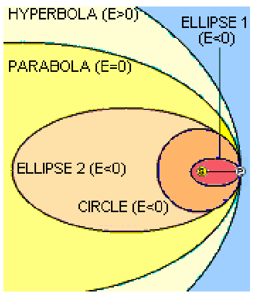
GEOMETRIA ANALITICA



1. DI COSA SI OCCUPA LA "GEOMETRIA ANALITICA"

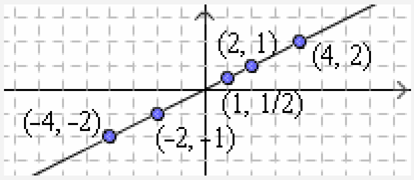
**La Geometria Analitica sviluppa l'idea secondo la quale,
così come un singolo punto del piano cartesiano
è individuato, ossia è localizzato in modo univoco, dalla coppia (a,b) delle sue coordinate,
altrettanto una linea (curva o retta) sul piano cartesiano, se è sufficientemente regolare,
potrà essere individuata da un'equazione nelle due variabili x e y,
nel senso che potrà essere associata a un'opportuna equazione nelle due variabili x, y
LA QUALE SIA VERIFICATA DALLA COPPIA (x, y) DELLE COORDINATE
DI TUTTI I PUNTI DELLA CURVA, E DI ESSI SOLTANTO.**

A)

**Ad un'equazione in due variabili,
tanto se essa si presenta sotto la forma $y = f(x)$ (detta "forma esplicita"),
quanto sotto la forma $F(x, y) = 0$ ("forma implicita"),
è possibile associare sul piano cartesiano un insieme di punti, e precisamente
l'insieme di tutti e soli punti (x, y) tali che la coppia (x, y) sia soluzione dell'equazione.**

Tale insieme di punti può essere chiamato, indifferentemente, "il grafico" dell'equazione considerata, "la curva associata" all'equazione considerata, o "il luogo geometrico associato" all'equazione considerata.

Ad es., all'equazione $y = \frac{1}{2}x$ corrisponde l'insieme di tutti e soli i punti, tali che la coppia (x, y) delle loro coordinate soddisfi l'equazione. Si tratta dunque di quei punti la cui ordinata è metà dell'ascissa: ed essi formano una retta (figura qui a fianco).



B)

E VICEVERSA: data, sul piano cartesiano, una curva γ con certe ben determinate caratteristiche: ad es.,

- una circonferenza di cui siano note le coordinate del centro e la misura del raggio
- oppure una retta passante per due punti di coordinate assegnate
  (per evitare equivoci: considereremo sempre la "retta" come un caso particolare di "curva"!)
- oppure ancora, il luogo geometrico dei punti aventi la proprietà di essere equidistanti da un punto fissato e da una retta fissata
- ecc. ecc. ecc.

è possibile risalire all'equazione a cui tale curva è associata!!!

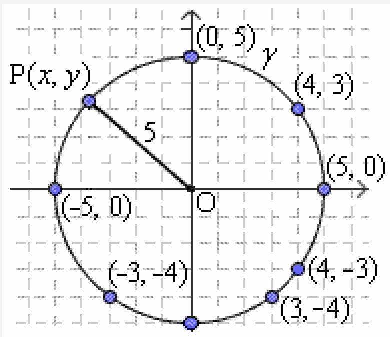
Si tratterà di trovare un'uguaglianza, contenente x e y,
la quale sia verificata dalle coordinate di *tutti e soli* i punti che fanno parte della curva in questione.

**L'equazione di una assegnata curva γ si scriverà
traducendo in coordinate una proprietà "CARATTERISTICA" dei punti di γ,
ossia una proprietà di cui godono TUTTI I PUNTI di γ ED ESSI SOLTANTO.**

Prendiamo ad es. la circonferenza di centro l'origine e raggio 5.
Per determinare l'equazione di questa curva γ,
cercheremo di stabilire quale sia la condizione alla quale deve soddisfare un punto (x, y) del piano cartesiano, per appartenervi.
γ è il luogo dei punti del piano cartesiano, la cui distanza dall'origine è uguale a 5 unità di misura.
Quindi un punto $P(x, y)$ del piano cartesiano apparterrà a γ se e soltanto se risulterà $PO = 5$.
Ma per quali valori della coppia (x, y) è verificata la relazione $PO = 5$?
Se noi traduciamo in coordinate la relazione $PO = 5$, otterremo (vedi qui a fianco)

$$\boxed{x^2 + y^2 = 25}$$

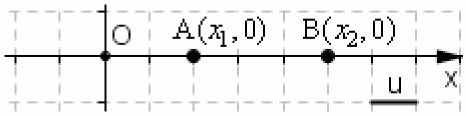
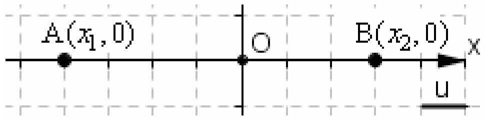
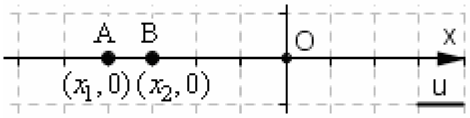
che è perciò l'equazione cercata.
Un punto del piano cartesiano fa parte della circonferenza γ se e solo se la coppia (x, y) delle sue coordinate soddisfa a tale equazione.



La distanza fra due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) nel piano cartesiano è data dalla formula
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Dunque
$PO = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$
per cui si avrà $PO = 5$ se e solo se
$\sqrt{x^2 + y^2} = 5$ o anche $\boxed{x^2 + y^2 = 25}$

2. DISTANZA FRA DUE PUNTI SUL PIANO CARTESIANO

Consideriamo dapprima il caso di **due punti che si trovano entrambi sull'asse *x*** quindi hanno ordinata 0: $\mathrm{A}(x_1,0)$ e $\mathrm{B}(x_2,0)$.

	*Dal disegno*: $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \mathrm{AB} = 3$ ... *Osserviamo che anche* $x_2 - x_1 = 5 - 2 = 3$
	*Dal disegno*: $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \mathrm{AB} = 7$ ... *Osserviamo che anche* $x_2 - x_1 = 3 - (-4) = 3 + 4 = 7$
	*Dal disegno*: $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \mathrm{AB} = 1$ .... *Osserviamo che anche* $x_2 - x_1 = -3 - (-4) = -3 + 4 = 1$

Perciò **per calcolare la distanza fra due punti, entrambi appartenenti all'asse *x*,**
ci basterà calcolare la differenza fra le loro ascisse
(abbiamo visto che ciò è vero negli esempi proposti;
riflettendo un attimo per generalizzare, si intuisce che il procedimento sarà valido *sempre*;
tuttavia, della regola è anche possibile dare una *dimostrazione* rigorosa.
Noi preferiamo rimandare questa a una fase successiva, perché quando avremo introdotto l'*Identità di Chasles*, essa permetterà di organizzare tale dimostrazione molto comodamente, senza dover distinguere vari casi).

E' evidente comunque che si dovrà
scrivere per prima l'ascissa maggiore e poi sottrarre da essa quella minore,
perché se si facesse il viceversa, si otterrebbe un numero negativo … ad es., con riferimento alle nostre tre figure, *non* sarebbe stato corretto scrivere $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = x_1 - x_2 = x_\mathrm{A} - x_\mathrm{B}$, perché la differenza $x_1 - x_2$ è negativa.

Tuttavia, capita a volte di *non sapere* quale sia l'ascissa maggiore,
magari perché le due ascisse sono *incognite*, oppure perché sono *dipendenti da un parametro*.
Supponiamo che i due punti di cui devo calcolare la distanza siano $\mathrm{P}(2k-3,\ 0)$ e $\mathrm{Q}(k+4,\ 0)$.
Come farò a stabilire quale fra le due ascisse è la maggiore?
Il problema è che fra le due quantità $2k-3$ e $k+4$, può essere maggiore la prima oppure la seconda,
a seconda del valore che si pensa di attribuire al parametro *k*!
Ad esempio, con $k=10$ è maggiore $2k-3$, con $k=5$ è maggiore $k+4$.

Potrei allora risolvere la questione in questo modo:
dati due punti posti entrambi sull'asse *x*, per calcolarne la distanza
io farò la differenza fra le loro ascisse, prendendole in un ordine *qualsiasi*,
***con l'intesa che*, se da questo calcolo dovesse uscire un valore *negativo*,**
il risultato corretto sarà … l'*opposto* del numero da me trovato.
Ma ciò equivale a fare il **valore assoluto** della differenza delle ascisse! E in definitiva si può dire che

la distanza fra due punti, appartenenti entrambi all'asse *x*,
è IL VALORE ASSOLUTO della differenza fra le loro ascisse (prese in un ordine qualsiasi):

$$\mathbf{d(A,B)} = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

Si può evitare il valore assoluto soltanto quando si riesce ad impostare la differenza
in modo che questa sia sicuramente positiva, ossia quando si sa per certo
quale fra le due ascisse è la maggiore, così da poter scrivere
(ascissa maggiore) – (ascissa minore)

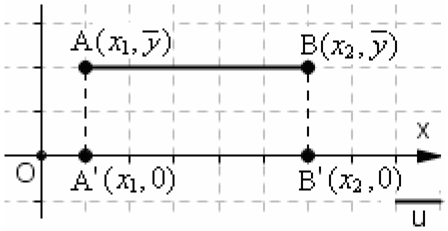
ESEMPIO
- $\mathrm{A}(7,0);\ \mathrm{B}(3,0) \to d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = |3-7| = |-4| = 4$ o anche, più semplicemente,
  $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = 7 - 3 = 4$ (scrivo prima l'ascissa maggiore e le sottraggo l'ascissa minore)

ALTRI ESEMPI:
- $\mathrm{A}(5,0);\ \mathrm{B}(-1,0);\ \mathrm{C}(3,0) \ \to\ \mathrm{AB} = |-1-5| = |-6| = 6;\ \ \mathrm{AC} = |3-5| = |-2| = 2;\ \ \mathrm{BC} = |3-(-1)| = |4| = 4$

  $\mathrm{P}(2k-3,0);\ \mathrm{Q}(k+4,0) \ \to\ \mathrm{PQ} = |(k+4)-(2k-3)| = |k+4-2k+3| = |7-k| = |k-7|$ (*NOTA*)

  NOTA: *due numeri fra loro opposti hanno ugual valore assoluto*:
  di qui la possibilità, se lo si desidera, di cambiare i segni entro le stanghette

La stessa formula $\mathbf{d(A,B)} = \left|\textit{differenza ascisse}\right| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$
vale anche se i due punti A, B, pur non giacendo sull'asse *x*, hanno la stessa ordinata
e di conseguenza stanno su di una retta che è parallela all'asse *x*.



Infatti (figura qui a sinistra):
A' e B' sono le proiezioni di A, B rispettivamente, sull'asse *x*.
A' ha dunque la stessa ascissa di A, e B' la stessa ascissa di B.
$A(x_1,\overline{y});\ B(x_2,\overline{y});\ A'(x_1,0);\ B'(x_2,0)$
$AB = A'B' = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$
(A' e B' stanno sull'asse *x* per cui si può applicare una formula già vista).

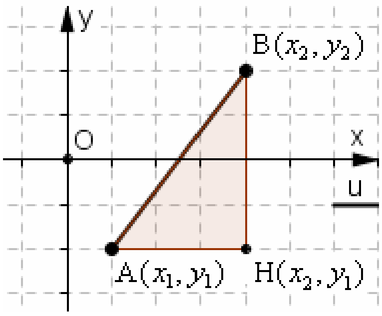
NOTA - $\overline{y}$ si legge "*y* segnato". La soprallineatura è usata per rendere l'idea di un valore "fissato".

ESEMPIO (con riferimento alla figura precedente): $A(1,2);\ B(6,2) \ \rightarrow\ AB = |6-1| = |1-6| = 5$

Se i due punti considerati si trovano entrambi sull'asse *y* o su di una parallela all'asse *y*
(insomma: se hanno la stessa ascissa, nulla o non nulla), avremo analogamente la formula:
$$\mathbf{d(A,B)} = \left|\textit{differenza ordinate}\right| = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$$

ESEMPIO: $L(-3,2);\ M(-3,-8) \ \rightarrow\ LM = |-8-2| = |2-(-8)| = 10$

Occupiamoci infine del **CASO GENERALE**.
Tracciando due opportuni segmenti, uno orizzontale e l'altro verticale,
faremo sì che AB diventi l'ipotenusa di un triangolo rettangolo al quale applicheremo il teorema di Pitagora.



$A(x_1,y_1)\quad B(x_2,y_2)$
$H(x_2,y_1)$ (H *ha la stessa ascissa di* B *e la stessa ordinata di* A)

Caso generale

$$d(A,B) = AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{|x_2-x_1|^2 + |y_2-y_1|^2} =$$
$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \quad (NOTA)$$

NOTA: il quadrato rende inutili le stanghette di valore assoluto.
Pensa ad esempio che $|-5|^2 = (-5)^2,\ \ |+7|^2 = (+7)^2$

ESEMPIO (con riferimento alla figura):
$A(1,-2);\ B(4,2)$
$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

ALTRO ESEMPIO:
$C(-1,3);\ D(-8,27) \ \rightarrow\ CD = \sqrt{(-8-(-1))^2 + (27-3)^2} = \sqrt{(-7)^2 + 24^2} = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$

RICAPITOLAZIONE

Se i due punti hanno la STESSA ORDINATA:	Se i due punti hanno la STESSA ASCISSA:	CASO GENERALE:
$\boldsymbol{d(A,B) = \lvert x_2 - x_1 \rvert}$	$\boldsymbol{d(A,B) = \lvert y_2 - y_1 \rvert}$	$\boldsymbol{d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}}$

OSSERVAZIONE
La formula relativa al "caso generale" è applicabile, volendo, anche ai casi in cui i due punti abbiano ugual ascissa o ugual ordinata (qui, comunque, sono più comode le due formule "specifiche").

Con riferimento all' OSSERVAZIONE:
infatti, se, ad es., è $y_1 = y_2$, si ha $d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + 0^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2} = |x_2 - x_1|$

Ad esempio, i punti (9, 1) e (–3, 1) hanno la stessa ordinata. Per calcolarne la distanza, si può utilizzare
- ♪ tanto la formula specifica per punti di uguale ordinata: $AB = |-3-9| = |-12| = 12$
- ♫ quanto la formula generale: $AB = \sqrt{(-3-9)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(-12)^2 + 0^2} = \sqrt{144+0} = \sqrt{144} = 12$

ESERCIZI SVOLTI SULLA DISTANZA DI DUE PUNTI

1) Determina il perimetro del triangolo di vertici $A(-4,0)$; $B(-13,-12)$; $C(1,-12)$

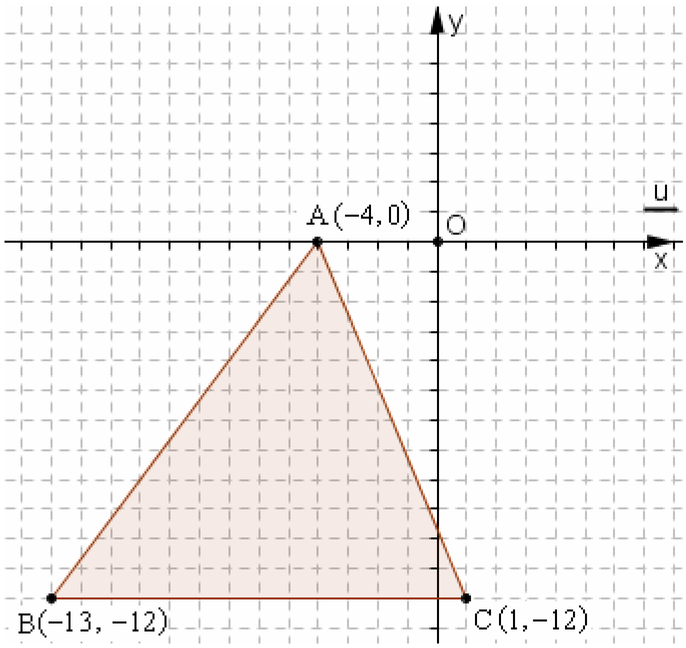
$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$
$$=\sqrt{(-13-(-4))^2+(-12-0)^2}=$$
$$=\sqrt{(-9)^2+(-12)^2}=\sqrt{81+144}=$$
$$=\sqrt{225}=15$$

$$\mathrm{AC}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$
$$=\sqrt{(1-(-4))^2+(-12-0)^2}=$$
$$=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=$$
$$=\sqrt{169}=13$$

$$\mathrm{BC}=|x_2-x_1|=|1-(-13)|=|14|=14$$

(comunque l'uso delle stanghette era superfluo perché siamo partiti dall'ascissa maggiore sottraendole quella minore)

$$2p(\mathrm{ABC})=15+13+14=42$$

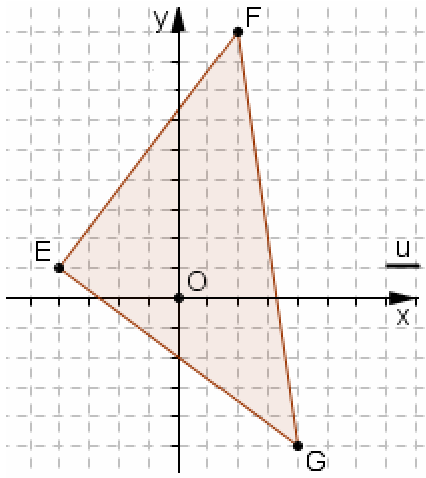


2) Dimostra che il triangolo di vertici $E(-4,1)$; $F(2,9)$; $G(4,-5)$ è isoscele, e calcola la sua base.

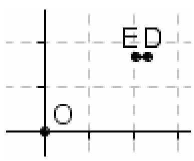
$$\mathrm{EF}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(2-(-4))^2+(9-1)^2}=$$
$$=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

$$\mathrm{EG}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-(-4))^2+(-5-1)^2}=$$
$$=\sqrt{8^2+(-6)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10=\mathrm{EF}!!!$$

$$\mathrm{FG}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$
$$=\sqrt{(4-2)^2+(-5-9)^2}=$$
$$=\sqrt{2^2+(-14)^2}=\sqrt{4+196}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$$



3) Trova la lunghezza del segmento DE di estremi $D(\sqrt{5},\sqrt{3})$; $E(2,\sqrt{3})$



$$\mathrm{DE}=\left|\underbrace{2-\sqrt{5}}_{<0}\right|=\boxed{\sqrt{5}-2}\approx 2{,}24-2=0{,}24$$

Ovviamente, si sarebbe potuto anche partire dall'ascissa maggiore per sottrarle quella minore, evitando così di dover introdurre il simbolo di valore assoluto:

$$\mathrm{DE}=(\textit{ascissa maggiore})-(\textit{ascissa minore})=\sqrt{5}-2$$

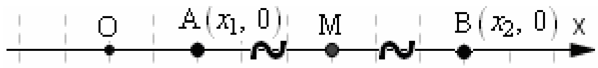
4) Sono dati $A(0,k)$ e $B(0,8-k)$.
Per quali valori di k la distanza di questi punti vale 6?

$$d(\mathrm{A},\mathrm{B})=|(8-k)-k|=|8-2k|;\quad |8-2k|=6 \leftrightarrow 8-2k=\pm 6 \left\langle \begin{array}{l} 8-2k=6;\ -2k=-2;\ k=1 \\ 8-2k=-6;\ -2k=-14;\ k=7 \end{array}\right.$$

In effetti, con $k=1$ si ha $A(0,1)$ e $B(0,7)$ da cui $AB=6$;
con $k=7$ si ha $A(0,7)$ e $B(0,1)$ da cui $AB=6$

3. COORDINATE DEL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

- **Se il segmento sta sull'asse *x*:**



Supponiamo di conoscere x_1 (ascissa di A) e x_2 (ascissa di B); vogliamo trovare x_M.
Avremo $\overline{AM} = \overline{MB}$.

♪ Se A sta a *sinistra* di B (come nella nostra figura), tale relazione diventa

$$x_M - x_1 = x_2 - x_M; \quad 2x_M = x_1 + x_2; \quad x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

♫ E se A fosse invece a *destra* di B?
Allora sarebbe

$$x_M - x_2 = x_1 - x_M; \quad 2x_M = x_1 + x_2; \quad x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (\textit{come prima})$$

In definitiva,
se il segmento AB giace sull'asse *x*, si avrà, *qualunque sia* la posizione reciproca dei due estremi A e B,

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Una **dimostrazione alternativa** della formula è riportata nel successivo paragrafo sull'**identità di Chasles**.

ESEMPIO Il punto medio del segmento di estremi $A(7,0)$; $B(9,0)$ è il punto M tale che

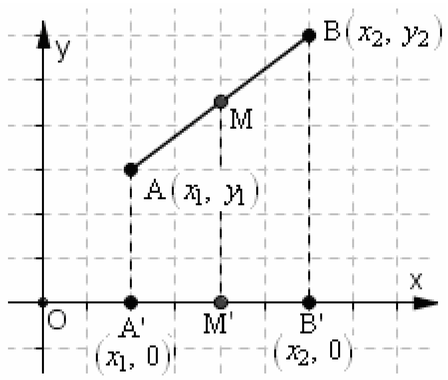
$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7+9}{2} = \frac{16}{2} = 8;$$ l'ordinata di M vale invece evidentemente anch'essa 0.

Dunque è il punto $M(8,0)$.

- **Se il segmento giace sull'asse *y***, si otterrà in modo del tutto analogo: $y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

ESEMPIO Se E è il punto medio di CD, con $C(0,5)$; $D(0,-3)$, allora $E\left(0, \dfrac{5-3}{2}\right) = (0,1)$

- **Caso generale**



Proiettiamo A, B, M sull'asse *x*.
Le tre proiezioni A', B', M' avranno le stesse ascisse dei punti iniziali.

Per il Piccolo Teorema di Talete, essendo $AM = MB$,
risulterà anche $A'M' = M'B'$ quindi M' sarà il punto medio di $A'B'$.

Allora, potendosi applicare una formula già acquisita
(dato che il segmento $A'B'$ giace sull'asse *x*), avremo

$$x_{M'} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

e perciò (dato che $x_M = x_{M'}$) pure

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Allo stesso modo, proiettando sull'asse *y*, si otterrebbe

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

In definitiva, in *qualsiasi* caso, dati due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$,
il punto medio M del segmento AB avrà sempre coordinate

$$\boxed{x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}}; \quad \boxed{y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}}.$$

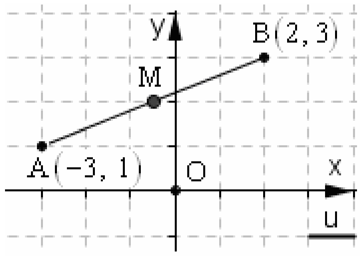
L'ASCISSA DEL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO È LA MEDIA DELLE ASCISSE DEGLI ESTREMI, LA SUA ORDINATA È LA MEDIA DELLE ORDINATE.

ESEMPIO I punti medi dei lati del triangolo ABC, con $A(-4,-2)$; $B(-3,2)$; $C(1/3, 0)$ sono:

$$\left(\frac{-4-3}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}, 0\right); \quad \left(\frac{-4+\frac{1}{3}}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = \left(-\frac{11}{6}, -1\right); \quad \left(\frac{-3+\frac{1}{3}}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = \left(-\frac{4}{3}, 1\right)$$

ESERCIZI SVOLTI SUL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

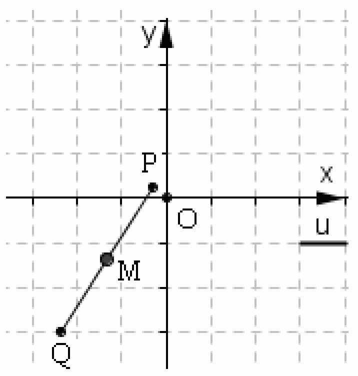
1) Calcola le coordinate del punto medio del segmento AB, essendo A(–3,1); B(2,3)



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$M\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$$

2) $\mathbf{P\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right);\ Q\left(-\frac{12}{5},-3\right)}$. **Punto medio di PQ = ?**



$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{-\frac{1}{3}-\frac{12}{5}}{2} = \frac{\frac{-5-36}{15}}{2} = -\frac{41}{30}$$

$$y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} = \frac{\frac{1}{4}-3}{2} = \frac{\frac{1-12}{4}}{2} = -\frac{11}{8}$$

$$M\left(-\frac{41}{30}, -\frac{11}{8}\right)$$

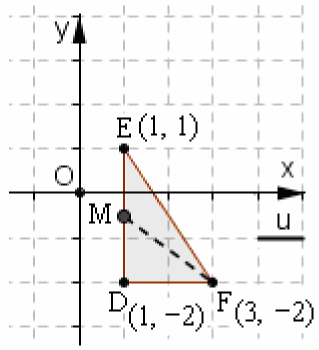
3) Calcola la lunghezza della mediana FM del triangolo DEF, essendo D(1,–2); E(1,1); F(3,–2)

$$x_M = \frac{x_D + x_E}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{y_D + y_E}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$M\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$F(3, -2)$$



$$FM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

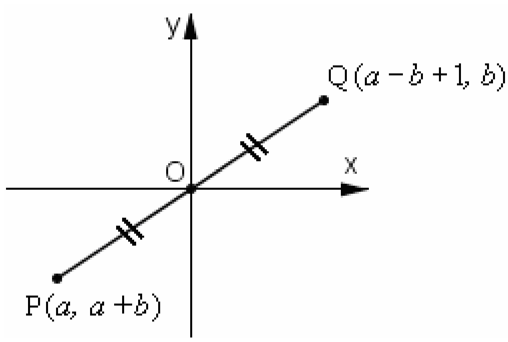
$$= \sqrt{(3-1)^2 + \left(-2+\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{16+9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

4) Per quali valori di a, b i due punti
$P(a,\ a+b)$ e $Q(a-b+1,\ b)$
sono simmetrici rispetto all'origine?

Dobbiamo determinare a, b in modo che
il punto medio del segmento PQ coincida con l'origine.
Ma tale punto medio ha coordinate

$$\left(\frac{a+a-b+1}{2}, \frac{a+b+b}{2}\right) = \left(\frac{2a-b+1}{2}, \frac{a+2b}{2}\right)$$



e coinciderà con l'origine se e solo se $\begin{cases} \dfrac{2a-b+1}{2} = 0 \\ \dfrac{a+2b}{2} = 0 \end{cases}$,

sistema dal quale si ricava $a = -\frac{2}{5},\ b = \frac{1}{5}$

4. CONDIZIONE DI APPARTENENZA DI UN PUNTO A UNA CURVA

Sia data l'equazione di una curva: $\underbrace{y = f(x)}_{\text{forma esplicita}}$ oppure $\underbrace{F(x, y) = 0}_{\text{forma implicita}}$

e sia dato un punto di coordinate note: $\mathrm{P}(x_0, y_0)$.
Come facciamo a stabilire se il punto appartiene oppure no alla curva considerata?

