vee \ \boxed{x=5} \end{array} \right.$$

OPPURE

$x^2-7x+6>0 \quad (x-1)(x-6)>0 \quad x<1 \ \vee \ x>6$



$x \le 1 \ \vee \ x \ge 6$

$x = x^2-7x+6+1$

$x^2-8x+7=0; \quad (x-1)(x-7)=0; \quad \boxed{x=1} \vee \boxed{x=7}$

$1 \le x \le 6$

$x = -x^2+7x-6+1$

$x^2-6x+5=0; \quad (x-1)(x-5)=0; \quad \boxed{x=1} \vee \boxed{x=5}$