Ricordiamo che l'*equazione di una curva* sul piano cartesiano è
quell'uguaglianza che è verificata dalle coordinate di tutti e soli i punti che appartengono alla curva.

Pertanto

un punto appartiene ad una curva di equazione assegnata se e soltanto se,
sostituendo le coordinate del punto al posto di *x* e di *y* rispettivamente,
nell'equazione della curva,
si ottiene un'uguaglianza vera.

ESEMPI

- **Considerata la curva**

  $\boldsymbol{C:\ x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0}$ **,**

  quali fra i punti seguenti vi appartengono?

  $\mathbf{P(0,3);\ Q(3,0);\ R(-2,1);\ S(-1,2)}$

  $\mathrm{P}(0,3) \in C?\ \ 0^2 + 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0;\ \ 0 + 9 - 12 + 3 = 0;\ \ 0 = 0\ \ SI'!$
  $\mathrm{Q}(3,0) \in C?\ \ 3^2 + 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0;\ \ 9 + 0 - 0 + 3 = 0;\ \ 12 = 0\ \ NO!$
  $\mathrm{R}(-2,1) \in C?\ (-2)^2 + 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0;\ \ 4 + 1 - 4 + 3 = 0;\ \ 4 = 0\ \ NO!$
  $\mathrm{S}(-1,2) \in C?\ \ (-1)^2 + 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 0;\ \ 1 + 4 - 8 + 3 = 0;\ \ 0 = 0\ \ SI'!$

- **Per quale valore del parametro *a* la curva di equazione**

  $\boldsymbol{C:\ x^2 - x + ay + a - 8 = 0}$

  passa per il punto (–2, 3)?

  Sostituendo, si dovrà trovare un'uguaglianza vera!

  $(-2)^2 - (-2) + a \cdot 3 + a - 8 = 0;\ \ 4 + 2 + 3a + a - 8 = 0;\ \ 4a = 2;\ \ a = \dfrac{1}{2}$

- **Fra le due curve seguenti,**

  $\boldsymbol{C_1:\ y^2 - 2x - y + 4 = 0}$

  $\boldsymbol{C_2:\ 3x^2 + y^2 - 2x + 5y = 0}$

  quale passa per l'origine?

  Sostituendo (0, 0) al posto di (x, y),
  si vede che passa per l'origine soltanto la seconda curva, non invece la prima.

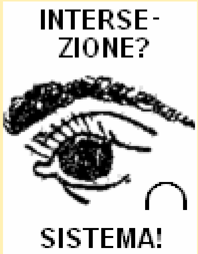
In generale,

PASSANO PER L'ORIGINE
tutte e sole le curve
la cui equazione ha
TERMINE NOTO NULLO.

Si dice "termine noto" il termine che non contiene né *x*, né *y*.

5. COME TROVARE L'INTERSEZIONE FRA DUE CURVE DI EQUAZIONI DATE

**Per trovare le eventuali INTERSEZIONI fra due curve assegnate
basta prendere le equazioni associate alle due curve
e porle a SISTEMA.**



Infatti i punti di intersezione fra due curve sono i punti che appartengono *sia all'una che all'altra* curva.
Ora, un punto appartiene sia alla prima che alla seconda curva se e solo se
le sue coordinate verificano tanto l'equazione della prima, quando l'equazione della seconda,
ossia il *sistema* formato da tali due equazioni.

ESEMPI

- **Trovare le intersezioni fra le due curve (si tratta di due circonferenze) di equazioni**

  $\boldsymbol{C_1 :\ x^2+y^2-4y+3=0}$

  $\boldsymbol{C_2 :\ x^2+y^2-8x+4y-5=0}$

$$\begin{cases} x^2+y^2-4y+3=0 \\ x^2+y^2-8x+4y-5=0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1)-(2) \\ (1) \end{matrix} \begin{cases} \cancel{8}x-\cancel{8}y+\cancel{8}^{1}=0 \\ x^2+y^2-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y-1 \\ (y-1)^2+y^2-4y+3=0 \end{cases};$$

$\ldots;$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

per cui le due curve si intersecano nei due punti $A(0,1)$ e $B(1,2)$

- **Trovare le intersezioni fra le due curve (si tratta di due rette) di equazioni**

  $\boldsymbol{r_1 :\ 4x-2y+3=0}$

  $\boldsymbol{r_2 :\ y=2x}$

$$\begin{cases} 4x-2y+3=0 \\ y=2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2x \\ \cancel{4x}-\cancel{4x}+3=0 \ \ \textit{imposs.} \end{cases}$$

Questo sistema è dunque impossibile
e perciò le due rette non hanno alcun punto di intersezione:
sono parallele.

6. SEGMENTI ORIENTATI
IDENTITA' DI CHASLES (Michel Chasles, francese, 1793-1880)
DUE DIMOSTRAZIONI

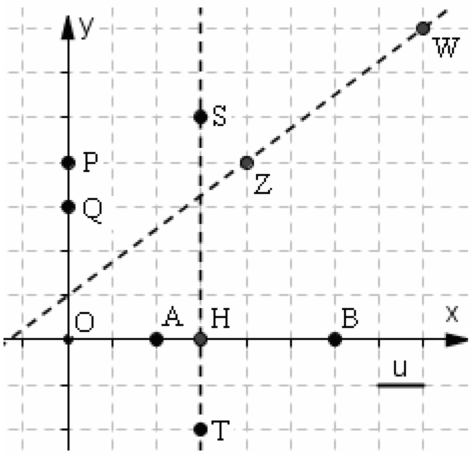
Spesso accade che un segmento giacente sull'asse *x*, o sull'asse *y*, o su di una parallela ad uno degli assi cartesiani, venga considerato come segmento *orientato*.

Ad un *segmento orientato giacente su di una retta orientata* viene attribuita misura

- **positiva** se l'orientamento del segmento coincide con l'orientamento della retta,
- **negativa** in caso contrario.

Per un segmento che sia disposto *obliquamente* sul piano cartesiano,
di solito non interessa pensare ad un'orientazione (anche se a volte invece lo si fa).

Esempi:



$AB = 4$
$BA = -4$

$PQ = -1$
$QP = 1$

$HS = 5$
$SH = -5$

$HT = -2$
$TH = 2$

ZW (o $\overline{ZW}$) $= 5$ (segmento non orientato)

SIMBOLOGIA (IMPORTANTE!)

Purtroppo da un libro di testo all'altro la simbologia adottata per questo argomento può cambiare parecchio.
Noi faremo così:

- il fatto che un segmento si debba pensare come orientato o no,
  verrà *a volte* dichiarato esplicitamente, *altre volte* invece sarà da desumere dal contesto
- utilizzeremo lo stesso simbolo, ad esempio AB,
  - ♪ sia per indicare il segmento orientato AB,
  - ♪ sia per indicare la misura di questo (= numero *relativo*)
  - ♪ sia per indicare il segmento *non* orientato AB,
  - ♪ sia per indicare la misura di questo (= numero *assoluto*)
- evidentemente, nel caso il segmento sia da pensarsi orientato, sarà $AB \neq BA$,
  se NON orientato sarà $AB = BA$
- un eventuale uso del "cappello" $(\overline{AB})$ indicherà sempre esclusivamente un segmento NON orientato,
  o la misura di questo, interpretabile anche come il valore assoluto della misura di un segmento orientato.

Per le misure relative di segmenti orientati su di una retta orientata valgono le seguenti ovvie relazioni:

$$\textbf{(1)}\quad AB = -BA$$

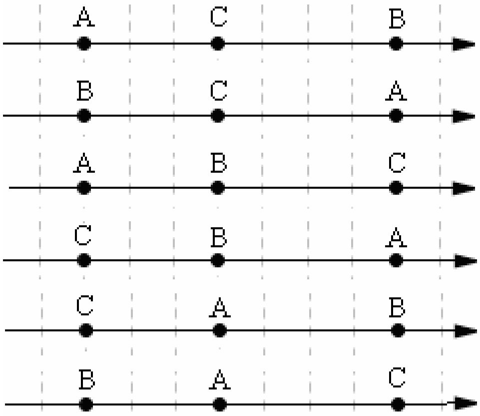
$$\textbf{(2)}\quad AB + BA = 0$$

Vale poi la seguente NOTEVOLISSIMA relazione:

$$\textbf{(3)}\quad AB = AC + CB\,,$$

detta IDENTITA' (o "formula") DI CHASLES,
dove AB, AC, CB sono misure relative di segmenti orientati su di una retta orientata, e L'INTERESSE DELL' IDENTITÀ STA NEL FATTO CHE ESSA È VALIDA *QUALUNQUE SIA* LA POSIZIONE RECIPROCA DEI TRE PUNTI A, B, C.

Vediamo innanzitutto qualche esempio che mostri in modo semplice come l'identità effettivamente "funzioni".



I. Ordine A-C-B $\underbrace{AB}_{+7}=\underbrace{AC}_{+3}+\underbrace{CB}_{+4}$

II. B-C-A $\underbrace{AB}_{-7}=\underbrace{AC}_{-4}+\underbrace{CB}_{-3}$

III. A-B-C $\underbrace{AB}_{+3}=\underbrace{AC}_{+7}+\underbrace{CB}_{-4}$

IV. C-B-A $\underbrace{AB}_{-4}=\underbrace{AC}_{-7}+\underbrace{CB}_{+3}$

V. C-A-B $\underbrace{AB}_{+4}=\underbrace{AC}_{-3}+\underbrace{CB}_{+7}$

VI. B-A-C $\underbrace{AB}_{-3}=\underbrace{AC}_{+4}+\underbrace{CB}_{-7}$

E vediamo ora come si possa DIMOSTRARE l'identità di Chasles
***non* pensando ad un esempio particolare, ma IN MODO DEL TUTTO GENERALE**
(faremo ancora riferimento al riquadro precedente, ma … immagina di togliere i quadretti ed i numeri!)

I. Nel primo caso (A-C-B) l'uguaglianza da dimostrare è ovvia: $AB = AC + CB$

II. Nel caso (B-C-A) l'uguaglianza ovvia è $BA = BC + CA \to -AB = -CB - AC \to AB = AC + CB$

III. Nel caso (A-B-C) l'uguaglianza ovvia è $AC = AB + BC \to AC = AB - CB \to AB = AC + CB$

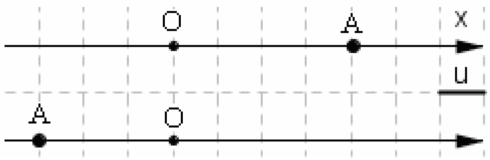
IV. Nel caso (C-B-A) l'uguaglianza ovvia è $CA = CB + BA \to -AC = CB - AB \to AB = AC + CB$

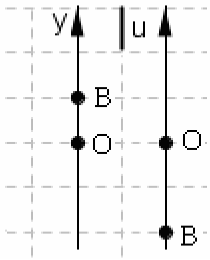
V. Nel caso (C-A-B) l'uguaglianza ovvia è $CB = CA + AB \to CB = -AC + AB \to AB = AC + CB$

VI. Nel caso (B-A-C) l'uguaglianza ovvia è $BC = BA + AC \to -CB = -AB + AC \to AB = AC + CB$

Altre osservazioni

Sia A un punto dell'asse x; allora avremo
$x_A = OA$ (misura relativa di segmento orientato)





Analogamente, se B è un punto sull'asse y, avremo
$y_B = OB$
(misura relativa di segmento orientato)

L'identità di Chasles è preziosa perché permette di effettuare alcune dimostrazioni importanti "in un colpo solo", in termini del tutto generali, **senza dover ricorrere a laboriose distinzioni di casi**.

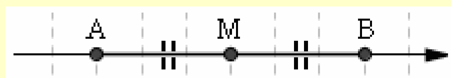
Dimostrazione della formula per la distanza fra due punti sull'asse *x*

Scriviamo innanzitutto $AB = AO + OB$
(O indica l'origine, le scritture AB, AO, OB vanno "lette" come misure relative di segmenti orientati).
Abbiamo scritto, coi tre punti A, B e O, l'identità di Chasles, e sappiamo quindi che
l'uguaglianza è valida qualunque sia la posizione del punto O rispetto ai due punti A, B !!!
Ma dalla relazione scritta segue $AB = -OA + OB = -x_A + x_B = x_B - x_A$ (vedi "altre osservazioni")
e ciò significa che la misura RELATIVA di un segmento orientato, giacente sull'asse x,
è data dalla differenza fra l'ascissa del secondo punto (quello al quale "arriva" il segmento)
e l'ascissa del primo punto (quello dal quale "parte" il segmento).

Se ora consideriamo la misura ASSOLUTA del segmento AB (= la misura di AB pensato come *non* orientato),
questa misura (che è poi la distanza d(A,B) tra i due punti)
sarà il valore assoluto della misura relativa di AB, pensato orientato; avremo quindi
$d(A,B) = |AB| = |x_B - x_A|$ c.v.d.

Dim. della formula per il punto medio di un segmento giacente sull'asse *x* (analogo discorso per l'asse *y*)

Si ha $AM = MB$ (misure relative di segmenti orientati; il bello è che *l'uguaglianza vale tanto nella situazione in figura, quanto con A, B scambiati di posizione*!).



Ma da $AM = MB$ segue (ricordiamo quanto dimostrato poc'anzi sulla misura relativa di un segmento orientato, giacente sull'asse x: essa si calcola sottraendo dall'ascissa del secondo punto, l'ascissa del primo punto):

$$x_M - x_A = x_B - x_M \to 2x_M = x_A + x_B \to x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{c.v.d.}$$

DIVIDERE UN SEGMENTO IN PARTI PROPORZIONALI A DUE NUMERI DATI

Innanzitutto, cosa vuol dire?
Facciamo un esempio.

Se è richiesto di **dividere un segmento lungo 40 cm in due parti che stiano fra loro come 2:3**, allora si richiede di determinare le parti *x*, *y* in modo che

- valga la proporzione
  $x : y = 2 : 3$ (o, il che è lo stesso, permutando i medi, $x : 2 = y : 3$),
- e sia, naturalmente,
  $x + y = 40$.

In pratica, il segmento dev'essere spezzato in due tronconi che "pesino" 2*u* e 3*u* rispettivamente, essendo *u* un segmentino che dunque dovrà essere la $2+3=5^a$ parte del segmento dato.
Ma allora si tratterà di fare i 2/5 e rispettivamente i 3/5 del segmento stesso!

$$x = \frac{2}{5}\cdot 40 = 16 \quad \text{e} \quad y = \frac{3}{5}\cdot 40 = 24.$$

Dividere un segmento s in due parti che stiano fra loro come a:b (a, b interi >0) significa spezzare s in modo che

- **valga la proporzione**
  $\boldsymbol{x : y = \mathrm{a} : \mathrm{b}}$ **o, il che è lo stesso (permutando i medi)** $\boldsymbol{x : \mathrm{a} = y : \mathrm{b}}$
- **e sia, naturalmente,**
  $\boldsymbol{x + y = \mathrm{s}}$.

Con la proprietà del "comporre gli antecedenti e i conseguenti" applicata alla proporzione scritta nella seconda forma otteniamo

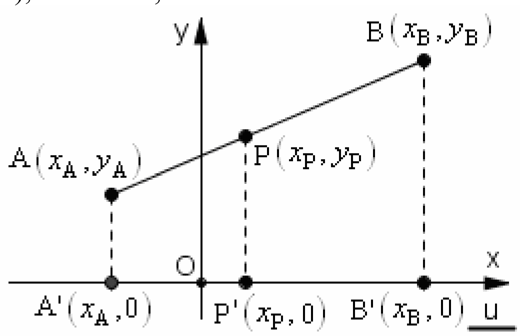
$$\underbrace{(x+y)}_{\mathrm{s}} : (\mathrm{a}+\mathrm{b}) = \left\langle \begin{matrix} x : \mathrm{a} \\ y : \mathrm{b} \end{matrix} \right.$$

ossia:

$$\frac{x}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}} \to \boxed{\boldsymbol{x = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\mathrm{s}}}; \qquad \frac{y}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}} \to \boxed{\boldsymbol{y = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\mathrm{s}}}$$

In Geometria Analitica, il problema viene di solito interpretato in questo senso:
sono date le coordinate degli estremi di un segmento AB; trovare le coordinate di quel punto P del segmento, che lo divide in due parti per cui $AP : PB = \mathrm{a} : \mathrm{b}$ (o $AP : \mathrm{a} = PB : \mathrm{b}$), essendo a, b due interi >0 fissati.

Se si proiettano A, P, B sull'asse *x* (vedi figura) il Teorema di Talete ci dice che $AP : PB = A'P' : P'B'$ e quindi
$A'P' : P'B' = \mathrm{a} : \mathrm{b}$ o anche (permutando i medi)
$A'P' : \mathrm{a} = P'B' : \mathrm{b}$
dove possiamo pensare $A'P'$, $P'B'$ come segmenti orientati (la proporzione resterebbe valida anche qualora essi fossero entrambi negativi), per cui avremo:

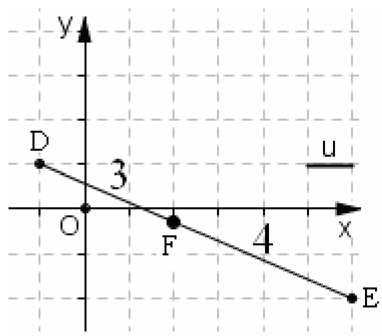


$$(x_P - x_A) : \mathrm{a} = (x_B - x_P) : \mathrm{b} \quad \text{e dunque}$$
$$(\cancel{x_P} - x_A + x_B - \cancel{x_P}) : (\mathrm{a}+\mathrm{b}) = (x_P - x_A) : \mathrm{a}$$

$$\frac{x_P - x_A}{\mathrm{a}} = \frac{x_B - x_A}{\mathrm{a}+\mathrm{b}} \to x_P - x_A = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}(x_B - x_A) \to \boxed{x_P = x_A + \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}(x_B - x_A)}$$

Analogamente, proiettando sull'asse *y*, si otterrebbe la formula $\boxed{y_P = y_A + \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}(y_B - y_A)}$

ESEMPIO Che coordinate ha il punto F, che divide (vedi figura) il segmento di estremi $D(-1,1)$; $E(6,-2)$ in parti che stanno fra loro come 3:4?

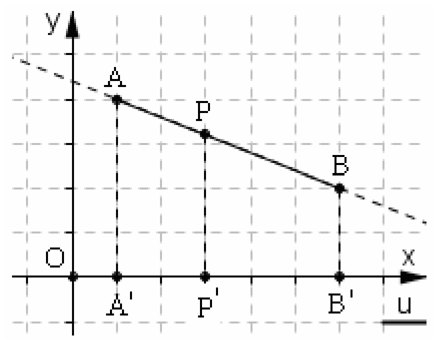


$$x_F = x_D + \frac{3}{3+4}(x_E - x_D) = -1 + \frac{3}{7}(6-(-1)) = 2$$
$$y_F = y_D + \frac{3}{3+4}(y_E - y_D) = 1 + \frac{3}{7}(-2-1) = -\frac{2}{7}$$

INDIVIDUARE SULLA RETTA AB UN PUNTO P TALE CHE SI ABBIA $AP = k \cdot AB$

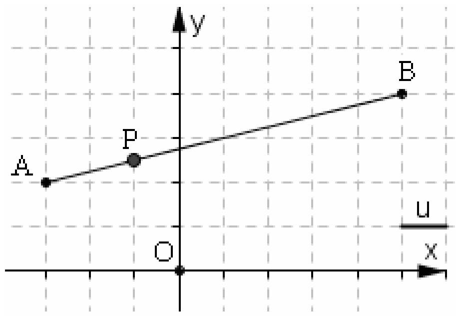
Si può procedere come per il problema precedente, attraverso le proiezioni A', P', B' sull'asse x $\left(\frac{AP}{AB} = k \to \frac{A'P'}{A'B'} = k \quad \text{per il Teorema di Talete} \right)$ e poi quelle sull'asse y, considerando segmenti orientati.

Si trova $\boxed{x_P =} \; x_A + k(x_B - x_A)$; $\boxed{y_P =} \; y_A + k(y_B - y_A)$



Il problema presente, se si desidera che il punto P appartenga al segmento, avrà soluzione solo quando $0 \le k \le 1$; se invece accettiamo che P, pur dovendo stare sulla retta AB, possa anche essere esterno al segmento, allora sarà ammissibile qualunque valore di k e, in particolare, dare a k un valore <0 porterà a trovare il punto P esternamente al segmento e dalla parte di A (qui anche la retta AB è pensata orientata, da A verso B); dare a k un valore >1 porterà a trovare il punto P esternamente al segmento e dalla parte di B.

ESEMPIO



Sono dati i due punti $A(-3,2)$; $B(5,4)$;

determinare su AB un punto P tale che sia $AP = \frac{1}{4}AB$.

$$x_P = x_A + \frac{1}{4}(x_B - x_A) = -3 + \frac{1}{4}(5-(-3)) = -3 + \frac{1}{4} \cdot 8 = -3 + 2 = -1$$

$$y_P = y_A + \frac{1}{4}(y_B - y_A) = 2 + \frac{1}{4}(4-2) = 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

ALTRO ESEMPIO

Sempre con riferimento ai punti precedenti, determinare sulla retta AB un punto Q tale che sia $AQ = -\frac{1}{4}AB$.

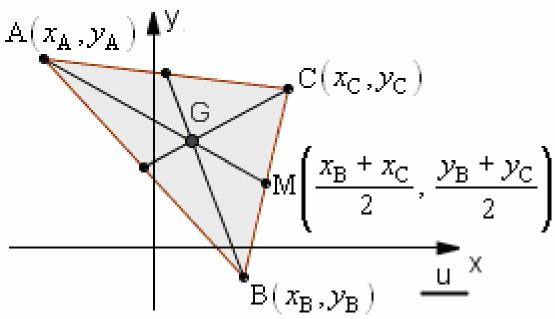
$$x_Q = x_A - \frac{1}{4}(x_B - x_A) = -3 - \frac{1}{4}(5-(-3)) = -3 - \frac{1}{4} \cdot 8 = -3 - 2 = -5$$

$$y_Q = y_A - \frac{1}{4}(y_B - y_A) = 2 - \frac{1}{4}(4-2) = 2 - \frac{1}{4} \cdot 2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

e il punto $Q\left(-5, \frac{3}{2}\right)$ si trova sul prolungamento di AB dalla parte di A.

COORDINATE DEL BARICENTRO (= punto di incontro delle mediane) DI UN TRIANGOLO

Una proprietà nota del baricentro di un triangolo, è che esso
divide ciascuna mediana in due parti, tali che quella contenente il vertice è doppia dell'altra (quindi, è i $\frac{2}{3}$ dell'intera mediana: $AG = \frac{2}{3}AM$).



Consideriamo allora la figura qui a fianco. Avremo

$$\boxed{x_G =} \; x_A + \frac{2}{3}(x_M - x_A) = x_A + \frac{2}{3}\left(\frac{x_B + x_C}{2} - x_A \right) =$$

$$= x_A + \frac{x_B + x_C}{3} - \frac{2}{3}x_A = \ldots \boxed{= \frac{x_A + x_B + x_C}{3}}$$

… e analogamente si procede per l'ordinata.

Coordinate del BARICENTRO G di un triangolo ABC:

$$\boxed{x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}}$$

ESEMPIO Il baricentro del triangolo ABC, con $A(1,1)$; $B(-1,2)$; $C(3,-3)$, ha coordinate $\left(\frac{1-1+3}{3}, \frac{1+2-3}{3} \right) = (1, 0)$. Disegna tu la figura!

7. ESERCIZI

SULLA DISTANZA FRA DUE PUNTI

1) Calcola le distanze fra le seguenti coppie di punti:

a) $A(0,2);\ B(6,10)$ b) $A(-8,3);\ B(7,-5)$ c) $A(0,-3);\ B(0,-7)$

d) $A(2,-1);\ B\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ e) $A(10,-1);\ B(6,2)$ f) $A(3,42);\ B(12,2)$

g) $A\left(-\frac{1}{6},-2\right);\ B\left(\frac{3}{2},2\right)$ h) $A(1,1);\ B(\pi,0)$ i) $O(0,0);\ P(a,b)$

2) Determina il perimetro del triangolo di vertici $A(1,-4);\ B(13,-9);\ C(1,0)$
3) Determina il perimetro del triangolo di vertici $D(-7,3);\ E(7,3);\ F(2,-9)$
4) Trova il perimetro di PQR, con $P(-4,2);\ Q(-1,-2);\ R(5,6)$ (il risultato conterrà un radicale)
5) Il triangolo di vertici $D(-3,3);\ E(0,-1);\ F(-7,0)$ è isoscele: dimostralo, e calcola la sua base.
6) Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-2,6);\ B(10,1);\ C(7,-3);\ D(-5,2)$ è un parallelogrammo, utilizzando esclusivamente la formula per la distanza fra due punti.
7) Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-2,2);\ B\left(0,\frac{7}{2}\right);\ C\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right);\ D\left(-\frac{1}{2},0\right)$ è un quadrato, utilizzando esclusivamente la formula per la distanza fra due punti.
8) Verifica che il triangolo di vertici $O(-2,-1);\ A(10,-10);\ B(22,6)$ è rettangolo utilizzando esclusivamente la formula per la distanza fra due punti.
9) Determina quel punto P dell'asse y che è equidistante da $A(4,-1)$ e da $B(3,-2)$ (indicazione: il generico punto dell'asse y ha coordinate $(0,y)$; il problema è perciò risolto dall'equazione …)
10) Determina quel punto P dell'asse x che è equidistante da $O(0,0)$ e da $Q\left(-\frac{4}{5},\frac{12}{5}\right)$ (indicazione: il generico punto dell'asse x è $(x,0)$; il problema è perciò risolto dall'equazione …)
11) Quale punto della retta $y=1-x$ è equidistante dall'origine e dal punto $A(4,2)$? Indicazione: un generico punto della retta $y=1-x$ ha coordinate $(x,1-x)$ …
12) Determina il centro e il raggio della circonferenza passante per i tre punti $A(0,2);\ B(1,-1);\ C(8,-2)$ (indicazione: il centro è quel punto P, di coordinate (x,y), tale che $PA=PB=PC$. Basterà perciò impostare le due equazioni $PA=PB$ e $PA=PC$ e porle a sistema …)

SUL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

13) Calcola le coordinate del punto medio del segmento AB, essendo

a) $A(3,5);\ B(-1,9)$ b) $A(-4,0);\ B(-3,0)$ c) $A(-2,-4);\ B(0,2)$

d) $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right);\ B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)$ e) $A(k,-3);\ B(1,-3)$ f) $A(a+b,\ a-b);\ B(a-b,\ b)$

g) $A(3.6,\ 0.4);\ B(1.4,\ -0.5)$ h) $A\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{3}\right);\ B\left(-\frac{1}{2},-1\right)$

14) Calcola le coordinate dei punti medi I, L, M, N dei lati del quadrilatero ABCD, essendo $A(-3,1);\ B(1,-5);\ C(5,7);\ D(1,7)$
Il quadrilatero che ha per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero qualsiasi è sempre un parallelogrammo: verificalo in questo caso particolare, constatando i lati opposti di ILMN sono a due a due uguali.
15) M è il punto medio di PQ, essendo $P(0,1);\ Q(-4,3)$. Che coordinate ha N, punto medio di PM?
16) Nell'esercizio 6 si è verificato che ABCD, con $A(-2,6);\ B(10,1);\ C(7,-3);\ D(-5,2)$, è un parallelogrammo; ma allora le sue diagonali dovrebbero tagliarsi scambievolmente per metà, vale a dire i loro punti medi dovrebbero coincidere. Verificalo.
17) Se $M(1,-1)$ è il punto medio del segmento AB e $A(-4,3)$, quali sono le coordinate di B?
18) Se $M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{4}\right)$ è il punto medio del segmento AB e $A\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$, quali sono le coordinate di B?
19) Trova le coordinate del punto R, simmetrico di $T(-4,2)$ rispetto a $S(-1,-3)$
20) Trova il quarto vertice del parallelogrammo che ha tre vertici in $A\left(-3,\frac{13}{2}\right);\ B(-2,4);\ C(3,2)$
21) Per quale valore di k il segmento di estremi $A(3,1);\ B(k,k)$ ha come punto medio il punto $(k-1,\ k-3)$?

SULL'EQUAZIONE DI UNA CURVA (FORMA ESPLICITA, FORMA IMPLICITA)

ESEMPI

- **Portare l'equazione $\boxed{8x-2y-1=0}$ in forma esplicita**

  Si tratta di isolare *y* a primo membro:

  $$8x-2y-1=0;\ -2y=-8x+1;\ 2y=8x-1;\ y=\frac{8x-1}{2};\ \boxed{y=4x-\frac{1}{2}}$$

- **Viceversa: Portare l'equazione $\boxed{y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{12}}$ in forma implicita**

  Portare tutto a 1° membro, in modo che il 2° membro sia 0; sarà bene mandare pure via i denominatori:

  $$y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{12};\ 12y=-9x+1\ (\textit{abbiamo moltiplicato per } 12);\ \boxed{9x+12y-1=0}$$

ESERCIZI

22) Porta le seguenti equazioni in forma esplicita:

a) $x+y-1=0$ b) $3x-y+4=0$ c) $x+4y-6=0$
d) $2x+3y=0$ e) $x-5y-10=0$ f) $4x-3y=2$
g) $y+x^2-x+6=0$ h) $x^2-2y-4x=0$ i) $xy+12=0$
j) $y^2-x^2=4$ k) $xy+2y-1=0$ l) $y^2+2y-x=0$ (*eq. di 2° grado*)

23) Porta le seguenti equazioni in forma implicita:

m) $y=-3x+8$ n) $y=x+2$ o) $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}$ p) $y=\frac{x-7}{2}$
q) $y=-\frac{4}{3}x$ r) $y=x^2+x$ s) $\frac{x}{y}=3$ t) $y=\sqrt{x}$

SULL'APPARTENENZA DI UN PUNTO A UNA CURVA

24) E' data la curva $C:\ x^2+y^2=25$.
Stabilire quali fra i punti seguenti vi appartengono: $A(-4,3);\ B(1,6);\ C(0,-5)$
25) E' data la curva di equazione $xy=6$.
Stabilire quali fra i punti seguenti vi appartengono: $P(4,\ 3/2);\ Q(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3});\ R(4,2)$
26) Per quale valore del parametro k il punto A(3,2) appartiene alla curva di equazione $(k-1)x+ky+8=0$?
27) Per quale valore di a la curva $x^2-y^2+2ax+3a-1=0$ passa per l'origine?
28) Determinare m in modo che il punto $P(m,\ m+1)$ appartenga alla retta $x+y-5=0$
29) Trovare i punti di ascissa –3 della curva $x^2+y^2=25$
30) Trovare il punto di ordinata 2 della retta $r:5x-y+1=0$

SULL'INTERSEZIONE DI DUE CURVE

31) Trova il punto d'intersezione delle due rette $r_1: y=x+3$ e $r_2: y=-2x+9$.
32) Determina i vertici del triangolo i cui lati sono le rette di equazioni: $y=2,\ y=4x+10,\ y=5-x$
33) In quale punto si tagliano le due rette $r_1: 2x-y-3=0$ e $r_2: 6x-3y-2=0$?
34) Trova i punti di intersezione fra: $C: x^2+y^2=25$ ed $r: x+3y+15=0$ (*sistema di grado sup. al* 1°)
35) Trova i punti comuni alla circonferenza $x^2+y^2=25$ e all'iperbole $xy=6$ (*sistema di grado sup. al* 1°)

SULLA DIVISIONE DI UN SEGMENTO IN PARTI, E SUL BARICENTRO DI UN TRIANGOLO

36) $A(1,1);\ B(9,5)$. Determina i punti P, Q, R, S, T che dividono il segmento AB, rispettivamente:
a) in parti proporzionali ai numeri 3 e 5 (P) b) in parti proporzionali ai numeri 3 e 2 (Q)
c) in modo che sia $AR=\frac{1}{3}RB$ d) in modo che sia $AS=\frac{1}{3}AB$ e) in modo che sia $AT=-2AB$
37) Determina il baricentro:
a) di ABC, con $A(3,2);\ B(10,-5);\ C(-1,-3)$ b) di DEF, con $D(-3,-2);\ E(-1,0);\ F(2,4)$
c) di ILM, con $I\left(\frac{1}{4},-\frac{5}{3}\right);\ L\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right);\ M\left(0,-\frac{1}{4}\right)$
38) Se due vertici di ABC sono $A(-3,4);\ B(0,2)$ e il baricentro è $G(1,3)$, che coordinate ha il vertice C?
39) Se un vertice di ABC è $A(3,-2)$ e il baricentro è $G(-1,4)$, che coordinate ha il punto medio M di BC?
40) Se un vertice del triangolo ABC è $A(5,5)$ e il baricentro è $G(-19,-5)$, quanto misura la mediana AM?

RISPOSTE

1) a) 10 b) 17 c) 4 d) 5/2 e) 5 f) 41 g) 13/3 h) $\sqrt{\pi^2-2\pi+2}\approx 2{,}36$ i) $\sqrt{a^2+b^2}$

2) 32 3) 42 4) $15+\sqrt{97}$ 5) In effetti, è $\overline{DE}=\overline{DF}=5$. *base* $=\overline{EF}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

6) Occorrerà controllare che i lati opposti siano a due a due uguali. E si trova $AB=DC=13$ e $AD=CB=5$.

7) Si deve verificare che i quattro lati sono uguali, e pure le diagonali sono uguali!
Si trova $AB=BC=CD=DA=5/2$, $AC=BD=\sqrt{\frac{50}{4}}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

8) Basta verificare che la somma dei quadrati di due lati uguaglia il quadrato del lato rimanente:
si potrà allora concludere che il triangolo è rettangolo per l'inverso del Teorema di Pitagora.

9) L'equazione è $\sqrt{(0-4)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(y+2)^2}$
e per mandar via le radici si eleveranno al quadrato entrambi i membri. Si trova $P(0,2)$.

10) Analogo al problema precedente. Si trova $P(-4,0)$.

11) Il punto è $P(4,-3)$. Il problema si risolve con l'equazione $\sqrt{(x-0)^2+(1-x-0)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(1-x-2)^2}$

12) Il centro è $(5,2)$, il raggio è 5. Il sistema risolvente è $\begin{cases}\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}\\ \sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-8)^2+(y+2)^2}\end{cases}$

13) a) $(1,7)$ b) $\left(-\frac{7}{2},0\right)$ c) $(-1,-1)$ d) $\left(\frac{3}{8},\frac{4}{15}\right)$ e) $\left(\frac{k+1}{2},-3\right)$ f) $\left(a,\frac{a}{2}\right)$ g) $(2.5,-0.05)$ h) $\left(-\frac{1}{8},-\frac{2}{3}\right)$

14) $(-1,-2)$; $(3,1)$; $(3,7)$; $(-1,4)$; due lati opposti di ILMN misurano 5 e gli altri due 6

15) $N\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ 16) In effetti, sia AC che BD hanno per punto medio $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$

17) $B(6,-5)$ 18) $B\left(\frac{7}{6},-1\right)$ 19) $R(2,-8)$ 20) $D\left(2,\frac{9}{2}\right)$

21) Per nessun valore di k: dovrebbe risultare simultaneamente sia $\frac{3+k}{2}=k-1$ che $\frac{1+k}{2}=k-3$,
ma le due equazioni hanno soluzioni diverse: non esiste un valore di k che le soddisfi entrambe.

22) a) $y=-x+1$ b) $y=3x+4$ c) $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$
d) $y=-\frac{2}{3}x$ e) $y=\frac{1}{5}x-2$ f) $y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$
g) $y=-x^2+x-6$ h) $y=\frac{1}{2}x^2-2x$ i) $y=-\frac{12}{x}$ (*la condizione $x\neq 0$ si può scrivere, ma a ben guardare è inutile: sapresti dire perché?*)
j) $y=\pm\sqrt{x^2+4}$ k) $y=\frac{1}{x+2}$ l) $y=-1\pm\sqrt{1+x}$

23) m) $3x+y-8=0$ n) $-x+y-2=0$ o $x-y+2=0$ o) $-5x+15y+3=0$ o $5x-15y-3=0$ p) $-x+2y+7=0$ o $x-2y-7=0$
q) $4x+3y=0$ r) $x^2+x-y=0$ s) $x-3y=0$, con $y\neq 0$ t) $x-y^2=0$, con $x\geq 0$, $y\geq 0$

24) A: sì, appartiene B: no C: sì 25) P: sì Q: sì R: no 26) $k=-1$ 27) $a=1/3$

28) $m=2$ 29) $(-3,-4)$; $(-3,4)$ 30) $(1/5,\,2)$ 31) $(2,\,5)$ 32) $(-2,2)$; $(3,2)$; $(-1,6)$

33) In nessun punto: sono parallele 34) $A(0,-5)$; $B(-3,-4)$

35) 4 intersezioni: $\left(\frac{\sqrt{37}\pm\sqrt{13}}{2},\frac{\sqrt{37}\mp\sqrt{13}}{2}\right)$; $\left(\frac{-\sqrt{37}\pm\sqrt{13}}{2},\frac{-\sqrt{37}\mp\sqrt{13}}{2}\right)$

36) $P\left(4,\frac{5}{2}\right)$ $Q\left(\frac{29}{5},\frac{17}{5}\right)$ $R(3,2)$ $S\left(\frac{11}{3},\frac{7}{3}\right)$ $T(-15,-7)$ 37) a) $(4,-2)$ b) $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ c) $\left(\frac{1}{36},-\frac{29}{36}\right)$

38) $C(6,3)$ 39) $M(-3,7)$ 40) $AM=39$

ALTRI ESERCIZI (risposte alla pagina successiva)

41) I punti (x, y) del piano cartesiano le cui coordinate soddisfano le due condizioni $-3 \le x \le 5,\ 5 \le y \le 11$, formano un rettangolo.
Qual è la sua area?
Che coordinate ha il punto di intersezione delle diagonali?

42) Che figura geometrica formano, sul piano cartesiano,
   a) i punti per i quali il valore assoluto dell'ordinata vale 1?
   b) i punti (x, y) per i quali $y > x$?
   c) i punti (x, y) per i quali $x^2 + y^2 > 25$?

43) E' possibile, sul piano cartesiano, trovare 3 punti A, B, C tali che $\mathrm{AB} = 32,\ \mathrm{BC} = 16,\ \mathrm{AC} = 8$?
E tre punti P, Q, R per cui $\mathrm{PQ} = 12,\ \mathrm{QR} = 8,\ \mathrm{RP} = 4$?

44) Quali sono i punti sull'asse *x* che "vedono" il segmento AB, con $\mathrm{A}(-3, 4)$ e $\mathrm{B}(2,1)$, sotto un angolo retto?
Puoi rispondere a questa domanda conoscendo esclusivamente
la formula per la distanza fra due punti
e il Teorema di Pitagora col suo inverso!
(*Equazione di* 2° *grado*)

45) Scrivi l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti dai due punti $\mathrm{O}(0, 0)$ e $\mathrm{A}(2, 2)$.
Verifica che i due punti di coordinate $(1,1)$ e $(0, 2)$
soddisfano entrambi, com'era prevedibile, l'equazione trovata.
Porta questa in forma esplicita e disegna la curva: vedrai che si tratta, ovviamente, di una retta.
In Geometria, che nome si dà a questa retta?

46) Se un punto P ha coordinate (x, y), qual è l'espressione, contenente *x* e/o *y*, che fornisce la sua distanza
   a) dall'origine
   b) dall'asse *x*
   c) dall'asse *y*?

47) Qual è il luogo dei punti che hanno la proprietà di essere equidistanti dall'origine O(0,0) e dall'asse *x*?
Puoi rispondere sia col ragionamento geometrico puro, senza pensare alle coordinate,
sia scrivendo l'equazione del luogo geometrico …

48) Considera il triangolo rettangolo OAB, con
$\mathrm{O}(0, 0);\ \mathrm{A}(a, 0);\ \mathrm{B}(0, b)$,
e verifica che la mediana relativa all'ipotenusa è uguale a metà dell'ipotenusa stessa.

RISPOSTE

41) Area = 48.
Le diagonali si intersecano in $(1,8)$.

42) a) Sono distribuiti su due rette, parallele all'asse *x*, di equazioni $y=1$ e $y=-1$ rispettivamente.
b) Un semipiano, privato della sua retta origine
c) $x^2+y^2>25$ equivale a $\sqrt{x^2+y^2}>5$.
Ma $\sqrt{x^2+y^2}$ è la distanza di (x,y) dall'origine.
Allora la figura è formata da tutti i punti del piano, tranne quelli del cerchio di centro O e raggio 5.

43) E' possibile, sul piano cartesiano, trovare 3 punti A, B, C tali che $AB=32,\ BC=16,\ AC=8$?
No, perché in un triangolo ciascun lato è sempre minore della somma degli altri due
("relazione triangolare"), mentre qui 32 *non* è <16+8.
Inoltre i tre punti non possono essere allineati,
perché in questo caso, fra i segmenti in gioco,
ce ne sarebbero due con somma uguale al terzo segmento:
ora, ciò coi nostri 3 segmenti non avviene.

E tre punti P, Q, R per cui $PQ=12,\ QR=8,\ RP=4$?
Sì. I tre punti saranno allineati, con R compreso fra P e Q.

44) Un punto P dell'asse *x* ha coordinate $P(x,0)$.
L'angolo $A\hat{P}B$ sarà retto se e solo se $PA^2+PB^2=AB^2$.
Si trova che i due punti hanno coordinate $(-2,\ 0)$ e $(1,\ 0)$.

45) Si considera il generico punto $P(x,y)$ del piano e si traduce in coordinate la condizione $PO=PA$.
Ci si libera dalle radici elevando al quadrato.
Si trova $y=-x+2$, retta che è l'*asse* del segmento AB.

46)
a) $\sqrt{x^2+y^2}$
b) $|y|$
c) $|x|$

47) Il luogo è … l'asse *y*.
Tutti, e soli, i punti dell'asse *y*, ossia tutti e soli i punti di ascissa nulla $(x=0)$
hanno la proprietà di essere equidistanti dall'origine e dall'asse *x*.

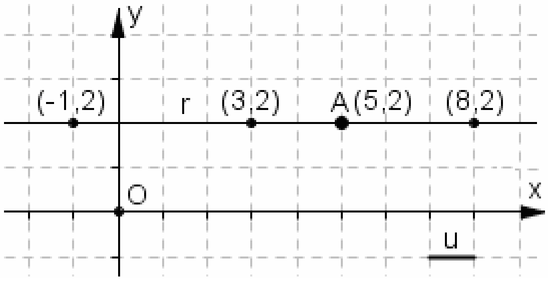
$$\sqrt{x^2+y^2}=|y|;\quad x^2+y^2=|y|^2\quad x^2\cancel{+y^2}=\cancel{y^2}\quad x^2=0\quad x=0.$$

48) In effetti, $AB=\sqrt{a^2+b^2}$ e $OM=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

8. L'EQUAZIONE DI UNA RETTA

❑ Equazione di una parallela all'asse *x*

Qual è l'equazione della retta, parallela all'asse *x*, passante per il punto A(5,2)?

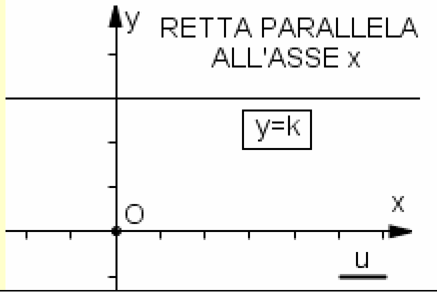


I punti della retta in questione sono
tutti e soli i punti del piano cartesiano,
che godono della proprietà di avere ordinata uguale a 2.

$$\mathrm{P}(x,y) \in r \;\leftrightarrow\; y=2$$

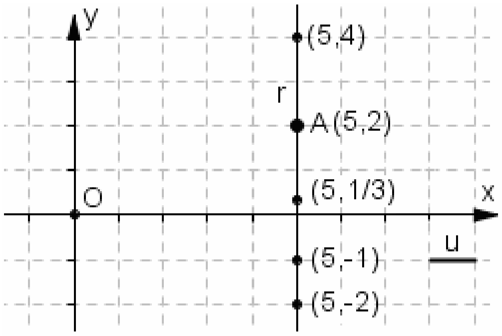
Quindi l'uguaglianza $\boxed{y=2}$
costituisce l'equazione della retta considerata.

In generale:
una $\boxed{\textbf{RETTA PARALLELA ALL'ASSE } x}$
ha equazione
$\boxed{y=k}$ **,**
essendo *k* l'ordinata costante di tutti i suoi punti,
o, se si preferisce,
l'ordinata di uno qualsiasi dei suoi punti.



❑ Equazione di una parallela all'asse *y*

Qual è l'equazione della retta, parallela all'asse *y*, passante per il punto A(5,2)?

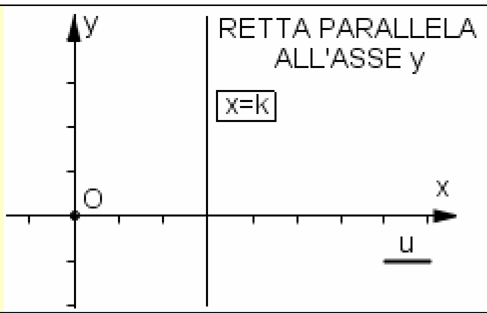


I punti della retta in questione sono
tutti e soli i punti del piano cartesiano,
che godono della proprietà di avere ascissa uguale a 5.

$$\mathrm{P}(x,y) \in r \;\leftrightarrow\; x=5$$

Quindi l'uguaglianza $\boxed{x=5}$
costituisce l'equazione della retta considerata.

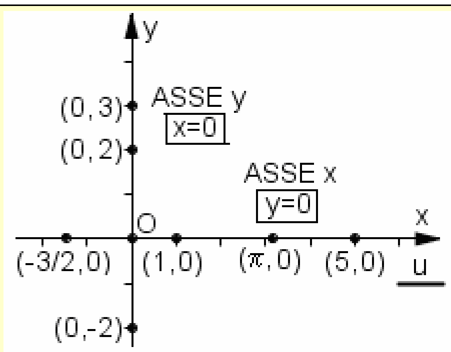
In generale:
una $\boxed{\textbf{RETTA PARALLELA ALL'ASSE } y}$
ha equazione
$\boxed{x=k}$ **,**
essendo *k* l'ascissa costante di tutti i suoi punti,
o, se si preferisce,
l'ascissa di uno qualsiasi dei suoi punti.



❑ Equazioni degli assi cartesiani

Anche i due assi cartesiani stessi possono essere visti come particolari rette collocate nel piano cartesiano.

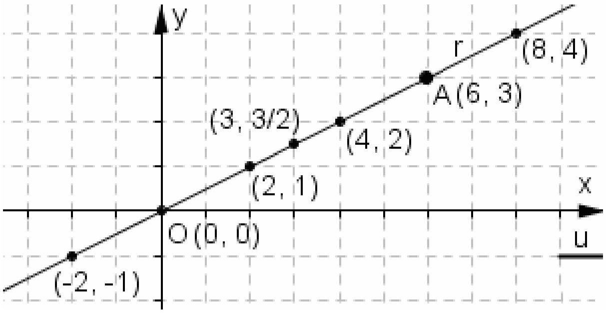
L'equazione dell' $\boxed{\textbf{ASSE } x}$ **,**
visto come particolare retta
inserita nel piano cartesiano,
è
$\boxed{y=0}$ **:**
infatti un punto $\mathrm{P}(x,y)$
appartiene all'asse *x*
se e solo se
la sua ordinata *y* è nulla.



L'equazione dell' $\boxed{\textbf{ASSE } y}$ **,**
visto come particolare retta
inserita nel piano cartesiano,
è
$\boxed{x=0}$ **:**
infatti un punto $\mathrm{P}(x,y)$
appartiene all'asse *y*
se e solo se
la sua ascissa *x* è nulla.

- **Retta passante per l'origine (e non coincidente né con l'asse *x*, né con l'asse *y*)**

Scrivere l'equazione della retta passante per $\mathrm{O}(0,0)$ e per $\mathrm{A}(6,3)$



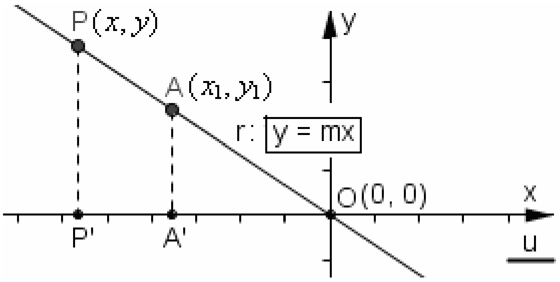
Nella figura, abbiamo segnato le coordinate di alcuni punti della retta in questione.
Si capisce chiaramente che appartengono alla retta considerata tutti e soli i punti $\mathrm{P}(x,y)$, la cui ordinata *y* è la metà dell'ascissa *x*.

$$\mathrm{P}(x,y)\in r \;\leftrightarrow\; y=\frac{1}{2}x$$

Pertanto la retta considerata ha equazione $\boxed{y=\frac{1}{2}x}$.

Generalizzando,
se si va a prendere la retta passante per l'origine e per un altro punto $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ (con $x_1 \neq 0,\; y_1 \neq 0$),

si può dimostrare che l'equazione di una tale retta è $\boxed{y=mx}$, avendo posto $\boxed{m=\frac{y_1}{x_1}}$. Infatti:



$\mathrm{P}(x,y)\in r \leftrightarrow$
$\leftrightarrow$ PP'O *simile con* AA'O,
e P *situato nello stesso quadrante di* A,
oppure nel quadrante opposto al vertice $\leftrightarrow$
$\leftrightarrow \mathrm{P'P}:\mathrm{OP'}=\mathrm{A'A}:\mathrm{OA'} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow y:x=y_1:x_1 \leftrightarrow \frac{y}{x}=\frac{y_1}{x_1} \leftrightarrow y=\frac{y_1}{x_1}x \leftrightarrow \boxed{y=mx}$

- Nella proporzione $\mathrm{P'P}:\mathrm{OP'}=\mathrm{A'A}:\mathrm{OA'}$ i segmenti in gioco vanno pensati come ORIENTATI e, quindi, le loro misure come RELATIVE:
  ad esempio, nella nostra figura, è $\mathrm{P'P}>0,\; \mathrm{OP'}<0,\; \mathrm{A'A}>0,\; \mathrm{OA'}<0$ (e risulta poi $m<0$).
- A ben guardare, la catena di biimplicazioni ha senso solo pensando il punto $\mathrm{P}(x,y)$ distinto dall'origine.
  Infatti, in caso contrario, il triangolo PP'O sarebbe ridotto ad un punto,
  e comunque ci ritroveremmo con dei segmenti di misura nulla a denominatore.
  Ma se consideriamo soltanto l'equazione alla quale siamo pervenuti alla fine, ossia la $y=mx$,
  vediamo che essa risulta soddisfatta *anche* dalle coordinate $x=0,\; y=0$ dell'origine.
- L'equazione $y=mx$ è stata ricavata supponendo $x_1 \neq 0,\; y_1 \neq 0$ e quindi anche $m=\frac{y_1}{x_1}\neq 0$.

  Tuttavia, l'equazione dell'asse *x*, che già sappiamo essere $y=0$, si può, volendo, pensare come ottenibile scrivendo $y=mx$ e poi ponendo $m=0$.
  Quindi, in definitiva, possiamo concludere che *qualsiasi* retta per l'origine ha equazione della forma $y=mx$, *tranne* la retta verticale per l'origine (ossia l'asse *y*),
  la cui equazione ($x=0$) NON si può porre sotto la forma $y=mx$.

L'equazione di una retta passante per $\mathrm{O}(0,0)$ e per $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ (e non coincidente con l'asse *y*) è

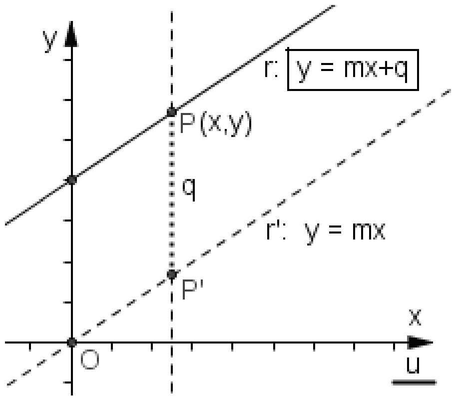
$\boxed{y=mx}$ **, avendo posto $m=\frac{y_1}{x_1}$.**

**In altre parole, presa una qualsivoglia retta per l'origine (non coincidente con l'asse *y*),
la sua equazione è sempre della forma $y=mx$
dove la costante m è il rapporto fra la *y* e la *x* di un punto qualsiasi (a parte l'origine) della retta stessa.**

In $y=mx$, la costante *m* è detta "COEFFICIENTE ANGOLARE" perché caratterizza **l'inclinazione della retta in questione**, ossia **l'angolo che questa forma con l'asse delle *x***. Basti pensare che ponendo $x=1$ si ottiene $y=m$, quindi alla retta considerata appartiene, in particolare, il punto $(1, m)$.
Perciò
- se $\boldsymbol{m>0}$ la retta sarà "**in salita**" (ovvio: se supponiamo, come solitamente è, che l'asse *x* sia orizzontale!)
- se $\boldsymbol{m<0}$ sarà "**in discesa**"
- e **quanto più grande è il valore assoluto di *m*, tanto più l'inclinazione della retta sarà accentuata**.

Nel caso $\boldsymbol{m=0}$, l'equazione diventa $y=0$ (asse *x*, inclinazione "**orizzontale**").

- **Retta (non parallela all'asse *y*) in posizione generica**



Data una retta *r* non parallela all'asse *y*, consideriamo la retta ausiliaria r', parallela ad *r* e passante per O.

Poiché la retta r' passa per l'origine, la sua equazione sarà della forma $y = mx$, con m costante opportuna.

Se ora consideriamo una coppia di punti $\mathrm{P} \in r$ e $\mathrm{P'} \in r'$, situati su di una stessa parallela all'asse *y*, possiamo osservare che la misura del segmento orientato $\mathrm{P'P}$ si mantiene, al variare di P, costante: la indicheremo con *q*.

I punti di *r* sono perciò tutti e soli quei punti del piano cartesiano, che si possono ottenere a partire da un punto di r', lasciandone inalterata l'ascissa ma incrementando (algebricamente) l'ordinata della costante *q*.

Ciò significa che, mentre il punto di ascissa *x* della retta r' ha ordinata mx, il punto di ascissa *x* della retta *r* ha ordinata

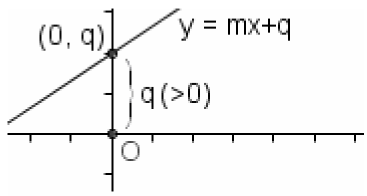
$$mx + q .$$

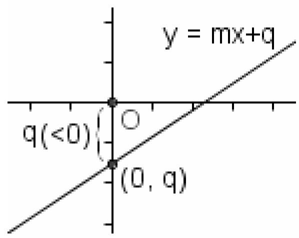
Perciò l'uguaglianza che è verificata dalle coordinate di tutti e soli i punti che appartengono alla retta *r*, è l'uguaglianza

$$y = mx + q$$

Concludendo,
l'equazione di una retta in posizione generica
(con esclusione però delle rette parallele all'asse *y*) è
$\boxed{y = mx + q}$ **, essendo *m*, *q* due costanti opportune.**

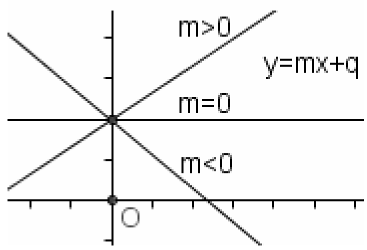
SIGNIFICATO DI q nell'equazione $y = mx + q$





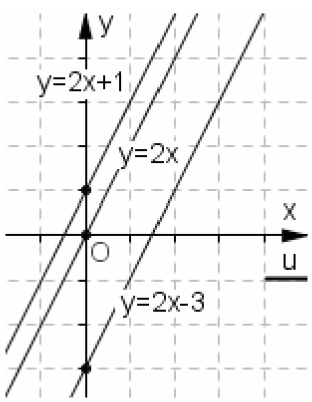
Nell'equazione $y = mx + q$, se si pone $x = 0$, si ottiene $y = q$;
quindi la retta $y = mx + q$ passa per il punto $(0, q)$.
Ciò comporta che data la retta di equazione $y = mx + q$,
***q* rappresenta l'ordinata del punto di quella retta, avente ascissa 0;**
in altre parole, *q* è l'ordinata del punto in cui la retta taglia l'asse delle *y*.
La costante *q* viene perciò detta "**ordinata all'origine**":
modo conciso per affermare che *q* è l'ordinata di quel punto della retta che sta sopra (se $q > 0$) o sotto (se $q < 0$) l'origine. Naturalmente, se $q = 0$ ritroviamo come caso particolare la retta passante per l'origine.

SIGNIFICATO DI m nell'equazione $y = mx + q$



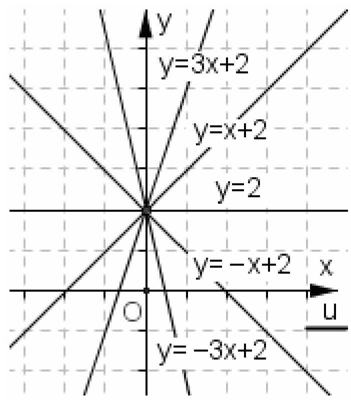
La costante *m*, che come abbiamo visto è il coefficiente angolare della retta r' passante per l'origine e parallela alla nostra retta $r:\ y = mx + q$,
viene ancora detta "**coefficiente angolare**" e conserva lo stesso significato che aveva in relazione ad una retta $y = mx$ passante per O:
individua dunque l'inclinazione della retta, con le solite corrispondenze:

- $m > 0 \to$ retta "in salita";
- $m < 0 \to$ retta "in discesa";
- $m = 0 \to$ retta "orizzontale" (voglio dire, parallela all'asse *x*);
- $|m|$ grande $\to$ inclinazione (salita o discesa) ripida.



←
Quindi rette fra loro **parallele**
hanno **ugual valore di *m***
(figura qui a sinistra) …

→
… e **rette che intersecano**
l'asse *y* nel medesimo punto
hanno ugual valore di *q*
(figura qui a destra).



9. RETTE ED EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

CASO GENERALE E CASI PARTICOLARI

Un'equazione della forma $y = mx$ si può pensare come caso particolare di $y = mx + q$ (con $q = 0$).

E d'altronde, anche il caso $y = k = costante$ (retta parallela all'asse x) può essere visto come caso particolare di $y = mx + q$ (con $m = 0$).

In definitiva, possiamo dire che
qualunque retta non parallela all'asse *y*
(passante o non passante per l'origine; parallela o non parallela all'asse *x*)
ha sempre un'equazione della forma $y = mx + q$.

Le sole rette che non sono rappresentabili con $y = mx + q$ sono quelle parallele all'asse y:
le equazioni di tali rette si contraddistinguono infatti per la forma $x = k$,
che non si può evidentemente ricondurre a $y = mx + q$.

Ma – ci chiediamo – sarà possibile dire che pure due equazioni della forma

$$y = mx + q$$

e

$$x = k$$

hanno qualcosa che le accomuna?

La risposta è affermativa: sono entrambe equazioni "di 1° grado"
(osserviamo che *m,* come d'altronde *q* e *k,* è un simbolo utilizzato per indicare una costante numerica, quindi "non fa grado", non contribuisce al grado).

Approfondiamo questo aspetto.
Se portiamo tutti i termini dalla stessa parte dell' "=", le due equazioni diventeranno rispettivamente

$$mx - y + q = 0$$

e

$$x - k = 0$$

dal che si vede che sono entrambe della forma

$$ax + by + c = 0$$

(polinomio di 1° grado nelle variabili x, y, uguagliato a 0).

Cosa possiamo dunque dire a questo punto?
Possiamo dire che

> **l'equazione di una qualsiasi retta nel piano cartesiano**
> **può essere sempre portata sotto la forma**
> $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$
> **(polinomio di 1° grado – si dice anche: "lineare" – nelle variabili *x, y,* uguagliato a 0).**

Il bello è che

> **VALE ANCHE IL VICEVERSA,**
> **cioè è vero pure che**
> **qualunque equazione della forma $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ avrà, come grafico corrispondente, una retta!**

Vediamolo per bene.
Prendiamo una qualsivoglia equazione della forma

$$ax + by + c = 0$$

- Prima di tutto, osserviamo che, se a e b fossero entrambi nulli, l'equazione si ridurrebbe a
  $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$
  e allora
  - ♪ nel caso fosse anche $c = 0$, sarebbe verificata dalla coppia (x, y) delle coordinate di *qualsiasi* punto del piano
    (in pratica, il luogo geometrico corrispondente sarebbe … tutto il piano!)
  - ♫ nel caso invece fosse $c \neq 0$, non sarebbe verificata dalla coppia (x, y) delle coordinate di *nessun* punto del piano
    (in pratica, il luogo geometrico corrispondente sarebbe … il luogo vuoto!)

  Possiamo perciò escludere il caso $a = b = 0$ dalla nostra attenzione, come troppo anomalo.

- Se ora nell'equazione considerata è $a=0$ (e $b\neq 0$) allora la nostra equazione si potrà scrivere come

  $by+c=0;\quad by=-c;\quad y=-\dfrac{c}{b}$

  e rappresenterà il luogo dei punti la cui ordinata è uguale a *quel* valore fissato
  (l'equazione non pone invece alcun vincolo all'ascissa),
  luogo che evidentemente consiste in una **retta** parallela all'asse *x*.

- Se nell'equazione considerata è $b=0$ (e $a\neq 0$) allora la nostra equazione si potrà scrivere come

  $ax+c=0;\quad ax=-c;\quad x=-\dfrac{c}{a}$

  e rappresenterà il luogo dei punti la cui ascissa è uguale a *quel* valore fissato
  (l'equazione non pone invece vincoli all'ordinata),
  luogo che evidentemente consiste in una **retta** parallela all'asse *y*.

- Supponiamo infine che sia $a\neq 0 \wedge b\neq 0$.
  Allora a partire da $ax+by+c=0$ possiamo fare i seguenti passaggi:

  $by=-ax-c;\quad y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

  Ora, questa equazione è della forma $y=mx+q$, con $m=-\dfrac{a}{b},\; q=-\dfrac{c}{b}$;
  noi precedentemente abbiamo fatto vedere che ogni retta non parallela all'asse *y*
  ha un'equazione di quella forma, ma … attenzione … ciò non equivale ad aver dimostrato anche
  il *viceversa*, ossia che *qualsiasi* equazione della forma $y=mx+q$ rappresenti *sempre* una retta!

  Insomma, resta aperta la questione:
  "ma se io, anziché partire da una data retta per scriverne poi l'equazione,
  scelgo a mio arbitrio due numeri *m* e *q*, e poi scrivo l'equazione $y=mx+q$,
  posso essere sicuro che il grafico corrispondente sarà sempre una retta?
  Oppure ci saranno dei valori, per la coppia di parametri *m*, *q*,
  tali che il grafico associato all'equazione $y=mx+q$ non sia una retta"?

  Un semplice ragionamento di tipo "dinamico" sarà sufficiente a sciogliere il dubbio.
  Fissiamo a nostro arbitrio i valori di *m* e di *q*.
  Per aiutarti a meglio fissare le idee, farò ora un caso particolare,
  ma la possibilità di generalizzare ti apparirà alla fine del tutto evidente: prenderò $m=1000,\; q=-71$.
  Posso esser certo che l'equazione $y=1000x-71$ ha come grafico una retta?
  Sì, perché con l'immaginazione io potrei, ad es., partire da una qualunque retta passante per l'origine, poi cambiarne l'inclinazione in modo tale che, qualora se ne scrivesse l'equazione, il suo coeff. angolare venga ad essere esattamente 1000 (siccome il coeff. ang. *m* di una retta per O coincide, come si è visto, con l'ordinata del punto di ascissa 1, mi basterà far sì che la retta per O attraversi il punto $(1,1000)$)
  e infine abbassarla, sempre conservando l'inclinazione stabilita, fino a che l'ordinata all'origine diventi uguale a -71.
  La particolare retta cui sarò pervenuto in questo modo, avrà come equazione proprio $y=1000x-71$;
  quindi, a posteriori, posso dire che l'equazione $y=1000x-71$ ha come grafico una retta.

Riassumiamo e perfezioniamo.

Ogni RETTA ha un'equazione che è "DI PRIMO GRADO in *x, y*",
ossia un'equazione che è esprimibile sotto la forma $ax+by+c=0$;

e VICEVERSA, ogni equazione "DI PRIMO GRADO in *x, y*",
ossia esprimibile sotto la forma $ax+by+c=0$, ha come grafico una RETTA.

Questo è il motivo per cui in matematica
anziché dire "DI 1° GRADO" si può dire anche "LINEARE".
Osserviamo che in un'equazione lineare $ax+by+c=0$ i coefficienti *a, b, c*
SONO DETERMINATI "A MENO DI UNA COSTANTE DI PROPORZIONALITÀ",
nel senso che, se anche li si moltiplicasse tutti e tre per uno stesso numero reale non nullo,
l'equazione sostanzialmente non cambierebbe, perché sarebbe verificata sempre dalle
stesse coppie $(x,\,y)$ di prima, quindi la retta corrispondente sarebbe esattamente la stessa.

Ad esempio, le diverse equazioni

$$2x-6y+5=0;\quad 4x-12y+10=0;\quad 6x-18y+15=0;\quad x-3y+\frac{5}{2}=0;\quad 2x\sqrt{7}-6y\sqrt{7}+5\sqrt{7}=0;\ \ldots$$

rappresentano TUTTE LA MEDESIMA RETTA.

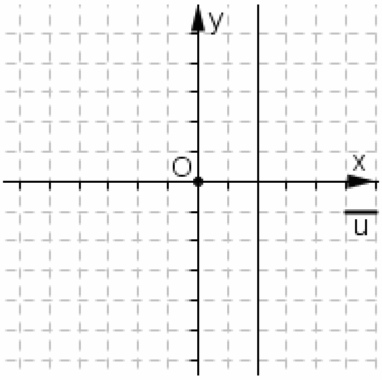
10. ESEMPI ed ESERCIZI (LE RISPOSTE AI QUESITI SONO ALLA FINE DELLA RASSEGNA)

1) Disegna (se vuoi, puoi anche utilizzare un unico riferimento cartesiano!) le rette di equazioni:

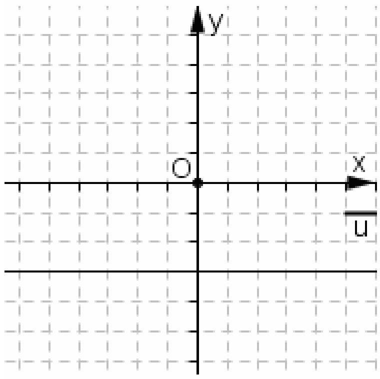
a) $x=4$ b) $y=4$ c) $x=-4$ d) $y=-4$ e) $x=0$ f) $y=0$ g) $y=\frac{1}{2}$ h) $3y+4=0$

2) Scrivi le equazioni delle rette qui sotto raffigurate:

a)



b)



3) Considera il punto $\mathrm{A}(k+1,\ 2k-3)$, dove k è un parametro.

I) Disegna la posizione che il punto A assume:

per $k=3$; per $k=2$; per $k=1$; per $k=\frac{1}{2}$; per $k=0$; per $k=-1$; per $k=-2$; per $k=-3$

II) Per quale valore del parametro k il punto $\mathrm{A}(k+1,\ 2k-3)$:

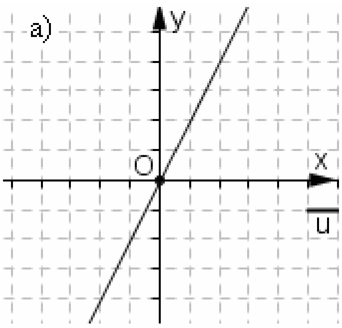
a) appartiene alla retta di equazione $x=4$?
b) appartiene alla retta di equazione $y=-4$?
c) appartiene all'asse *x*?
d) appartiene all'asse *y*?
e) ha distanza dall'origine uguale a 5?
f) coincide con l'origine?

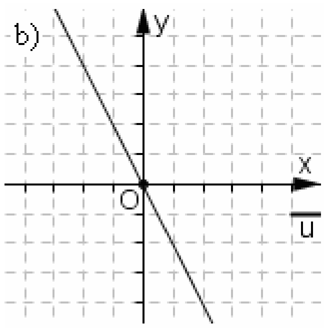
4) Dato il punto $\mathrm{P}(x,y)$, scrivi l'espressione, contenente *x* e/o *y*, che fornisce la distanza (assoluta) di P:
a) dall'origine b) dall'asse *x* c) dall'asse *y* d) dalla retta di eq. $y=4$ e) dalla retta di eq. $x=4$

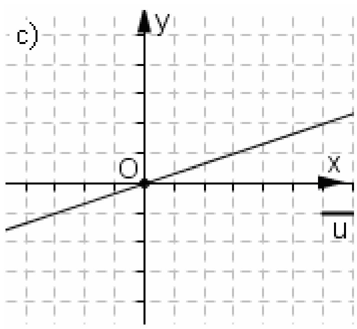
5) Disegna (puoi utilizzare un unico riferimento cartesiano) le rette di equazioni:

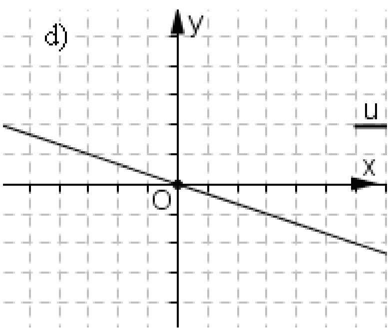
a) $y=3x$ b) $y=4x$ c) $y=-4x$ d) $y=\frac{1}{4}x$ e) $y=-\frac{1}{4}x$ f) $y=x$ g) $y=-x$ h) $5x+y=0$

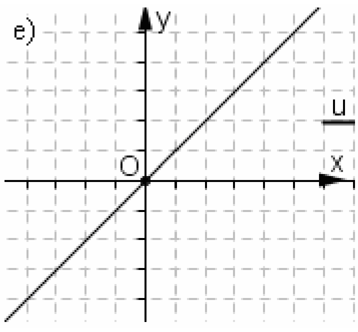
6) Scrivi le equazioni delle rette qui sotto raffigurate:

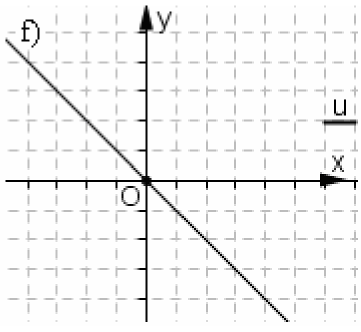












7) Se un punto P ha coordinate (x,y), che coordinate avrà il punto simmetrico di P rispetto:
a) all'origine? b) alla bisettrice del 1° e 3° quadrante? c) alla bisettrice del 2° e 4° quadrante?

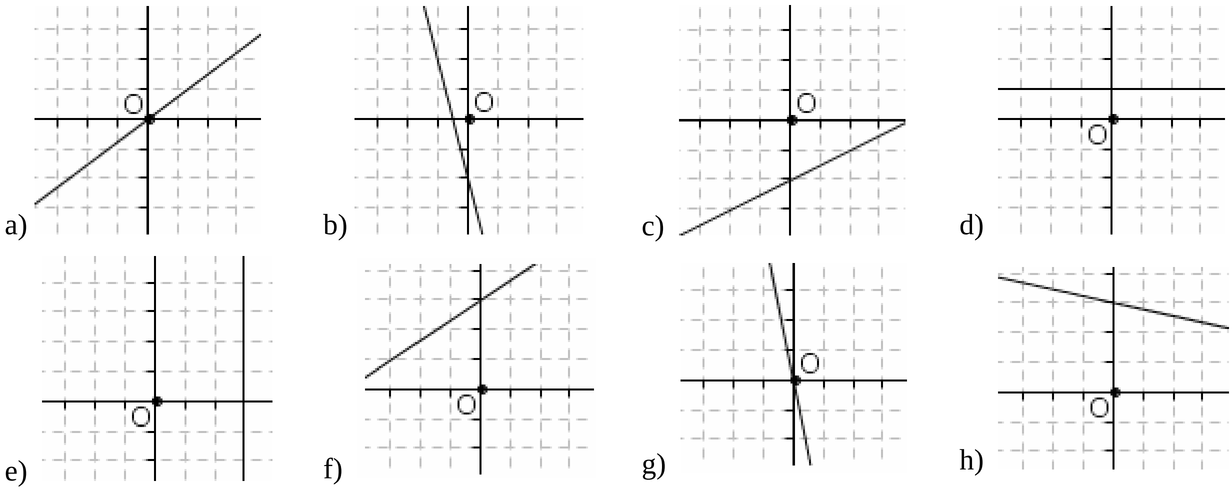
8) Disegna le rette di equazioni:

a) $y = 2x + 1$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = -2x + 3$ d) $y = -2x - 3$ e) $y = x + 4$ f) $x + y + 4 = 0$

g) $y = 4x + 1$ h) $y = 4x - 1$ i) $y = \frac{1}{4}x + 2$ l) $y = -\frac{1}{4}x - 2$ m) $y = 5x - 5$ n) $3x - 5y + 1 = 0$

9) Fra le rette qui sotto rappresentate, stabilisci quali sono quelle che hanno

I) $m > 0$ II) $m < 0$ III) $m = 0$ IV) $q > 0$ V) $q < 0$ VI) $q = 0$



10) E' data una retta di equazione $y = 3x + q$. Determinare q supponendo che la retta passi:

a) per l'origine b) per il punto $A(1,1)$ c) per il punto $B(4,6)$ d) per il punto $C\left(-\frac{1}{2},1\right)$

11) E' data una retta di equazione $y = mx + 3$. Determinare m supponendo che la retta:

a) passi per l'origine b) passi per il punto $D(1,1)$ c) passi per il punto $E(5,4)$ d) passi per $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

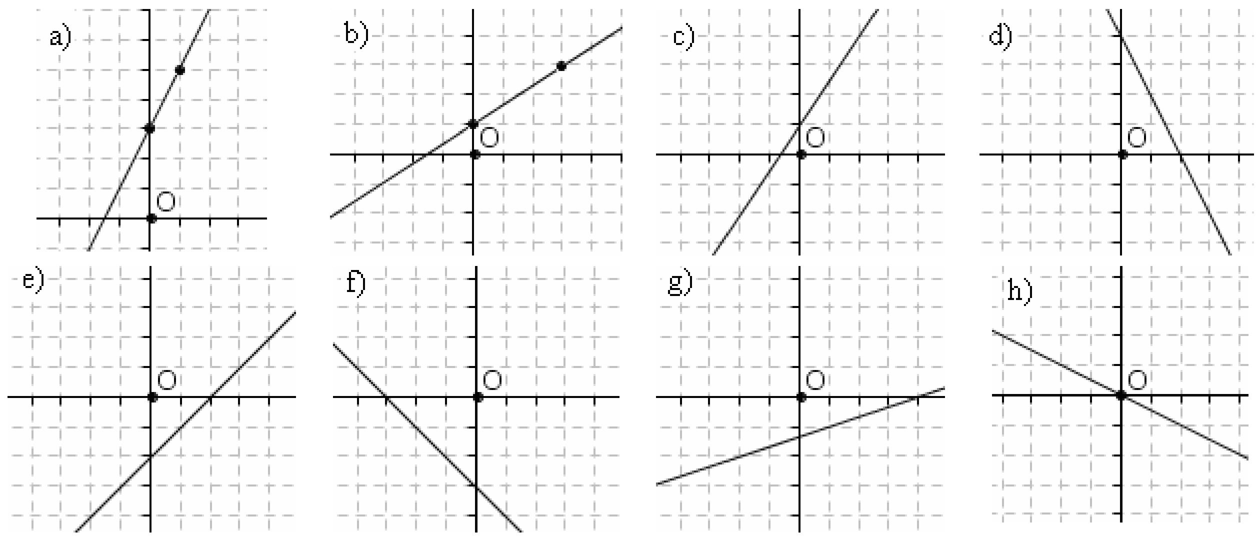
e) sia parallela alla retta di equazione $y = 4x$ f) sia parallela all'asse delle ascisse.

12) E' data una retta di equazione $y = mx + q$. Determinare m e q supponendo che la retta passi:

a) per $A(1,1)$ e per $B(2,3)$ b) per $A(-1,3)$ e per $B(3,-1)$ c) per $A(-3,-1)$ e per $B(1,2)$

d) per $A(-2,1)$ e per $B(4,-2)$ e) per $A(-5,-2)$ e per $B(3,-1)$ f) per $A(-4,3)$ e per $B(-4,1)$

13) Scrivi le equaz. delle rette seguenti (puoi scegliere due punti sul grafico e operare come nell'es. precedente):



14) Trova algebricamente il punto d'intersezione delle seguenti coppie di rette, poi disegnale per controllare:

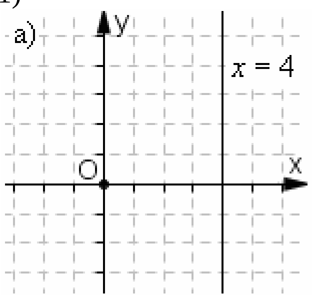
a) $r: y = x + 1,\ s: y = 2x + 4$ b) $r: y = 4x - 3,\ s: y = x$ c) $r: y = 4,\ s: 3x - y = 0$

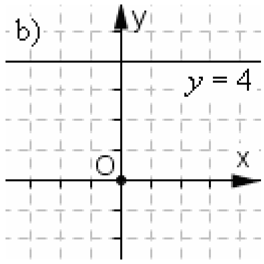
d) $r: y = -\frac{1}{2}x + 2,\ s: y = -\frac{1}{3}x + 3$ e) $r: y = -3x + 2,\ s: asse\ x$ f) $r: y = 14x + 7,\ s: y = -6x + 7$

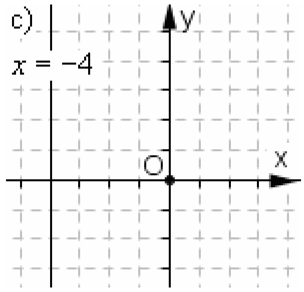
15) Cos'hanno in comune le due rette di equazioni $r: 15x - 5y - 30 = 0,\ s: 6x - 2y - 12 = 0$?

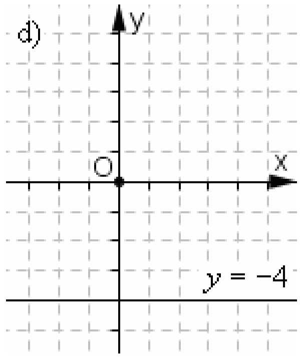
RISPOSTE

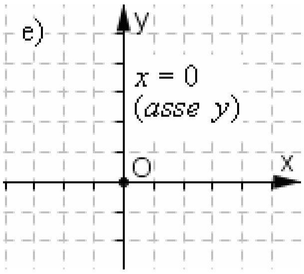
1)

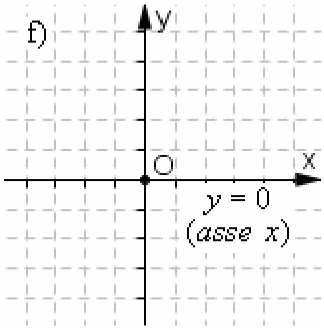


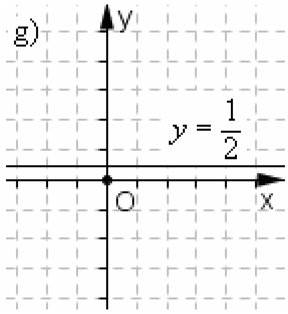


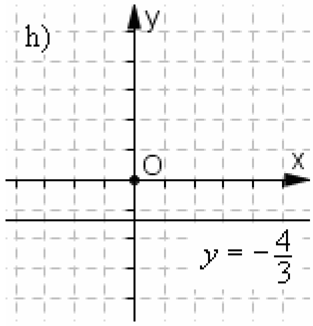








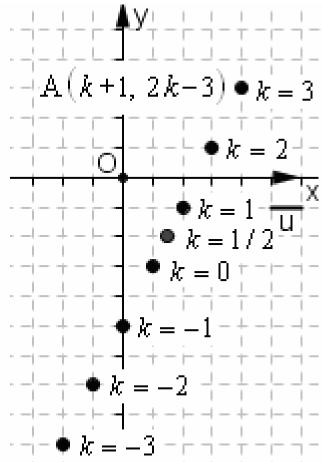




$$3y+4=0$$
$$y=-\frac{4}{3}$$
$$-\frac{4}{3}=-\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=-1-\frac{1}{3}$$

2) a) $x=2$ b) $y=-3$

3)



I) (vedi figura)
Le varie posizioni di $A(k+1,\ 2k-3)$
sembrano distribuite su di una retta.
Sarà proprio così?
Sì, perché se un punto ha come coordinate

$$x=k+1$$
$$y=2k-3$$

allora, per ogni valore di k, si ha

$$k=x-1$$
$$y=2(x-1)-3;\ \boxed{y=2x-5}$$

per cui il punto starà sulla retta
di equazione, appunto, $y=2x-5$

II) a) Se $k+1=4$, quindi per $k=3$ b) Per $k=-\frac{1}{2}$ c) Per $k=\frac{3}{2}$ d) Per $k=-1$

e) Se $\sqrt{(k+1)^2+(2k-3)^2}=5;\ \ (k+1)^2+(2k-3)^2=25;$ (*equazione di* $2°$ *grado*) $k=-1 \vee k=3$

f) Non può coincidere con l'origine, per nessun valore di k.

Infatti il sistema $\begin{cases} k+1=0 \\ 2k-3=0 \end{cases}$ è impossibile. D'altronde, la retta $y=2x-5$ non passa per l'origine.

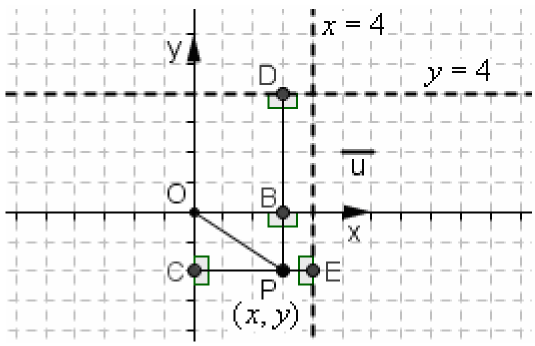
4) a) $PO=\sqrt{x^2+y^2}=$ *distanza dall'origine*

b) $PB=|y|=$ *distanza da asse* x

c) $PC=|x|=$ *distanza da asse* y

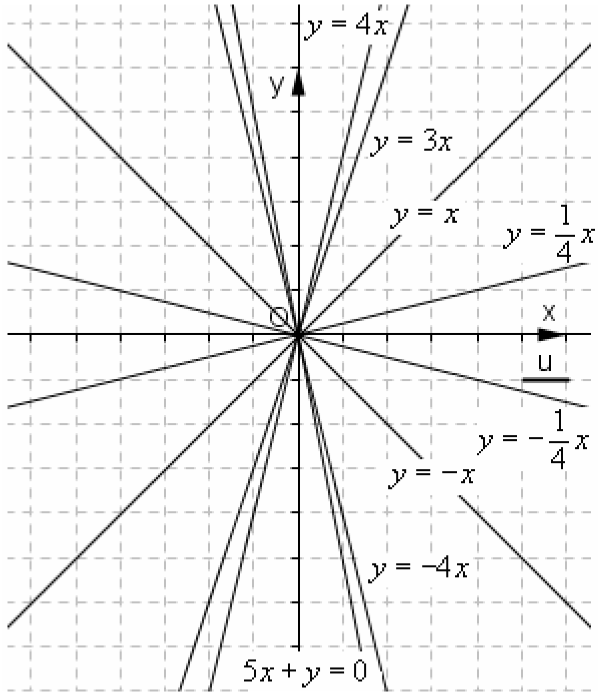
d) $PD=|y-4|=$ *distanza da retta* $y=4$

e) $PE=|x-4|=$ *distanza da retta* $x=4$



Immagina di spostare P portandolo in diverse posizioni
nel piano cartesiano e in diversi quadranti:
ti renderai conto che le stanghette
di valore assoluto ci vogliono proprio.

5)



6)

Sono tutte rette non verticali per l'origine,
quindi la loro equazione sarà della forma $y = mx$;
si tratta solo di determinare, caso per caso,
il coefficiente angolare m !

Se ricordiamo che $m = \frac{y}{x}$,
ossia che m è uguale al rapporto
fra l'ordinata e l'ascissa
di un punto qualsiasi della retta in esame,
avremo:

a) $y = 2x$
b) $y = -2x$
c) $y = \frac{1}{3}x$
d) $y = -\frac{1}{3}x$
e) $y = x$
f) $y = -x$

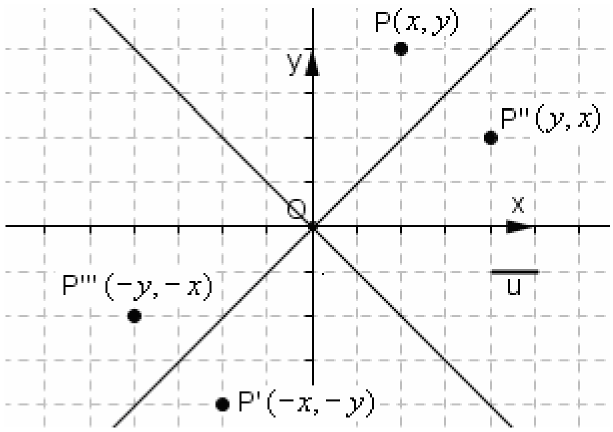
7)

Punto $P(x, y)$

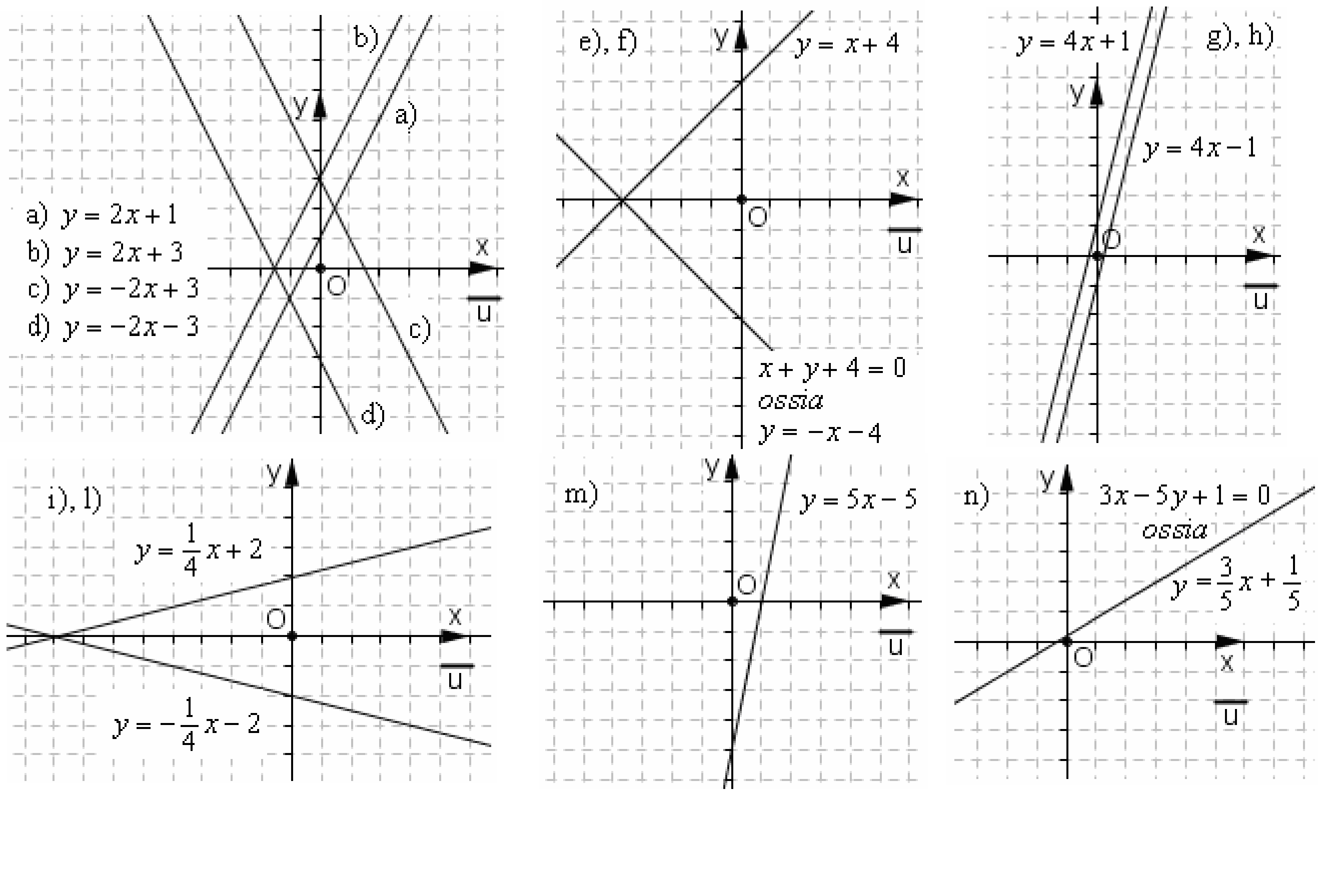
a) Simmetrico rispetto all'origine:
$P'(-x, -y)$

b) Simmetrico rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante:
$P''(y, x)$

c) Simmetrico rispetto alla bisettrice del 3° e 4° quadrante:
$P'''(-y, -x)$



8)



9) I) $m > 0$: a, c, f II) $m < 0$: b, g, h III) $m = 0$: d
IV) $q > 0$: d, f, h V) $q < 0$: b, c VI) $q = 0$: a, g

10) E' data una retta di equazione $y = 3x + q$.
Determinare q supponendo che la retta passi per un punto assegnato.

a) Per l'origine. Immediatamente: $q = 0$

b) Per il punto $\mathrm{A}(1,1)$

Allo scopo di determinare q, basta "porre la condizione di appartenenza del punto $(1,1)$", sostituendo le sue coordinate $(1,1)$ al posto di (x, y) nell'equazione:

$$1 = 3 \cdot 1 + q; \quad q = -2$$

c) Per il punto $\mathrm{B}(4,6)$ $q = -6$

d) Per il punto $\mathrm{C}\left(-\frac{1}{2},1\right)$ $q = \frac{5}{2}$

11) E' data una retta di eq. $y = mx + 3$. Determinare m supponendo che la retta passi per un punto assegnato.

Si procede ponendo la condizione di appartenenza del punto, come per il quesito precedente.

Si trova:

a) impossibile, per nessun valore di m la retta data può passare per l'origine!

b) $m = -2$ c) $m = 1/5$ d) $m = -4/3$

e) due rette non verticali sono parallele se hanno lo stesso coeff. angolare: $m = 4$ f) $m = 0$

12) **E' data una retta di equazione $y = mx + q$.**
Determinare m e q supponendo che la retta passi per due punti A, B assegnati.

a) Per $\mathrm{A}(1,1)$ e per $\mathrm{B}(2,3)$

Successivamente, impareremo una formula apposita
per scrivere l'equazione della retta passante per due punti fissati.
Per ora, possiamo procedere nel modo seguente:
scriveremo le due condizioni di appartenenza di A e di B rispettivamente, ponendole a sistema;
otterremo dunque un sistema di due equazioni nelle due incognite m, q.
Nel nostro caso il sistema sarà:

$$\begin{cases} 1 = m \cdot 1 + q \\ 3 = m \cdot 2 + q \end{cases} \quad ossia \quad \begin{cases} m + q = 1 \\ 2m + q = 3 \end{cases}$$

Si trova: $\begin{cases} m = 2 \\ q = -1 \end{cases}$ per cui la retta cercata è $y = 2x - 1$

b) $m = -1, q = 2$ c) $m = \frac{3}{4}, q = \frac{5}{4}$ d) $m = -\frac{1}{2}, q = 0$ e) $m = \frac{1}{8}, q = -\frac{11}{8}$ f) *impossibile*

13) a) $y = 2x + 3$ b) $y = \frac{2}{3}x + 1$ c) $y = \frac{3}{2}x + 1$ d) $y = 4 - 2x$

e) $y = x - 2$ f) $y = -x - 3$ g) $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ h) $y = -\frac{1}{2}x$

14) **Trova algebricamente il punto d'intersezione delle seguenti coppie di rette.**

Come sappiamo, per trovare i punti di intersezione fra due curve nel piano cartesiano si pongono le loro due equazioni a sistema, e si risolve quest'ultimo.

a) $r: y = x + 1,\ s: y = 2x + 4$ $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \dots \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$ $r \cap s: (-3, -2)$

b) $(1,1)$ c) $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ d) $(-6,5)$ e) $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ f) $(0,7)$

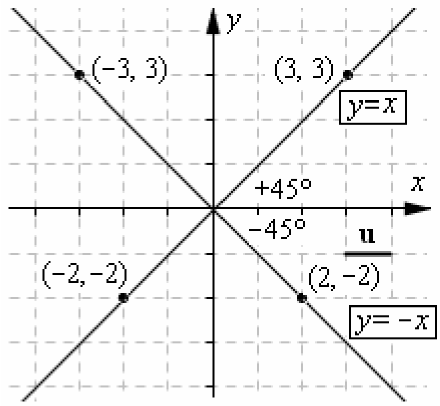
15) Cos'hanno in comune le due rette di equazioni $r: 15x - 5y - 30 = 0,\ s: 6x - 2y - 12 = 0$?
Rappresentano la stessa retta!
Infatti, semplificando la 1^a equazione per 5 e la 2^a per 2, si ottiene la stessa equazione $3x - y - 6 = 0$.
Questo esercizio è per ricordare che **i coefficienti dell'equazione di una retta in forma implicita sono "determinati a meno di un fattore di proporzionalità, ossia a meno di una costante moltiplicativa".**

11. APPROFONDIMENTI SUL COEFFICIENTE ANGOLARE

BISETTRICI DEI QUADRANTI E RETTE INCLINATE DI 45°

- ♥ **La bisettrice del 1° e 3° quadrante ha equazione $y = x$**
  (è il luogo dei punti del piano cartesiano
  la cui ordinata è uguale all'ascissa).
  Quindi **il coefficiente angolare $m = 1$**
  contraddistingue le rette che, rispetto all'asse orizzontale,
  sono inclinate di **45° in salita (+ 45°)**.

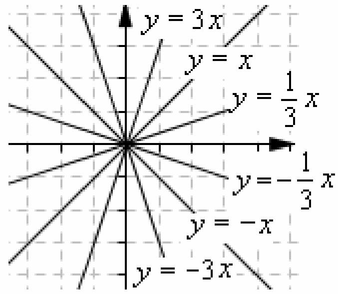
- ♥ **La bisettrice del 2° e 4° quadrante ha equazione $y = -x$**
  (è il luogo dei punti del piano cartesiano
  la cui ordinata è uguale all'opposto dell'ascissa).
  Quindi **il coefficiente angolare $m = -1$**
  contraddistingue le rette che, rispetto all'asse orizzontale,
  sono inclinate di **45° in discesa (– 45°)**.



Le bisettrici dei quadranti

RETTE CON INCLINAZIONE MAGGIORE, O MINORE, DI 45°

- **Una retta, con inclinazione (in salita o in discesa) > 45°, ha $|m| > 1$;**
  una retta, con inclinazione (in salita o in discesa) < 45°, ha $0 \le |m| < 1$
- **Due rette, che siano ugualmente inclinate,**
  ma una in salita e l'altra in discesa,
  hanno coefficienti angolari fra loro OPPOSTI.
- ♥ **Si può dimostrare che due rette PERPENDICOLARI**
  hanno coefficienti angolari fra loro ANTIRECIPROCI
  (si dice "antireciproco" l'opposto del reciproco).



LA PROPRIETA' FONDAMENTALE DEL COEFFICIENTE ANGOLARE

Prendi una retta qualsiasi: che so, la $y = 2x + 3$.
Adesso, assegna a x due valori, per calcolare i corrispondenti valori di y e determinare dunque due punti della retta stessa.
Ad esempio,

- puoi porre $x = 1$, e avrai quindi $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ e di conseguenza un primo punto $A(1, 5)$;
- poi puoi porre $x = 4$, e avrai quindi $y = 2 \cdot 4 + 3 = 11$ da cui un secondo punto $B(4, 11)$.

Ora vai a calcolare il rapporto (= quoziente) fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse dei due punti ottenuti:

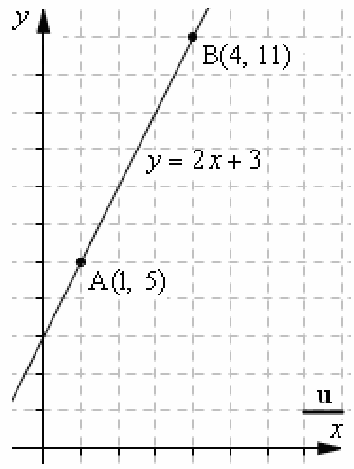
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \underset{\text{NOTA}}{=} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11-5}{4-1} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$$

Come hai potuto vedere, il risultato di questo calcolo coincide col coefficiente angolare m della retta.

Prova con un'altra coppia di punti, fai nuovamente il calcolo:
otterrai ancora lo stesso valore, il valore del coefficiente angolare.
Prendi un'altra retta, considera una coppia di suoi punti: vedrai che il calcolo

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ ovvero } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

darà sempre il coefficiente angolare m di quella retta.



Ecco una retta $y = 2x + 3$, *e due suoi punti* $A(1, 5);\ B(4, 11)$.

Calcoliamo $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$;

avremo $\frac{11-5}{4-1} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$.

Ma 2 è il coeff. angolare!!!

Vale dunque (ne diamo la dimostrazione generale alla pag. seguente) la **formula**

$$♥ \quad \boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m} \quad \text{(importantissima!)}$$

Data una retta di equazione $y = mx + q$,
il suo coefficiente angolare m
è uguale al rapporto
fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse
di due punti qualsiasi della retta stessa.

NOTA - Il simbolo Δ è sovente utilizzato, in matematica, per indicare "differenza".
Ad es., fra due persone che hanno risp. 15 anni e 47 anni, c'è una differenza di età $\Delta e = 47 - 15 = 32$.
Presi, in Fisica, due istanti di tempo successivi t_1 e t_2, nei quali la velocità di un corpo è risp. v_1 e v_2,
allora nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ l'incremento di velocità (>, < o = 0) è dato da $\Delta v = v_2 - v_1$.

Dimostrazione Consideriamo una retta non verticale *r*:

$y = mx + q$

e prendiamo su di essa due punti qualsiasi

$A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.

Poiché i due punti sono stati presi sulla retta *r*, risulterà

$y_1 = mx_1 + q$ e $y_2 = mx_2 + q$.

Insomma, le coordinate dei due punti in questione saranno

$(x_1,\, mx_1 + q)$ e $(x_2,\, mx_2 + q)$.

Ora si ha

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + q) - (mx_1 + q)}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 \cancel{+q} - mx_1 \cancel{-q}}{x_2 - x_1} = \frac{m\,\cancel{(x_2 - x_1)}}{\cancel{x_2 - x_1}} = m$$

C.V.D.

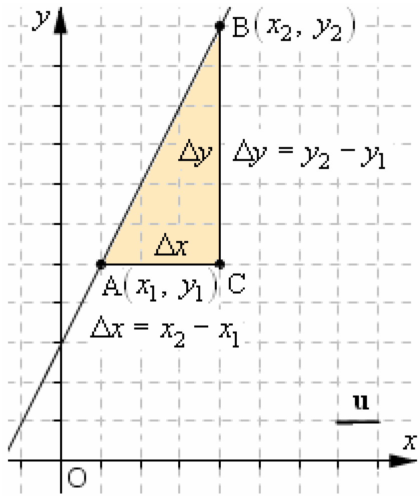
E' utile ed importante osservare (vedi figura) che

♥ le due quantità Δx e Δy
corrispondono alle due misure (con segno)
dei due segmenti orizzontale (Δx) e verticale (Δy)
che occorre percorrere per passare dal primo punto al secondo

… **misure CON SEGNO**, nel senso che
il segmento orizzontale andrà preso col segno
- positivo se viene percorso da sinistra verso destra,
- negativo se viene percorso da destra verso sinistra;

e allo stesso modo

il segmento verticale andrà preso col segno
- positivo se viene percorso dal basso verso l'alto,
- negativo se viene percorso dall'alto verso il basso.



Quanto sopra ci dice che in una funzione "lineare",
ossia della forma
$y = mx + q$
l'incremento di *x* è proporzionale all'incremento corrispondente di *y*:
il rapporto fra questi due incrementi è costante.

Si può dimostrare che VALE ANCHE IL VICEVERSA:
se due grandezze *x*, *y* sono legate fra loro in modo tale
che l'incremento di *x* è proporzionale all'incremento corrispondente di *y*
(se raddoppia uno, raddoppia anche l'altro …)
allora la relazione tra le due grandezze
è della forma
$y = mx + q$.

Segnaliamo infine che molti testi chiamano "**AFFINE**"
una funzione della forma $y = ax + b$,
riservando il termine "**LINEARE**"
solo, o prevalentemente, al caso in cui $b = 0$ ($y = ax$).

ENGLISH
- coefficiente angolare = **slope** (lett.: *pendenza*), o **gradient**
- ordinata all'origine = **y-intercept**
- $\Delta y / \Delta x$ = "**rise over run**" = spostamento *verticale fratto spostamento laterale*

DISEGNARE UNA RETTA CONOSCENDONE UN PUNTO E IL COEFFICIENTE ANGOLARE

Se noi sappiamo che una retta passa per un dato punto P_0,
e conosciamo il coefficiente angolare m di quella retta,
potremo disegnare la retta con precisione
anche senza aver determinato la costante q dell'equazione $\boldsymbol{y = mx + q}$.

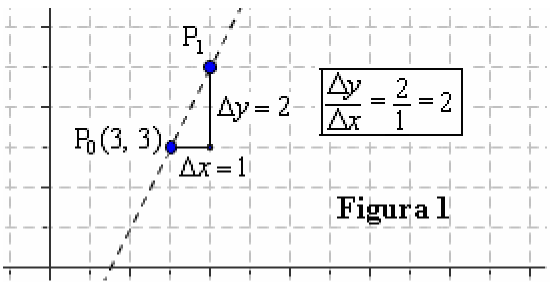
Infatti, poiché sappiamo che per il coefficiente angolare vale la formula $\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$,

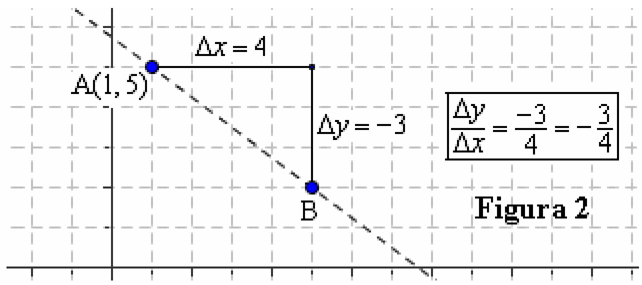
ci basterà fare il disegno in modo che la retta passi per P_0
e per un altro punto P_1 per ottenere il quale partiremo da P_0 e ci sposteremo

- ♪ prima orizzontalmente di un segmento orientato Δx
- ♫ poi verticalmente di un altro segmento orientato Δy,

dopo aver scelto Δx e Δy in modo tale che il loro quoziente sia uguale a quel valore *m* che ci interessa.

- ❑ Ad esempio (figura 1), per disegnare la retta passante per $P_0(3,3)$ e avente coefficiente angolare $m = 2$, possiamo partire da P_0 e poi spostarci di 1 verso destra ($\Delta x = 1$) e di 2 verso l'alto ($\Delta y = 2$).
  Troveremo così il nuovo punto P_1, tale che la retta P_0P_1 avrà $m = \Delta y / \Delta x = 2$
  e sarà perciò la retta desiderata.
- ❑ Facciamo un altro esempio (fig. 2). Per disegnare la retta passante per $A(1,5)$ e di coeff. ang. $m = -3/4$, possiamo partire da A e spostarci di 4 verso destra ($\Delta x = 4$) poi di 3 verso il basso ($\Delta y = -3$).
  Raggiungeremo così un nuovo punto B e congiungendo A con B il gioco sarà fatto.





SIGNIFICATO GONIOMETRICO DEL COEFFICIENTE ANGOLARE

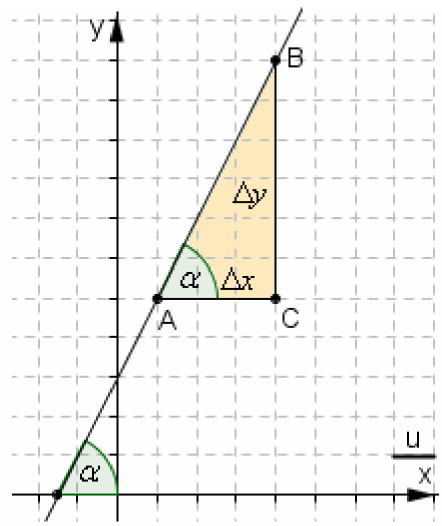
Questa osservazione può essere compresa
solo da chi possiede
qualche nozione di trigonometria.

Indichiamo con α $(0 \le \alpha < 180°)$
l'angolo che la nostra retta
forma con l'asse orientato delle ascisse.
La trigonometria ci insegna che

$$\frac{CB}{AC} = tg\ B\widehat{A}C$$

e allora in definitiva, tenendo conto che $B\widehat{A}C = \alpha$
(angoli corrispondenti formati da due parallele con trasversale),
avremo

$$m = \frac{CB}{AC} = tg\ \alpha$$



Insomma,

**il coefficiente angolare di una retta è uguale
alla tangente goniometrica dell'angolo α $(0 \le \alpha < 180°)$
che la retta stessa forma con l'asse orientato delle *x*.**

Nella figura qui a fianco l'angolo in questione è acuto,
ma puoi tu stesso controllare
che **la relazione vale, compreso il segno,
anche nel caso l'angolo sia ottuso**
(**e pure per l'angolo nullo** a cui è possibile pensare
nel caso di una retta parallela all'asse *x*).

12. ESERCIZI SUL COEFFICIENTE ANGOLARE

1) Quanto vale il coefficiente angolare delle rette seguenti?

a) $y=3x-2$ b) $y=-3x$ c) $y=4-\frac{1}{2}x$ d) $y=7-x$ e) $y=\frac{x}{3}-1$ f) $y=\frac{6x+5}{8}$ g) $y=\frac{3}{5}$
h) $2x+y-5=0$ i) $2x-2y+3=0$ l) $y+5=0$ m) $6x+7y+8=0$ n) $x=0$ o) $x+y=0$
p) $6x-15y+10=0$ q) $x-y=0$ r) $2x-3=0$ s) $ax+by+c=0$ t) $k(x+1)=y+3x$

2) Determina i coefficienti angolari delle rette sotto indicate, poi disegnale.

Potrai osservare che **se due rette hanno**:

- **coefficienti angolari UGUALI**, allora sono **PARALLELE**;
- coefficienti angolari **opposti**, allora hanno la **stessa inclinazione, ma una in salita e l'altra in discesa**;
- coefficienti angolari **ANTIRECIPROCI** l'uno dell'altro (NOTA), allora sono **PERPENDICOLARI**;
- coefficienti angolari **reciproci** l'uno dell'altro,
  allora **una di esse forma con l'asse *x* un angolo uguale all'angolo che l'altra forma con l'asse *y***.

NOTA: antireciproco vuol dire: "l'opposto del reciproco":
ad es., sono antireciproci l'uno dell'altro i due numeri 5 e $-\frac{1}{5}$, oppure i due numeri $-\frac{2}{7}$ e $+\frac{7}{2}$.

a) $y=2x-1$ b) $y=2x+4$ c) $y=-2x+5$ d) $x+2y+6=0$ e) $x-2y=0$ f) $2x-y=0$
g) $y=\frac{3}{4}x+1$ h) $y=-\frac{3}{4}x+1$ i) $y=\frac{4}{3}x+1$ l) $y=-\frac{4}{3}x+1$ m) $6x+8y+1=0$

3) Determina il valore del parametro *k* in modo che la retta $y=(k-3)x+5$

a) formi con l'asse *x* un angolo di +45° b) formi con l'asse *x* un angolo di – 45°
c) sia parallela all'asse *x* d) sia parallela all'asse *y*

4) Determina, tramite la formula $m=\Delta y/\Delta x$,
il coefficiente angolare di ciascuna delle rette passanti per le seguenti coppie di punti:

a) $\mathrm{A}(1,4);\ \mathrm{B}(3,7)$ b) $\mathrm{C}(-3,2);\ \mathrm{D}(1,-6)$ c) $\mathrm{E}(-3,-3);\ \mathrm{F}(-2,1)$ d) $\mathrm{G}(4,-4);\ \mathrm{H}(-3,-4)$
e) $\mathrm{I}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right);\ \mathrm{J}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ f) $\mathrm{H}\left(-1,\frac{3}{2}\right);\ \mathrm{K}\left(-\frac{2}{3},0\right)$ g) $\mathrm{L}(1,2);\ \mathrm{M}(1,3)$ h) $\mathrm{P}(0,0);\ \mathrm{Q}(3,-6)$

5) Disegna la retta passante per il punto indicato, e avente il coefficiente angolare specificato a fianco:

a) $\mathrm{A}(2,1);\ m=3$ b) $\mathrm{A}(2,1);\ m=-3$ c) $\mathrm{A}(2,1);\ m=\frac{1}{3}$ d) $\mathrm{A}(2,1);\ m=-\frac{1}{3}$
e) $\mathrm{B}(-3,1);\ m=\frac{4}{5}$ f) $\mathrm{B}(-3,1);\ m=-4$ g) $\mathrm{B}(-3,1);\ m=-\frac{3}{7}$ h) $\mathrm{B}(-3,1);\ m=0$

RISPOSTE

1) a) 3 b) -3 c) $-\frac{1}{2}$ d) -1 e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{3}{4}$ g) 0 h) -2 i) 1 l) 0 m) $-\frac{6}{7}$ n) non esiste, è "infinito"
o) -1 p) $\frac{2}{5}$ q) 1 r) non esiste, è "infinito" s) $-\frac{a}{b}$ (*se* $b\neq 0$; *se* $b=0$, "infinito") t) $k-3$: $y=(k-3)x+k$

2) a) 2 b) 2 c) -2 d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{2}$ f) 2 g) $\frac{3}{4}$ h) $-\frac{3}{4}$ i) $\frac{4}{3}$ l) $-\frac{4}{3}$ m) $-\frac{3}{4}$

3) a) $k=4$ b) $k=2$ c) $k=3$ d) *impossibile* (= *per nessun valore di* k)

4) a) $m=\frac{3}{2}$ b) $m=-2$ c) $m=4$ d) $m=0$ e) $m=-4$ f) $m=-\frac{9}{2}$ g) $m=$"infinito" h) $m=-2$

5) Ecco un secondo punto (tanto per fare un esempio) per cui la retta passa, oltre a quello dato:
a) $(3,4)$ b) $(3,-2)$ c) $(5,2)$ d) $(5,0)$ e) $(2,5)$ f) $(-2,-3)$ g) $\mathrm{B}(4,-2)$ h) $(-2,1)$

13. CONDIZIONI DI PARALLELISMO E PERPENDICOLARITA'

CONDIZIONE DI PARALLELISMO FRA DUE RETTE (NON VERTICALI)
Due rette non verticali $r: y = mx + q;\ r': y = m'x + q'$ sono PARALLELE se e solo se hanno UGUAL COEFFICIENTE ANGOLARE: $\boxed{r \parallel r' \leftrightarrow m = m'}$, come ad es. $r:\ y = 4x - 7$ ed $s: y = 4x + 2$

Ciò si deve al fatto che, come abbiamo ripetutamente osservato,
il coefficiente angolare di una retta esprime la sua inclinazione rispetto all'asse x;
ora, è evidente che il parallelismo fra due rette si avrà se e solo se le due rette
saranno ugualmente inclinate rispetto all'asse x e quindi se e solo se
(nel caso di rette non verticali) avranno ugual coefficiente angolare.

La biimplicazione $r \parallel r' \leftrightarrow m = m'$ potrebbe anche essere dimostrata nel modo seguente:
$r: y = mx + q$ e $r': y = m'x + q'$ sono parallele se e solo se, cercandone le intersezioni tramite il sistema
$\begin{cases} y = mx + q \\ y' = m'x + q' \end{cases}$, non se ne trova nessuna oppure se ne trovano infinite
(caso, quest'ultimo, in cui le rette sarebbero coincidenti, quindi "parallele in senso esteso").
Perciò si avrà $r \parallel r'$ se e solo se il sistema risulterà impossibile, oppure indeterminato.
Ma l'equazione risolvente del sistema è $mx + q = m'x + q';\quad (m - m')x = q' - q$
e i casi di impossibilità o indeterminazione si hanno quando si annulla il coefficiente di x, ossia con $m = m'$.

CONDIZIONE DI PARALLELISMO FRA DUE RETTE QUALSIASI (FORMA IMPLICITA!)
La condizione di parallelismo esaminata precedentemente non può riguardare due rette parallele che siano entrambe verticali (per le rette verticali il coefficiente angolare non è definito!).
Tuttavia, se si considerano le equazioni di due rette in forma implicita, è possibile scrivere una condizione di parallelismo valida universalmente, anche per le rette verticali.
Si potrebbe dimostrare che, per le due rette $r: ax + by + c = 0;\ r': a'x + b'y + c' = 0$, essa è

$$\boxed{r \parallel r' \leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0}$$

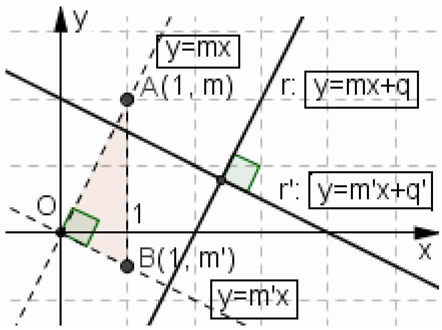
Ad esempio, $r:\ 6x - 10y + 7 = 0$ ed $s: 9x - 15y + 22 = 0$
sono parallele $(r \parallel s)$ perché $\begin{vmatrix} 6 & -10 \\ 9 & -15 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-15) - (-10) \cdot 9 = -90 + 90 = 0$

CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITA' FRA DUE RETTE (NON PARALLELE AGLI ASSI)
Due rette non parallele agli assi $r:\ y = mx + q;\quad r':\ y = m'x + q'$
sono PERPENDICOLARI se e solo se HANNO I COEFFICIENTI ANGOLARI ANTIRECIPROCI:

$$\boxed{r \perp r' \leftrightarrow m' = -\frac{1}{m} \quad (anche:\ mm' = -1)}$$

Ad esempio, $r:\ y = \frac{5}{3}x$ ed $s: y = -\frac{3}{5}x + 2$
sono perpendicolari $(r \perp s)$.

Con riferimento alla figura:
in luogo delle due rette $y = mx + q,\ y = m'x + q'$
possiamo considerare le rispettive parallele per l'origine,
ossia le rette tratteggiate $y = mx$ e $y = m'x$.
Infatti è evidente che le due rette considerate inizialmente sono
perpendicolari se e solo se risultano perpendicolari queste ultime.



Consideriamo allora i due punti, rispettivamente della
$y = mx$ e della $y = m'x$, di ascissa 1: $A(1, m)$ e $B(1, m')$.
$\boxed{\text{AOB } \textit{rettangolo in } \text{O}} \leftrightarrow \text{AB}^2 = \text{OA}^2 + \text{OB}^2 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow |m - m'|^2 = \left(\sqrt{1 + m^2}\right)^2 + \left(\sqrt{1 + m'^2}\right)^2 \leftrightarrow m^2 - 2mm' + m'^2 = 1 + m^2 + 1 + m'^2 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow -2mm' = 2 \leftrightarrow mm' = -1 \leftrightarrow \boxed{m' = -1/m} \quad \text{C.V.D.}$$

CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITA' FRA DUE RETTE QUALSIASI (FORMA IMPLICITA!)
Per fissare una condizione di perpendicolarità che non escluda le rette parallele agli assi, siamo costretti ancora una volta a ricorrere alle equazioni in forma implicita.
Si potrebbe dimostrare che, per le due rette $r: ax + by + c = 0;\ r': a'x + b'y + c' = 0$, la condizione è

$$\boxed{r \perp r' \leftrightarrow aa' + bb' = 0}$$

Ad esempio, $r:\ 4x + 3y + 9 = 0$ ed $s: 6x - 8y + 1 = 0$
sono perpendicolari $(r \perp s)$ perché $4 \cdot 6 + 3 \cdot (-8) = 24 - 24 = 0$

ESEMPI - ESERCIZI

1) Data la retta $y=-\frac{2}{3}x$, riconosci quali fra le seguenti rette sono ad essa I) parallele II) perpendicolari

a) $y=\frac{2}{3}x+1$ b) $y=\frac{3}{2}x-1$ c) $y=1-\frac{2}{3}x$ d) $4x+6y+30=0$ e) $3x+2y+6=0$

2) Stabilisci quale coefficiente angolare hanno tutte le rette parallele alla retta che passa per la coppia di punti:

a) $\mathrm{A}(1,-3);\ \mathrm{B}(3,2)$ b) $\mathrm{C}\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right);\ \mathrm{D}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ c) $\mathrm{E}(5,4);\ \mathrm{F}(5,-2)$ d) $\mathrm{H}(0,h);\ \mathrm{K}(k,0)\ \ (h,k\neq 0)$

3) Stabilisci quale coefficiente angolare hanno tutte le rette perpendicolari alla retta che passa per ciascuna delle quattro coppie di punti a), b), c), d) dell'esercizio precedente

4) Verifica, utilizzando esclusivamente i coefficienti angolari, che il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo. Ripeti poi la stessa verifica utilizzando, invece, la formula per la distanza fra due punti.

a) $\mathrm{A}(-4,1);\ \mathrm{B}(0,-2);\ \mathrm{C}(3,0);\ \mathrm{D}(-1,3)$ b) $\mathrm{A}(-1,-1);\ \mathrm{B}\left(3,-\frac{8}{3}\right);\ \mathrm{C}\left(3,\frac{4}{3}\right);\ \mathrm{D}(-1,3)$

5) Verifica, utilizzando esclusivamente i coefficienti angolari, che il triangolo ABC è rettangolo.
Ripeti poi la stessa verifica utilizzando, invece, la relazione pitagorica.
Calcola anche la mediana relativa all'ipotenusa, constatando che è uguale a metà dell'ipotenusa stessa.

a) $\mathrm{A}(-10,-8);\ \mathrm{B}(2,8);\ \mathrm{C}(14,-1)$ b) $\mathrm{D}(-1,0);\ \mathrm{E}(4,-12);\ \mathrm{F}\left(8,\frac{15}{4}\right)$

6) Considera il triangolo di vertici $\mathrm{A}(-8,-3);\ \mathrm{B}(0,12);\ \mathrm{C}(0,3)$ e verifica (nei tre possibili casi) che la congiungente i punti medi di due lati qualsiasi è sempre parallela al lato rimanente, e uguale alla sua metà.

7) Considera le due rette di equazioni:
$r: y=(k+1)x+(k-1);\ \ s: y=4x+1.$
Per quale valore del parametro k sono parallele? Per quale sono perpendicolari?
Scrivi anche le equazioni delle rette così trovate, verificando così la correttezza delle tue risposte.

8) Stesso quesito precedente, per le coppie di rette
a) $r: y=(p+1)x;\ \ s: y=(p-1)x$ b) $r: y=ax+b;\ \ s: y=-ax+c$

9) Considera le due rette di equazioni: $r: 3x+4y+5=0;\ \ s: kx-2y+3=0$ dove k è un parametro, e, senza portare in forma esplicita, stabilisci per quali valori di k esse sono:
I) parallele II) perpendicolari.

10) Stesso quesito precedente, per la coppia di rette
$r: hx+(h-1)y+(h+2)=0;\ \ s:(h-1)x+(h+2)y+(h-3)=0$
Scrivi anche le equazioni delle rette così trovate, verificando così la correttezza dei valori di h individuati.

RISPOSTE

1) a) *né* $\parallel$ *nè* $\perp$ b) $\perp$ c) $\parallel$ d) $\parallel$ e) *né* $\parallel$ *nè* $\perp$

2) a) $m=\frac{5}{2}$ b) $m=-2$ c) $m=$ "*non esistente*", "*non definito*", "*infinito*" (*retta verticale*) d) $m=-\frac{h}{k}$

3) a) $m=-\frac{2}{5}$ b) $m=\frac{1}{2}$ c) $m=0$ d) $m=\frac{k}{h}$

4) a) $m_{\mathrm{AB}}=-\frac{3}{4}=m_{\mathrm{DC}}$ *perciò* $\mathrm{AB}\parallel\mathrm{DC}$; $m_{\mathrm{AD}}=\frac{2}{3}=m_{\mathrm{BC}}$ *perciò* $\mathrm{AD}\parallel\mathrm{BC}$
Invece con le distanze: $\mathrm{AB}=5=\mathrm{DC};\ \ \mathrm{AD}=\sqrt{13}=\mathrm{BC}$
e un quadrilatero coi lati opposti a due a due uguali è un parallelogrammo.

b) $m_{\mathrm{AB}}=-\frac{5}{12}=m_{\mathrm{DC}}$ *perciò* $\mathrm{AB}\parallel\mathrm{DC}$; $m_{\mathrm{AD}}=\infty=m_{\mathrm{BC}}$ *perciò* $\mathrm{AD}\parallel\mathrm{BC}$ (*entrambe verticali*)
Invece con le distanze: $\mathrm{AB}=\frac{13}{3}=\mathrm{DC};\ \ \mathrm{AD}=4=\mathrm{BC}$

5) a) $m_{AB} = \frac{4}{3}$ *e* $m_{BC} = -\frac{3}{4}$ *perciò* $AB \perp BC \left(A\widehat{B}C = 90°\right)$

Invece con la relazione pitagorica:

$AB = 20,\ BC = 15,\ AC = 25$ *quindi* $AB^2 + BC^2 = 400 + 225 = 625 = AC^2$ *da cui* $A\widehat{B}C = 90°$

b) $m_{DE} = -\frac{12}{5}$ *e* $m_{DF} = \frac{5}{12}$ *perciò* $DE \perp DF \left(E\widehat{D}F = 90°\right)$

Invece con la relazione pitagorica:

$DE = 13,\ DF = \frac{39}{4},\ EF = \frac{65}{4}$ *quindi* $DE^2 + DF^2 = 169 + \frac{1521}{16} = \frac{4225}{16} = EF^2$ *da cui* $E\widehat{D}F = 90°$

6) *Ad esempio, i punti medi di AB e BC hanno coordinate* $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$ *e* $\left(0, \frac{15}{2}\right)$

e la loro congiungente ha coefficiente angolare, come retta, $\frac{3}{4}$, *e misura, come segmento,* 5;

ora, AC ha coefficiente angolare, come retta, ancora $\frac{3}{4}$ *e misura, come segmento,* 10 *cioè* $5 \cdot 2$.

A te le altre verifiche.

7) *Sono* $\|$ *se* $m = m'$ *ossia* $k + 1 = 4;\ k = 3$. *In tal caso si tratta delle rette* $y = 4x + 2$ *e* $y = 4x + 1$.

Sono $\perp$ *se* $m = -\frac{1}{m'}$ *ossia* $k + 1 = -\frac{1}{4};\ k = -\frac{5}{4}$. *In tal caso le rette sono* $y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4}$ *e* $y = 4x + 1$.

8) *a)* $\|$ *se* $p + 1 = p - 1$ ... *impossibile!*; $\perp$ *se* $p + 1 = -\frac{1}{p-1};\ p^2 - 1 = -1;\ p^2 = 0;\ p = 0$

Perciò non si può avere parallelismo per nessun valore di p,
mentre il caso di perpendicolarità corrisponde alle rette $y = x,\ y = -x$

b) $\|$ *se* $a = -a;\ a = 0;$ $\perp$ *se* $a = -\frac{1}{-a};\ a^2 = 1;\ a = \pm 1$

Con $a = 0$ *le due rette sono entrambe orizzontali, quindi parallele;*
con $a = 1$ *si tratta delle rette* $y = x + b,\ y = -x + c$, *in effetti perpendicolari,*
con $a = -1$ *le due rette sono* $y = -x + b,\ y = x + c$, *in effetti perpendicolari.*

9) *Condizione di parallelismo in forma implicita per due rette* $ax + by + c = 0,\ a'x + b'y + c' = 0$:

$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0.$

Dunque: $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ k & -2 \end{vmatrix} = 0;\ -6 - 4k = 0;\ k = -\frac{3}{2}$

Condizione di perpendicolarità: $aa' + bb' = 0.$

Dunque: $3k - 8 = 0,\ k = \frac{8}{3}$

10) *Parallelismo*: $\begin{vmatrix} h & h-1 \\ h-1 & h+2 \end{vmatrix} = 0;\ h(h+2) - (h-1)^2 = 0;\ ...\ h = \frac{1}{4}$

Con $h = \frac{1}{4}$, *le rette risultano essere rispettivamente*

$\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{9}{4} = 0;\ x - 3y + 9 = 0;\ y = \frac{1}{3}x + 3$

$-\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}y - \frac{11}{4} = 0;\ -3x + 9y - 11 = 0;\ y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{9}$

in effetti parallele $\left(m_1 = m_2 = \frac{1}{3}\right)$

Perpendicolarità: $h(h-1) + (h-1)(h+2) = 0.\ h^2 = 1,\ h = \pm 1$

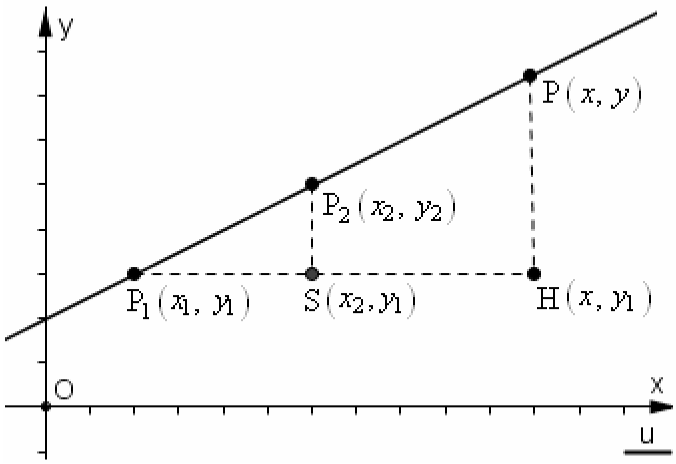
Con $h = 1$, *le rette risultano essere rispettivamente*

$x + 3 = 0;\ x = -3$ *e* $3y - 2 = 0;\ y = \frac{2}{3}$ *in effetti perpendicolari (una verticale, l'altra orizzontale)*

Con $h = -1$, *le rette risultano essere rispettivamente*

$-x - 2y + 1 = 0;\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ *e* $-2x + y - 4 = 0;\ y = 2x + 4$ *in effetti perpendicolari.*

14. EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI ASSEGNATI: LA FORMULA



Vogliamo una formula che ci consenta di scrivere immediatamente l'equazione della retta passante per due punti, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, di coordinate assegnate.
Impostiamo la seguente catena di biimplicazioni (ovviamente, i segmenti tratteggiati in figura sono paralleli agli assi cartesiani; i segmenti della proporzione vanno pensati orientati):

$P(x, y) \in P_1P_2 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow HP:SP_2 = P_1H:P_1S$ (*segmenti orientati*) $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow (y-y_1):(y_2-y_1) = (x-x_1):(x_2-x_1) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$

LA FORMULA CHE DA' LA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI ASSEGNATI è dunque

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$$

Essa però vale solo per rette che non siano né orizzontali (= stessa ordinata) né verticali (= stessa ascissa).
In tal caso, infatti, provando ad applicarla si otterrebbe un denominatore nullo.
D'altra parte, se è noto che i due punti in gioco individuano una retta parallela a uno degli assi, scrivere l'equazione della retta stessa è immediato.

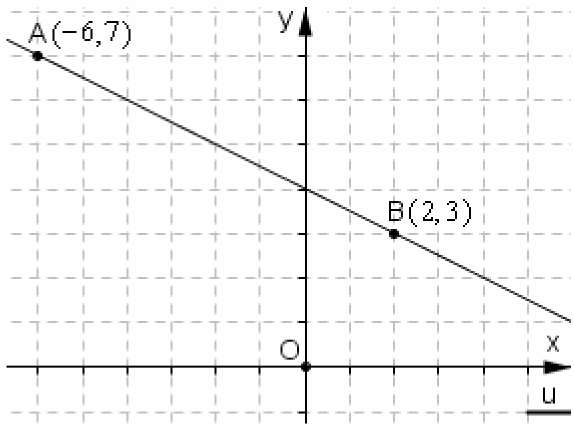
Osserviamo che, eliminando i denominatori nella formula di cui sopra, si ottiene la sua VARIANTE

$$\boxed{(x_2-x_1)(y-y_1) = (y_2-y_1)(x-x_1)}$$

la quale, invece, HA IL VANTAGGIO DI VALERE *SEMPRE*, anche per le rette parallele agli assi.

ESEMPI

- **Scrivere l'equazione della retta che passa per i due punti $A(-6,7)$; $B(2,3)$**



I due punti A, B non hanno né la stessa ascissa, né la stessa ordinata: la retta AB non è parallela né all'asse *y*, né all'asse *x*, e possiamo utilizzare la formula.

$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}; \quad \dfrac{y-7}{3-7} = \dfrac{x+6}{2+6};$

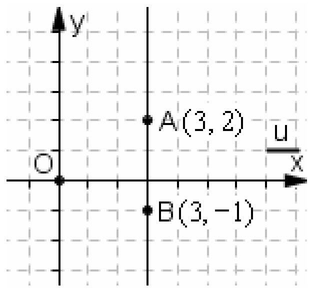
$\dfrac{y-7}{-4} = \dfrac{x+6}{8}; \quad \dfrac{7-y}{4} = \dfrac{x+6}{8};$

$\dfrac{14-2y}{\cancel{8}} = \dfrac{x+6}{\cancel{8}}; \quad -2y = x-8; \quad 2y = -x+8;$

$y = \dfrac{-x+8}{2}; \quad \boxed{y = -\dfrac{1}{2}x+4}$

In effetti, vediamo dalla figura che la retta è in discesa (questo va d'accordo col coefficiente angolare <0 trovato) e l'ordinata all'origine vale 4, come il "*q*" dell'equazione da noi ricavata.

- **Scrivere l'equazione della retta che passa per i due punti $A(3,2)$; $B(3,-1)$**



Questa volta A, B hanno la stessa ascissa, e la formula non è applicabile.
D'altra parte se i due punti hanno la stessa ascissa, allora la retta è verticale, e la sua equazione si può scrivere immediatamente: $\boxed{x=3}$.

Puoi verificare che la "variante" $(x_2-x_1)(y-y_1) = (y_2-y_1)(x-x_1)$ condurrebbe, fatti i calcoli, alla stessa conclusione $x = 3$.

CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO DI TRE PUNTI

Supponiamo di avere, nel piano cartesiano, tre punti P_1, P_2, P_3 di coordinate $(x_1, y_1);\ (x_2, y_2);\ (x_3, y_3)$.
Esiste una formula per stabilire se sono allineati, ossia se appartengono tutti e tre a una medesima retta?

Consideriamo l'equazione della retta passante per i primi due; scriviamola utilizzando la formula nella versione "senza denominatori", che è valida, come sappiamo, qualunque sia la posizione dei due punti considerati:

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

Ora, il terzo punto apparterrà a tale retta se e solo se, sostituendone le coordinate nell'equazione, si otterrà un'uguaglianza vera (condizione di appartenenza). Dunque il terzo punto apparterrà alla retta individuata dai primi due, e perciò i tre punti saranno allineati, se e solo se

$$\boxed{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}$$

condizione che può anche essere scritta utilizzando un determinante:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0}$$

Ad esempio, utilizziamo la condizione per stabilire se i tre punti

$A(-5, 3);\ B\left(-\frac{1}{5}, \frac{27}{5}\right);\ C(1, 6)$

sono allineati oppure no.

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{5}+5 & \frac{27}{5}-3 \\ 1+5 & 6-3 \end{vmatrix} = 0? \qquad \begin{vmatrix} \frac{24}{5} & \frac{12}{5} \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0? \qquad \frac{24}{5}\cdot 3 - \frac{12}{5}\cdot 6 = 0? \qquad \frac{72}{5} - \frac{72}{5} = 0, \quad OK: \textit{sono allineati}$$

ESERCIZI

1) Scrivi (portandola successivamente in forma esplicita) l'equazione della retta AB, con:

a) $A(0,4);\ B(-6,1)$ b) $A(-3,4);\ B(2,-1)$ c) $A(-3,-6);\ B(4,1)$ d) $A\left(1,\frac{1}{2}\right);\ B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$

e) $A(3,5);\ B(1,-1)$ f) $A(-1,-4);\ B(-3,2)$ g) $A\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right);\ B\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{4}\right)$ h) $A(1,3);\ B(1,-1)$

2) E' dato il triangolo ABC, con $A(-1,0);\ B(3,-3);\ C(-4,-6)$.
Scrivi le equazioni delle due mediane relative ai lati AB e AC (= delle *rette* su cui giacciono tali mediane), poi calcola le coordinate del loro punto di intersezione. Verifica infine che anche con la ben nota formula per le coordinate del baricentro di un triangolo si sarebbe giunti al medesimo risultato.

3) Dopo aver dimostrato che ABCD, con $A(-5,-2);\ B(5,-3);\ C(6,2);\ D(-4,3)$, è un parallelogrammo, congiungi il vertice A col punto medio M del lato DC e il vertice C con il punto medio N nel lato AB e verifica che i due segmenti AM e CN dividono la diagonale DB in tre parti uguali $DE = EF = FB$.
Verifica inoltre che il punto medio G di AE, il punto medio H di CF e il punto di intersezione I delle diagonali del parallelogrammo sono allineati fra loro.

4) Verifica, con l'apposita formula, che i tre punti $A(2,5);\ B(4,1);\ C(5,-1)$ sono allineati.
Scrivi l'equazione della retta *r* su cui giacciono.
Indica poi con *s* la retta parallela ad *r* e passante per l'origine O, considera il punto $D(2,\ 2)$ e determina le coordinate dei tre punti $A',\ B',\ C'$ in cui le tre congiungenti $AD,\ BD,\ CD$ intersecano la retta *s*.

RISPOSTE

1)

a) $y = \frac{1}{2}x + 4$ b) $y = 1 - x$ c) $y = x - 3$ d) $y = \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}$

e) $y = 3x - 4$ f) $y = -3x - 7$ g) $y = -x - \frac{5}{4}$ h) $x = 1$

2) $G\left(-\frac{2}{3}, -3\right)$ 3) $E(-1, 1);\ F(2, -1);\ G\left(-3, -\frac{1}{2}\right);\ H\left(4, \frac{1}{2}\right);\ I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

4) $A'(2,-4);\ B'(-2,4);\ C'(-4,8)$

15. FASCIO PROPRIO DI RETTE

- **EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER UN PUNTO DATO $P_0(x_0, y_0)$ E AVENTE COEFFICIENTE ANGOLARE ASSEGNATO m**

L'equazione della retta passante per $P_0(x_0, y_0)$ e avente coefficiente angolare assegnato m si scrive mediante la formula

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Esempio: scrivere l'equazione della retta passante per $A(5,3)$
e parallela alla bisettrice del 2° e 4° quadrante (di equazione $y = -x$).

Avremo $m = -1;\ (x_0, y_0) = (5,3)$ e quindi, applicando la formula $y - y_0 = m(x - x_0)$:
$$y - 3 = -1 \cdot (x-5);\quad y - 3 = -x + 5;\quad y = -x + 8$$

La GIUSTIFICAZIONE della formula $y - y_0 = m(x - x_0)$
si può effettuare mediante le seguenti tre puntualizzazioni:

a) l'equazione scritta rappresenta certamente una retta
(per il fatto che si tratta di un'equazione di 1° grado nelle due variabili *x*, *y*);

b) tale retta ha coefficiente angolare *m*
(se si portasse in forma esplicita, il moltiplicatore di *x* risulterebbe essere *m*)

c) tale retta infine passa certamente per $P_0(x_0, y_0)$
in quanto sostituendo x_0, y_0 al posto di x e y rispettivamente, si ottiene un'uguaglianza vera.

Le tre osservazioni di cui sopra dimostrano A POSTERIORI la validità della formula.
Un procedimento che, invece, consente di RICAVARE la formula stessa è il seguente.

L'equazione di una generica retta che abbia come coefficiente angolare il numero assegnato m è
$y = \boxed{m}x + q$,
con *quell' m* fissato, e *q* invece lasciato indicato, imprecisato.

Sappiamo che *q* indica l'ordinata del punto in cui la retta taglia l'asse verticale:
a seconda del valore di *q* la retta si troverà spostata più in alto o più in basso.
Ma noi vogliamo determinare *quel* particolare valore di *q* per il quale la retta in questione risulta passare per il punto assegnato $P_0(x_0, y_0)$.
Bene! Lo troveremo imponendo la condizione di passaggio per il punto $P_0(x_0, y_0)$.
Tale condizione fornisce l'uguaglianza $y_0 = mx_0 + q$ da cui $q = y_0 - mx_0$.
La retta che ci interessa è dunque

$$y = mx + (y_0 - mx_0);$$
$$y - y_0 = mx - mx_0;$$
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ESERCIZIO

Dato il triangolo ABC, con $A(3,1);\ B(5,2);\ C(2,4)$,
trova le coordinate del piede dell'altezza relativa alla base BC.

$$m_{BC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{4-2}{2-5} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Dunque $m_{AH} = -\dfrac{1}{m_{BC}} = \dfrac{3}{2}$

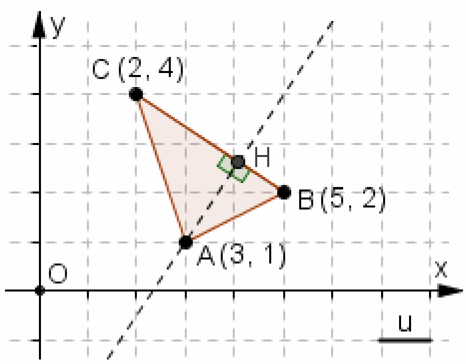
$$AH:\ y - 1 = \frac{3}{2}(x-3);\ 2y - 2 = 3x - 9;\ 3x - 2y - 7 = 0$$

$$BC:\ y - 2 = -\frac{2}{3}(x-5);\ 3y - 6 = -2x + 10;\ 2x + 3y - 16 = 0,$$

oppure con la formula per la retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B};\ \frac{y-2}{4-2} = \frac{x-5}{2-5};\ \dots\ 2x + 3y - 16 = 0$$

$$H = AH \cap BC:\ \begin{cases} 3x - 2y - 7 = 0 \\ 2x + 3y - 16 = 0 \end{cases};\dots;\ H\left(\frac{53}{13}, \frac{34}{13}\right)$$



❑ FASCIO PROPRIO DI RETTE

Se nell'equazione

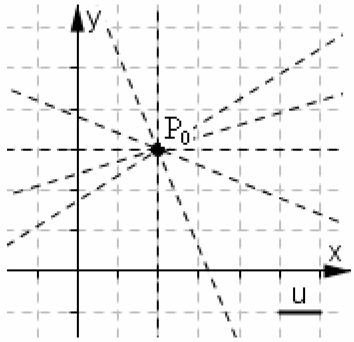
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

pensiamo x_0, y_0 fissati ed *m* variabile
(o, se si vuole, fissato ma imprecisato),
interpreteremo tale equazione come l'equazione della famiglia di tutte le rette passanti per $P_0(x_0, y_0)$, esclusa la retta verticale.

Esempio: la famiglia di tutte le rette non verticali passanti per il punto $E(2,3)$ è rappresentata dall'equazione

$$y - 3 = m(x - 2)$$

La famiglia di tutte le rette passanti per un punto fissato P_0 viene chiamata "il fascio proprio di centro P_0 ".



Nella figura, alcune fra le infinite rette del fascio proprio di centro $P_0(x_0, y_0)$

Quindi possiamo dire che

L'equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$ rappresenta, al variare di *m*,
il FASCIO PROPRIO DI RETTE DI CENTRO $P_0(x_0, y_0)$,
CON ESCLUSIONE DELLA RETTA VERTICALE

ESERCIZIO

Fra le rette del fascio di centro $S\left(4, -\frac{2}{3}\right)$, determinare:

a) quella parallela alla retta $2x + 7y - 3 = 0$
b) quella perpendicolare alla retta che passa per $A(3,5)$ e per $B(4,-1)$
c) quella che passa, oltre che per S, anche per $C(3,3)$

a) L'equazione del fascio in questione è $y + \frac{2}{3} = m(x - 4)$
Fra le rette di questo fascio, quella parallela alla $2x + 7y - 3 = 0$ sarà la retta che ha lo stesso suo coefficiente angolare.
Ricaviamo allora il coefficiente angolare di $2x + 7y - 3 = 0$, portando l'equazione in forma esplicita:

$$2x + 7y - 3 = 0; \quad 7y = -2x + 3; \quad y = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}$$

Dunque il valore di *m* che ci interessa è $m = -\frac{2}{7}$,

e a questo punto la retta richiesta sarà $y + \frac{2}{3} = -\frac{2}{7}(x - 4)$

Svolti i calcoli, si ottiene $y = -\frac{2}{7}x + \frac{10}{21}$ o, in forma implicita, $6x + 21y - 10 = 0$

b) Che coefficiente angolare ha la retta AB, con $A(3,5)$ e $B(4,-1)$?
Per determinarlo, potremmo scrivere l'equazione di tale retta con la formula per la retta passante per due punti di coordinate assegnate $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
oppure (molto più rapidamente!) servirci della formula $m = \Delta y / \Delta x$.

Dunque $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-5}{4-3} = -6$ e perciò, per quanto riguarda la retta richiesta, perpendicolare ad AB,
$m = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{1}{6}$ da cui $y + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}(x - 4)$ eccetera.

c) Possiamo scrivere, con l'apposita formula, l'equazione della retta passante per i due punti S e C; oppure, in alternativa, fra le rette del fascio di centro S, determinare quella passante per $C(3,3)$
ponendo la condizione di appartenenza di quest'ultimo punto alla retta $y + \frac{2}{3} = m(x - 4)$.
per determinare il valore di *m* che interessa. Puoi, per esercizio, procedere tu, in entrambi i modi.

$$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)=0}$$

E' L' EQUAZIONE DEL FASCIO PROPRIO DI CENTRO (x_0, y_0), NESSUNA RETTA ESCLUSA

Infatti,

- l'equazione appena scritta rappresenta certamente una retta (è di 1° grado in x, y)
- tale retta passa certamente per $P_0(x_0, y_0)$
  perché sostituendo x_0, y_0 al posto di x, y rispettivamente, si ottiene un'uguaglianza vera;
- infine:
  - ♪ facendo variare la coppia di parametri a, b, si possono ottenere tutti i possibili coefficienti angolari (notare che il coefficiente angolare è dato da $-a/b$; ora, scegliendo un valore di b non nullo e facendo poi variare a, possiamo far sì che la frazione $-a/b$ assuma qualsiasi valore da noi desiderato)
  - ♫ e inoltre, ponendo $b=0$ e attribuendo ad a un valore qualsiasi purché non nullo, si ottiene la retta $a(x-x_0)=0$; $x-x_0=0$; $x=x_0$ ossia la retta verticale passante per (x_0, y_0)

Quando, in un problema, è richiesto di determinare l'equazione di una retta, di cui si conosce il passaggio per un dato punto $P_0(x_0, y_0)$, in modo che tale retta verifichi anche un'ulteriore condizione:

- se si sa già per certo che la retta cercata non è verticale,
  si utilizzerà la rappresentazione $y-y_0=m(x-x_0)$;
- se invece non è escluso che la retta cercata possa eventualmente essere verticale,
  IN TEORIA si dovrebbe utilizzare la rappresentazione
  $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$
  che, contrariamente a quell'altra, non esclude la retta verticale;
  tuttavia, il fatto che qui intervengano DUE parametri anziché uno, è molto scomodo
  (teniamo presente anche il fatto che la coppia di parametri sarebbe comunque determinata "a meno di una costante di proporzionalità"), per cui si preferisce di solito comportarsi nel modo seguente:
  - ♪ si utilizza, per rappresentare la retta, la formula $y-y_0=m(x-x_0)$;
  - ♫ si va poi a controllare *in modo diretto* se anche la retta verticale $x=x_0$ è soluzione del problema assegnato.

Questa osservazione è utile in particolare in relazione del problema, che si incontra negli sviluppi successivi della Geometria Analitica, di "condurre da un dato punto le tangenti a una data conica".

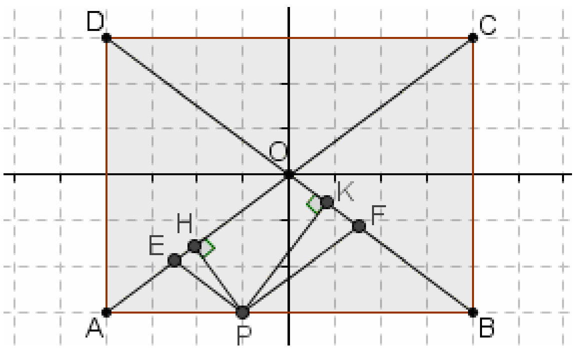
ESERCIZIO

Considera il rettangolo di vertici
$A(-4,-3)$, $B(4,-3)$, $C(4,3)$, $D(-4,3)$
e prendi sul lato AB un punto P qualsiasi,
ad esempio quello di ascissa –1: $P(-1,-3)$.
Ora per P traccia:
la parallela alla diagonale BD,
che intersechi l'altra diagonale AC in E;
la parallela ad AC,
che intersechi BD in F;
la perpendicolare ad AC,
che la intersechi in H;
e infine la perpendicolare a BD,
che la intersechi in K.
Verifica ora che la somma $PE+PF$
è uguale a mezza diagonale del rettangolo,
mentre la somma $PH+PK$ è uguale a 4,8.

Cambia ora la posizione di P su AB,
variandone l'ascissa, rifai i calcoli, e
constaterai che la somme $PE+PF$, $PH+PK$
non mutano il loro valore rispetto a prima.

Come si spiega questo fatto?

Altri esercizi a pag. 44



Le diagonali hanno equazioni $y=\frac{3}{4}x$ *(AC) e* $y=-\frac{3}{4}x$ *(BD)*

per cui, ad esempio,

la retta PE avrà equazione $y+3=m(x+1)$ *con* $m=-\frac{3}{4}$

e quindi $y+3=-\frac{3}{4}(x+1)$; $y=-\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}$.

Ora per trovare le coordinate di E si porrà questa equazione a sistema con l'equazione della retta AC … ecc. ecc. Prosegui tu.

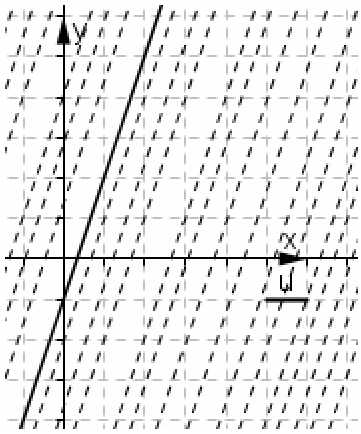
Riguardo alle dimostrazioni richieste,
per la prima è sufficiente la geometria euclidea di base,
per la seconda ci vogliono similitudini e proporzioni.

16. FASCIO IMPROPRIO DI RETTE

- **EQUAZIONE DELLA GENERICA RETTA PARALLELA AD UNA RETTA NON VERTICALE ASSEGNATA $y = mx + q$**
- **FASCIO IMPROPRIO DI RETTE**

Sia data una retta $r: y = mx + q$ (esempio: $y = 3x - 1$).
La generica parallela ad r si indicherà con
$y = mx + k$,
dove k va pensata come una variabile, oppure come una "costante arbitraria", un "parametro".
Riprendendo il nostro esempio,
la generica parallela alla retta $y = 3x - 1$
è la retta $y = 3x + k,\ k \in \mathbb{R}$.

L'insieme (si può anche dire: la "famiglia") di tutte le infinite rette parallele ad una retta fissata, viene detto "fascio improprio" o "fascio di parallele".



Nella figura, alcune fra le infinite rette del fascio improprio di tutte le parallele alla $y = 3x - 1$

Quindi possiamo dire che:

se pensiamo m fissato e k variabile, l'equazione $y = mx + k$ rappresenta il FASCIO IMPROPRIO DELLE RETTE AVENTI COEFFICIENTE ANGOLARE m.

Esempio: la famiglia di tutte le rette parallele alla $y = -5x + 3$ è rappresentabile con l'equazione $y = -5x + k,\ k \in \mathbb{R}$

L'equazione del fascio improprio costituito da tutte le rette parallele all'asse y è invece $x = k$, con k pensato variabile.

FASCIO IMPROPRIO IN FORMA IMPLICITA

Supponiamo che l'equazione di una data retta r sia scritta in forma implicita:
$$ax + by + c = 0.$$

Allora, se si vuole rappresentare analiticamente il fascio improprio delle rette parallele ad r, il modo più veloce è di sostituire il numero assegnato c con una costante arbitraria k:
$$ax + by + k = 0,\ k \in \mathbb{R}$$

Esempio:
la famiglia di tutte le rette parallele alla $2x - y + 5 = 0$
è rappresentabile con l'equazione
$$2x - y + k = 0,\ k \in \mathbb{R}$$

Infatti:

$$ax + by + k = 0,\ k \in \mathbb{R} \rightarrow \left\langle \begin{array}{ll} b \neq 0:\ y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{k}{b} & \textit{fascio delle parallele con coeff. ang.} -\dfrac{a}{b} \\ b = 0:\ ax + k = 0;\ \ x = -\dfrac{k}{a} & \textit{fascio delle rette verticali} \end{array} \right.$$

ESERCIZIO

Scrivi l'equazione del fascio di rette parallele:

a) alla retta di equazione $y = -\dfrac{3}{4}x + 1$

b) alla retta di equazione $2x - 3y - 4 = 0$

Risposte:

a) $y = -\dfrac{3}{4}x + k,\ k \in \mathbb{R}$

b) $2x - 3y + k = 0,\ k \in \mathbb{R}$

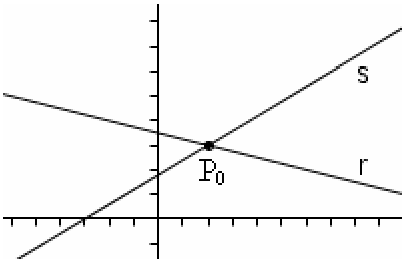
Altri esercizi a pag. 44

17. ANCORA SUI FASCI DI RETTE

LA COMBINAZIONE LINEARE DELLE EQUAZIONI DI DUE RETTE, SE SI LASCIA INDETERMINATO UNO DEI COEFFICIENTI (O ENTRAMBI), ESPRIME UN FASCIO

Consideriamo le equazioni di due rette

$$r:\ ax+by+c=0$$
$$s:\ a'x+b'y+c'=0\,.$$



Supponiamo (almeno per ora) che tali due rette non siano parallele, ma si intersechino invece in un punto

$$\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0).$$

Riguardo ora alla scrittura

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0\,,$$

dove k è un coefficiente reale, possiamo dire che

♪ esprime ancora l'equazione di una retta, perché è di 1° grado nelle variabili x, y

♫ e questa retta passa senz'altro per $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$!!!

Infatti P_0, poiché appartiene sia ad r che ad s,
è tale che le sue coordinate $(x_0,\ y_0)$ soddisfano sia all'equazione di r che a quella di s;
si ha perciò $ax_0+by_0+c=0$ e anche $a'x_0+b'y_0+c'=0$,
per cui si avrà pure, per qualsiasi valore di k, $ax_0+by_0+c+k(a'x_0+b'y_0+c')=0$
il che significa appunto che $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ appartiene alla retta $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$.

Ricapitolando, l'equazione

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$$

individua senz'altro una retta appartenente al fascio di centro $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$.

Facciamo un esempio. Le due rette

$$r:\ x-3y+5=0,\quad s:\ 2x+y-4=0$$

si intersecano, come tu stesso puoi verificare facendo il sistema, nel punto $\mathrm{P}_0(1,\ 2)$. Ora,

$$x-3y+5+k(2x+y-4)=0$$

è ancora l'equazione di una retta, passante per $\mathrm{P}_0(1,\ 2)$.
Se prendiamo, tanto per dire, $k=7$, la specifica retta sarà

$$x-3y+5+7(2x+y-4)=0$$
$$x-3y+5+14x+7y-28=0$$
$$15x+4y-23=0$$

e questa retta passa per $(1,\ 2)$ in quanto, con la sostituzione $x=1,\ y=2$, l'uguaglianza risulta vera:

$$15\cdot1+4\cdot2-23=0;\quad 15+8-23=0\ \ OK$$

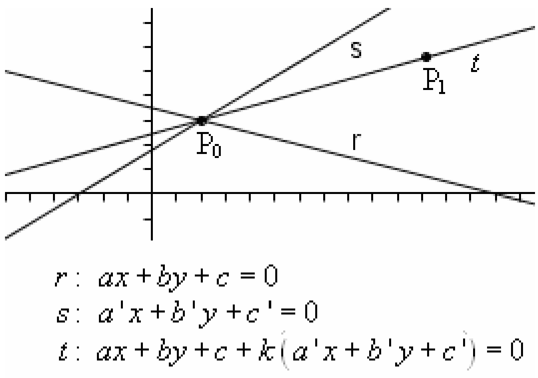
Ci chiediamo adesso: ma … la scrittura in esame

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$$

è in grado di esprimere, scegliendo in maniera opportuna il valore da assegnare a k, QUALSIASI retta del fascio in questione, oppure no?

Possiamo rispondere a questa domanda provando a indagare se, preso un qualsivoglia punto $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ del piano, sia sempre possibile trovare un valore di k per il quale la retta corrispondente passi per P_1.
Dunque: la retta

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$$



passerà per $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ se e solo se

$$ax_1+by_1+c+k(a'x_1+b'y_1+c')=0$$
$$k(a'x_1+b'y_1+c')=-(ax_1+by_1+c)$$
$$k=-\frac{ax_1+by_1+c'}{a'x_1+b'y_1+c'}$$

(*purché sia* $a'x_1+b'y_1+c\neq0$, *altrimenti il valore di* k *non esiste*).

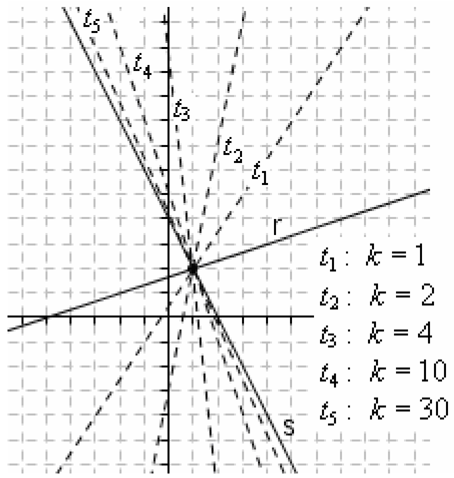
Ma allora … sarà possibile determinare un valore di k tale che la retta $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ passi per $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$, se e soltanto se risulta $a'x_1+b'y_1+c\neq0$, ossia
se e soltanto se il punto P_1 NON appartiene alla retta $s:\ a'x+b'y+c'=0$!!!

Di conseguenza l'equazione $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$
permette di rappresentare, al variare di *k*, *quasi tutte* le rette del fascio di centro P_0, ma *non proprio tutte*.
Resta esclusa infatti ogni retta P_0P_1, tale che il punto P_1 appartenga alla retta *s* …
… e allora, a ben pensarci, *resta esclusa la sola retta s*!

In realtà, si può osservare che,
quanto più si prendono valori di *k* grandi,
tanto più la retta rappresentata dall'equazione
$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$
tende a identificarsi con la retta *s*.

Ad esempio, nella figura qui a fianco,
abbiamo preso
$r:\ x-3y+5=0,\ \ s:\ 2x+y-4=0$
e abbiamo poi considerato altre rette $t_1, t_2, t_3, ...$
ottenute considerando l'equazione
$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$
e assegnando a *k* valori crescenti.

L'idea che ci facciamo è che …
la retta $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$
potrebbe andare a identificarsi con la retta *s* ..
… solo se *k* potesse raggiungere il valore "infinito"!



RIASSUNTO: FASCIO PROPRIO INDIVIDUATO DA DUE RETTE
Date le equazioni di due rette $r:\ ax+by+c=0,\ \ s:\ a'x+b'y+c'=0$ incidenti in $P_0(x_0,\ y_0)$:

- la scritturae
  $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0\ \ (k\in\mathbb{R})$
  indica, al variare di *k*, tutte le rette del fascio proprio cui appartengono *r* ed *s*, con la sola eccezione di *s*.
  Si ottiene la retta *r* con $k=0$, si ottiene una retta *prossima* a *s* con *k* tendente a infinito ($k\to\infty$).

- e la scrittura
  $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0\ \ (\lambda,\ \mu\in\mathbb{R},\ \textit{non entrambi nulli})$
  indica, al variare dei parametri, tutte le rette (nessuna esclusa) del fascio proprio di cui fanno parte *r* ed *s*.
  La retta *r* si ottiene con la combinazione $\lambda\neq 0,\ \mu=0$
  La retta *s* si ottiene con la combinazione $\lambda=0,\ \mu\neq 0$

ANALOGAMENTE, PER IL FASCIO IMPROPRIO …
Date le equazioni di due rette $r:\ ax+by+c=0,\ \ s:\ a'x+b'y+c'=0$ parallele fra loro:

- la scrittura
  $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0\ \ (k\in\mathbb{R})$
  indica, al variare di *k*, tutte le rette del fascio improprio cui appartengono *r* ed *s*, con la sola eccezione di *s*.
  Si ottiene la retta *r* con $k=0$, si ottiene una retta prossima a *s* con *k* tendente a infinito ($k\to\infty$).

- e la scrittura
  $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0\ \ (\lambda,\ \mu\in\mathbb{R},\ \textit{non entrambi nulli})$
  indica, al variare dei parametri, tutte le rette (nessuna esclusa) del fascio improprio di cui fanno parte *r* ed *s*.
  La retta *r* si ottiene con la combinazione $\lambda\neq 0,\ \mu=0$
  La retta *s* si ottiene con la combinazione $\lambda=0,\ \mu\neq 0$

UNIFICANDO LE DUE SITUAZIONI
In definitiva, date due *qualsiasi* rette $r:\ ax+by+c=0,\ \ s:\ a'x+b'y+c'=0$,
il fascio (proprio od improprio) da esse individuato si può indicare

- con $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0\ \ (k\in\mathbb{R})$
- o con $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0\ \ (\lambda,\ \mu\in\mathbb{R},\ \textit{non entrambi nulli})$

La seconda scrittura non esclude nessuna retta del fascio,
la prima scrittura ha il vantaggio di contenere un parametro solo ma esclude la retta *s*,
la quale corrisponde ad una situazione "limite" di *k* "estremamente grande":
per così dire, si otterrebbe con $k=\infty$.

ESERCIZIO SVOLTO

Verifica che l'equazione

$$(1+a)x = a(y+1)$$

rappresenta, al variare di *a*, un fascio di rette, con l'eccezione di una singola retta.
Determina le caratteristiche del fascio e individua la retta mancante.

Risoluzione

$(1+a)x = a(y+1); \;\; x + ax = ay + a; \;\; x + ax - ay - a = 0; \;\; x + a(x - y - 1) = 0$

Si tratta dunque del fascio individuato dalle due rette $x = 0$ (*asse* y) e $x - y - 1 = 0$.
Quest'ultima è la "retta mancante": l'equazione rappresenta tutte le rette del fascio, tranne la $x - y - 1 = 0$.

Poiché il sistema $\begin{cases} x = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ ha come soluzione la coppia $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$, il fascio è proprio, con centro in $(0, 1)$.

ESERCIZIO SVOLTO

Stabilisci le caratteristiche dei due fasci seguenti, e determina la retta che essi hanno in comune.

$F_1: \; y - 1 = m(x - 1)$

$F_2: \; a(2x + y + 1) + b(4x + 2y + 1) = 0$

Risoluzione

$F_1: \; y - 1 = m(x - 1)$ è il fascio di tutte le rette passanti per il punto $(1, 1)$, privato della retta verticale.

$F_2: \; a(2x + y + 1) + b(4x + 2y + 1) = 0$ è il fascio (nessuna retta esclusa) individuato dalle due rette $2x + y + 1 = 0$ e $4x + 2y + 1 = 0$.
Poiché queste sono parallele fra loro, si tratta di un fascio improprio: il fascio delle rette aventi $m = -2$.

La retta che i due fasci in questione hanno in comune è, fra le rette di equazione $y - 1 = m(x - 1)$, quella di coefficiente angolare -2 ossia la $y - 1 = -2(x - 1); \;\; y = -2x + 3$

ESERCIZI

1) Determina le caratteristiche (proprio o improprio, rette generatrici, eventuale centro, eventuali rette escluse) di ciascuno dei fasci seguenti:

a) $(2k+1)x - (k+2)y - 6(k+1) = 0$ b) $3(\lambda + \mu)x + (\lambda - \mu)y = 0$ c) $h(x - y) = k(x - y + 1)$

d) $(4h+3)x - (h+1)y = 2$ e) $y = \dfrac{x - y + 4}{a} + 2x$ f) $(1+b)(x+3y) + 2(3+b) = 0$

2) Spiega perché la seguente equazione NON rappresenta, al variare di *k*, tutto un fascio di rette, ma solo una parte di un fascio. Quali sono le rette escluse? $y = k^2 x + 3(x - 2)$

3) Determina la retta comune alla seguente coppia di fasci:

a) il fascio generato dalle due rette $5x - 2y + 4 = 0, \;\; 2x - 5y - 4 = 0$
e quello generato dalle due rette $x + y + 3 = 0, \;\; 2x - y = 0$

b) $2x + 3y + 11 + a(3x - y) = 0, \; a \in \mathbb{R}$ e $x + (b+1)y + b = 0, \; b \in \mathbb{R}$

RISPOSTE

1)

a) Fascio proprio generato da $r: x - 2y - 6 = 0$ e $s: 2x - y - 6 = 0$, di centro $(2, -2)$, privato della retta *s*
b) Fascio proprio di centro l'origine (generatrici: $y = 3x, \;\; y = -3x$), nessuna retta esclusa.
c) Fascio improprio delle rette parallele alla bisettrice del 1° e 3° quadrante
(generatrici: $x - y = 0, \; x - y + 1 = 0$), nessuna retta esclusa.
d) Fascio proprio generato da $r: y = 3x - 2$ e $s: y = 4x$, di centro $(-2, -8)$, privato della retta *s*
e) Fascio proprio generato da $r: y = x + 4$ e $s: y = 2x$, di centro $(4, 8)$, privato però sia di *r* che di *s*
f) Fascio improprio delle rette di coeff. ang. $m = -1/3$
(generatrici: $x + 3y + 6 = 0, \;\; x + 3y + 2 = 0$) privato della retta $x + 3y + 2 = 0$

2) L'equazione si può portare sotto la forma $y = (k^2 + 3)x - 6$ e dunque rappresenta le rette per $(0, -6)$ ma solo quelle di coefficiente angolare ≥ 3 (ed esclusa anche quella verticale)

3) a) $y = -2x - 4$ b) $y = x - 2$

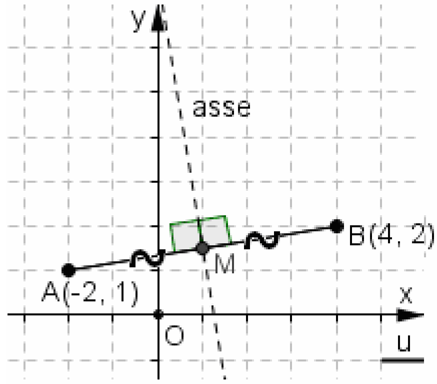
18. ASSE DI UN SEGMENTO

L'asse di un segmento è, per definizione,
la retta che è perpendicolare al segmento stesso nel suo punto medio.
Ma in Geometria si dimostra che l'asse di un segmento risulta anche essere
il luogo di tutti e soli i punti del piano, aventi la proprietà di essere equidistanti dagli estremi del segmento considerato.

Ne consegue che **per scrivere l'equazione dell'asse di un segmento AB di cui siano note le coordinate degli estremi, possiamo procedere in due modi**.

- Esempio. Scrivere l'equazione dell'asse del segmento AB, essendo $A(-2,1);\ B(4,2)$

1° MODO



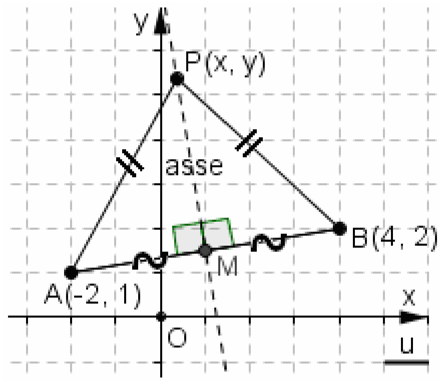
- Calcoliamo le coordinate del punto medio M di AB:
  $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1;\quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$
  da cui $\quad M\left(1, \frac{3}{2}\right)$
- Calcoliamo il coefficiente angolare della retta AB:
  $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-1}{4+2} = \frac{1}{6}$
- Il coeff. ang. dell'asse sarà l'antireciproco del coefficiente angolare del segmento: $m_a = -\frac{1}{m_{AB}} = -6$
- Ora basterà scrivere l'equazione della retta passante per $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$ e avente coeff. ang. $m = -6$:

  utilizzeremo la formula $\ y - y_0 = m(x - x_0)\ $ ottenendo $\ y - \frac{3}{2} = -6(x-1)\ \ldots\ y = -6x + \frac{15}{2}$

2° MODO (metodo "dei luoghi geometrici")

L'asse di un segmento è il luogo dei punti del piano,
aventi la proprietà di essere equidistanti dagli estremi del segmento stesso.
Ma nel piano cartesiano
l'equazione di un luogo geometrico si scrive considerando il generico punto $P(x, y)$, scrivendo l'uguaglianza che "caratterizza" il luogo, cioè l'uguaglianza che è verificata se e soltanto se P appartiene al luogo, e infine traducendo in coordinate tale uguaglianza.

$$\mathbf{P(x, y) \in \textit{luogo} \leftrightarrow PA = PB}$$



$PA = PB$

$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$

...

$2y = -12x + 15$

$y = -6x + \frac{15}{2}$

ESERCIZIO
Determina le coordinate del circocentro
(= punto di intersezione degli assi dei lati)
del triangolo ABC, con
$A(-3,0);\ B(2,-1);\ C(-4,-5)$.
Basta scrivere le equazioni di due qualsiasi dei tre assi, e porle a sistema per trovare il punto in cui si tagliano. Fai il disegno, ed esegui tu. Il circocentro cercato risulterà avere coordinate $(-1, -3)$.

Altri esercizi a pag. 49

19. CAMBIAMENTO DI RIFERIMENTO CARTESIANO

A partire dal "vecchio" sistema di riferimento Oxy,
vogliamo passare ad un "nuovo" sistema di riferimento $O'XY$,
traslato rispetto al precedente
e tale che la nuova origine O' abbia coordinate assegnate (a,b) [NOTA].

NOTA. - S'intende che tali coordinate siano relative al "vecchio" riferimento,
perché nel "nuovo" l'origine O' si troverà, ovviamente, ad avere coordinate (0,0).

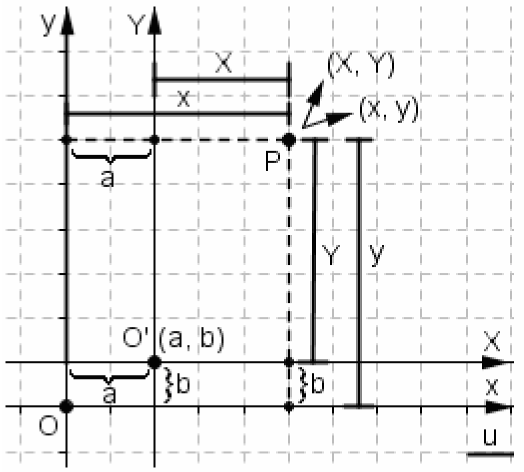
Che relazione intercorre fra le coordinate (x, y) di un punto nel vecchio riferimento e le coordinate (X,Y) dello stesso punto nel nuovo riferimento?

Semplicissimo rispondere!
Basta osservare la figura
per rendersi conto che

(1) $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$

Le (1) o, indifferentemente, le (2), vengono chiamate le "equazioni del cambiamento di riferimento per traslazione degli assi".



ESEMPIO

Si vuol passare dal riferimento Oxy al nuovo riferimento $O'XY$, traslato rispetto all'altro, e tale che $O'(2,-1)$.

a) Scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento.

b) Che coordinate avranno, nel nuovo riferimento, i vertici del triangolo ABC, se nel vecchio riferimento le coordinate sono $A(4,7);\ B(-1,0);\ C(3,-1)$?

c) Se un punto D ha coordinate $(4,-1)$ nel riferimento $O'XY$, che coordinate ha lo stesso punto D in Oxy?

a) $\begin{cases} X = x-2 \\ Y = y+1 \end{cases}$ *o, il che è lo stesso,* $\begin{cases} x = X+2 \\ y = Y-1 \end{cases}$

b) *Vecchio rif.*: $A(\underset{x}{4},\underset{y}{7});\ B(-1,0);\ C(3,-1)$ *Nuovo rif.*: $\begin{cases} X = x-2 \\ Y = y+1 \end{cases} \to A(\underset{X}{2},\underset{Y}{8});\ B(-3,1);\ C(1,0)$

c) *Nuovo rif.*: $D(\underset{X}{4},\underset{Y}{-1})$ *Vecchio rif.*: $\begin{cases} x = X+2 \\ y = Y-1 \end{cases} \to D(\underset{x}{6},\underset{y}{-2})$

PROBLEMA TIPICO
Data l'equazione di una curva nel "vecchio" riferimento,
scrivere l'equazione della stessa curva nel "nuovo", traslato rispetto al precedente.

ESEMPIO

Data, in Oxy, la curva di equazione $x^2 + y^2 = 25$,
scrivine l'equazione nel nuovo riferimento, traslato rispetto al precedente, con $O'(-4,1)$

$$\begin{cases} X = x-a \\ Y = y-b \end{cases};\quad \begin{cases} X = x+4 \\ Y = y-1 \end{cases};\quad \begin{cases} x = X-4 \\ y = Y+1 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 25 \to (X-4)^2 + (Y+1)^2 = 25 \to \ldots \to X^2 + Y^2 - 8X + 2Y - 8 = 0$$

ESERCIZIO

Nel riferimento Oxy, sono dati i due punti $A(-1,2);\ B(1,4)$.

a) Che coordinate ha l'origine O, nel riferimento $O'XY$ traslato rispetto al precedente, e tale che $O'(3,1)$?

b) Scrivi l'equazione della retta AB sia in Oxy che in $O'XY$.

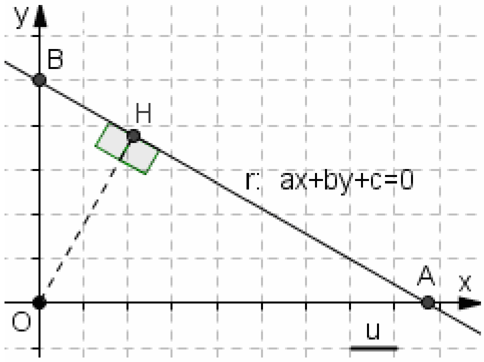
Risposte: a) $O'(-3,-1)$ b) $y = x+3;\ \ Y = X+5$

20. DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA

Tramite un cambiamento di riferimento per traslazione degli assi saremo ora in grado di ricavare un'importante formula della Geometria Analitica: la formula per la distanza di un punto da una retta.

DAPPRIMA SI DETERMINA LA FORMULA IN UN CASO PARTICOLARE:
si suppone che il punto assegnato sia l'origine.

Indichiamo con $r: ax+by+c=0$ la retta in questione.
Con riferimento alla figura, $d(\mathrm{O}, r)=\mathrm{OH}$ è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo AOB, nel quale A, B sono le intersezioni di r, rispettivamente con l'asse x e con l'asse y.



$$\mathrm{A}: \begin{cases} ax+by+c=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax+c=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{c}{a} \quad (a\neq 0) \\ y=0 \end{cases} \quad \mathrm{A}\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$$

$$\mathrm{B}: \begin{cases} ax+by+c=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} by+c=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-\dfrac{c}{b} \quad (b\neq 0) \\ y=0 \end{cases} \quad \mathrm{B}\left(-\frac{c}{b}, 0\right)$$

$$\mathrm{OA}=\left|-\frac{c}{a}\right|=\left|\frac{c}{a}\right|; \quad \mathrm{OB}=\left|-\frac{c}{b}\right|=\left|\frac{c}{b}\right|$$

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)^2+\left(-\frac{c}{b}\right)^2}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{b^2c^2+a^2c^2}{a^2b^2}}=\sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}}=\left|\frac{c}{ab}\right|\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\mathrm{OH}=\frac{cateto\cdot cateto}{ipotenusa}=\frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}{\mathrm{AB}}=\frac{\left|\frac{c}{a}\right|\cdot\left|\frac{c}{b}\right|}{\left|\frac{c}{ab}\right|\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

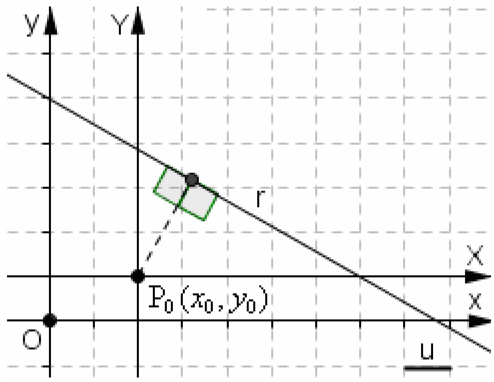
Abbiamo così trovato che la distanza dell'origine dalla retta $r: ax+by+c=0$ è data dalla formula

(1) $\boxed{d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$. (Si può osservare a posteriori che la formula, ricavata sotto l'ipotesi $a\neq 0 \wedge b\neq 0$, conserva la sua validità anche nei due casi $a=0;\ b=0$)

SUCCESSIVAMENTE, CI SI PONE NEL CASO GENERALE.
Si desidera determinare la distanza del punto $\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$ dalla retta $r: ax+by+c=0$:
insomma, ora il nostro punto non è più necessariamente l'origine.
Ma noi ci ricondurremo al caso particolare già esaminato, tramite un cambiamento di riferimento che porti l'origine in $\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$!

Scriviamo l'equazione della retta $r: ax+by+c=0$ nel nuovo riferimento.

$$\begin{cases} X=x-x_0 \\ Y=y-y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=X+x_0 \\ y=Y+y_0 \end{cases}$$



$$ax+by+c=0 \to a(X+x_0)+b(Y+y_0)+c=0; \quad aX+ax_0+bY+by_0+c=0; \quad \boxed{aX+bY+\underbrace{ax_0+by_0+c}_{\text{TERMINE NOTO}}=0}$$

Nel riferimento $X\mathrm{P}_0Y$, il punto di cui ci stiamo occupando è l'origine:
possiamo perciò applicare la precedente formula (1) ottenendo:

$$d=d(\mathrm{P}_0, r)=\frac{|\text{TERMINE NOTO}|}{\sqrt{(coeff.\,di\ X)^2+(coeff.\,di\ Y)^2}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$ Concludendo

$\boxed{d(\mathrm{P}_0, r)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ **FORMULA PER LA DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA**

ESERCIZIO Serviti della formula per calcolare un'altezza e poi l'area di ABC, con $\mathrm{A}(3,1);\ \mathrm{B}(5,2);\ \mathrm{C}(2,4)$.
(Risultato: $area=7/2$)

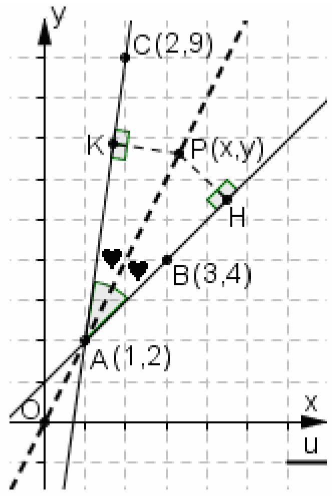
Altri esercizi a pag. 49

21. BISETTRICE DI UN ANGOLO

La bisettrice di un angolo è definita come
quella semiretta che ha origine nel vertice dell'angolo e lo divide in due parti uguali.
Ma in Geometria si dimostra che la bisettrice risulta essere pure **il luogo dei punti, appartenenti all'angolo, che hanno la proprietà di essere equidistanti dai due lati dell'angolo.**

ESEMPIO. Dati i tre punti: $A(1,2);\ B(3,4);\ C(2,9)$, scrivere l'equazione della bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}C$.

Scriveremo l'equazione della bisettrice richiesta traducendo in coordinate la proprietà caratteristica PH = PK , essendo $P(x,y)$ il generico punto del piano cartesiano, H e K le sue proiezioni sui due lati dell'angolo considerato.



Per esprimere in coordinate le due distanze PH e PK
(ciascuna delle quali è la distanza di un punto da una retta),
abbiamo bisogno innanzitutto delle equazioni delle due rette AB, AC.

$\boxed{eq.\ retta\ \mathrm{AB}}$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1};\quad \frac{y-2}{4-2}=\frac{x-1}{3-1};\ \dots\ ;\ y=x+1\ \textit{oppure}\ \boxed{x-y+1=0}$$

$\boxed{eq.\ retta\ \mathrm{AC}}$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1};\quad \frac{y-2}{9-2}=\frac{x-1}{2-1};\ \dots\ ;\ y=7x-5\ \textit{oppure}\ \boxed{7x-y-5=0}$$

Ora impostiamo l'uguaglianza $PH=PK$, cioè $d(P,AB)=d(P,AC)$ dove P è il generico punto $P(x,y)$.
Sappiamo che per calcolare la distanza di un punto da una retta dobbiamo applicare la formula

$$d(P_0,r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ ossia dobbiamo:

- considerare l'equazione della retta in forma IMPLICITA: $ax+by+c=0$
- prenderne soltanto il primo membro $ax+by+c$
- sostituire al posto di x, y le due coordinate del punto in questione
- racchiudere quanto ottenuto entro le stanghette di valore assoluto
- dividere per la quantità $\sqrt{a^2+b^2}$

Equazione bisettrice: $PH=PK$ *ovvero* $d(P,AB)=d(P,AC)$

$$\boxed{\frac{|x-y+1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|7x-y-5|}{\sqrt{49+1}}}$$

perché nel nostro caso il punto è $P(x,y)$ e quindi si tratta di ... sostituire x al posto di x e y al posto di y!

$$\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}=\frac{|7x-y-5|}{5\sqrt{2}}\qquad 5|x-y+1|=|7x-y-5|$$

$$5x-5y+5=\pm(7x-y-5)\begin{cases}5x-5y+5=7x-y-5; & \boxed{y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}\\ 5x-5y+5=-7x+y+5; & \boxed{y=2x}\end{cases}$$

Che è successo?
Il luogo da noi considerato era una SEMIRETTA, ma qui abbiamo ottenuto le equazioni di DUE RETTE!
Il fatto è che impostando l'uguaglianza $d(P,AB)=d(P,AC)$ e traducendola in coordinate, noi abbiamo scritto, appunto, l'equazione del luogo dei punti la cui distanza dalla retta $r_1=AB$ è uguale alla distanza dalla retta $r_2=AC$; e tale luogo è costituito dalle SEMIRETTE BISETTRICI DI BEN 4 ANGOLI (a 2 a 2 opposti al vertice), o, se si preferisce, dalle due rette una delle quali fa da bisettrice per l'angolo $B\widehat{A}C$ e per il suo opposto al vertice, l'altra fa da bisettrice per la coppia di angoli opposti al vertice che sono adiacenti a $B\widehat{A}C$.
Ora, **fra le due rette trovate, una delle due andrà scartata**.

E' evidente che **la retta che va bene per noi è quella** "in salita" ovvero **con coeff. angolare >0**: la $\boxed{y=2x}$.

ESERCIZIO Trovare le coordinate dell'incentro del triangolo formato dalle tre rette

$$y=\frac{1}{4}x+3;\quad y=-4x+3;\quad 5x-3y-8=0\quad [\text{Soluzione: } I\left(\frac{5}{2}\left(2-\sqrt{2}\right),\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)]$$

Altri esercizi a pag. 49

22. ESERCIZI (ASSE, DISTANZA, BISETTRICE)

1) Scrivi l'equazione dell'asse del segmento avente per estremi i punti A e B, procedendo prima nell'uno e poi nell'altro dei due modi possibili:
   I) perpendicolare a quel segmento, passante per il punto medio del segmento stesso
   II) luogo dei punti del piano, aventi la proprietà di essere equidistanti dagli estremi del segmento.

   a) $A(3,5);\ B(7,3)$ b) $A(0,7);\ B(2,0)$ c) $A(-2,4);\ B(4,2)$ d) $A\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right);\ B\left(3,\frac{1}{2}\right)$

2) Qual è il punto del piano equidistante dalla terna di punti indicata?
   a) $A(-4,5);\ B(0,1);\ C(4,2)$ b) $A(-3,-2);\ B(1,-1);\ C(3,2)$ c) $A(-4,0);\ B(4,1);\ O(0,0)$

3) Calcola la distanza del punto $W(-1,3)$ dalle seguenti rette:

   a) $y=\frac{9}{40}x+1$ b) $y=-\frac{5}{12}x+\frac{5}{12}$ c) $24x-7y+5=0$ d) $20x+21y+41=0$ e) $y=\frac{3}{4}x$

4) Quanto vale la distanza del punto $(1,1)$ dalla retta di equazione $ax+by+c=0$?

5) Considera il triangolo di vertici $O(0,0);\ B(-8,-6);\ C(0,9)$ e calcola le distanze del punto $P(-3,2)$ dai suoi tre lati.

6) Considera il triangolo di vertici $A(-7,-4);\ B(1,2);\ C(-1,4)$ e calcola le distanze del punto $P(-2,1)$ dai suoi tre lati (uno dei calcoli prevede la razionalizzazione di una frazione).

7) Per ciascuna delle seguenti coppie di rette, scrivi le equazioni delle bisettrici dei due angoli che esse formano.

   a) $y=\frac{5}{12}x+\frac{7}{12}$ e $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$ b) $8x-15y+22=0$ e $24x+7y-38=0$

   c) $3x-4y+2=0$ e $4x-3y+5=0$ d) $y=0$ e $11x-60y-71=0$ e) $y=4x$ e $y=\frac{1}{4}x$

8) Sono dati i tre punti $O(0,0);\ A(3,0);\ B(3,4)$. Scrivi l'equazione della bisettrice dell'angolo $A\hat{O}B$ e, detta C l'intersezione di tale bisettrice con AB, verifica, sul triangolo AOB, che vale (Teorema della Bisettrice) la proporzione AC:CB = OA:OB

9) Trova, nei due casi, il centro della circonferenza inscritta e della circonferenza circoscritta al triangolo ABC.
   a) $A(-4,-4);\ B(-1,0);\ C(2,-4)$ b) $A(0,0);\ B(9,0);\ C(9,12)$

10) E' dato il triangolo di vertici $A(11,12);\ B(5,4);\ C(5,20)$.
    Determina le equazioni dei tre: a) assi b) bisettrici c) mediane
    e le coordinate di: circocentro, incentro, baricentro

11) Stesse richieste dell'esercizio precedente, per il triangolo di vertici $O(0,0);\ A(12,9);\ B(24,-7)$

RISPOSTE

1) a) $y=2x-6$ b) $4x-14y+45=0$ c) $y=3x$ d) $960x+216y-1307=0$

2) a) $\left(\frac{9}{10},\frac{59}{10}\right)$ b) $\left(-\frac{11}{5},\frac{33}{10}\right)$ c) $\left(-2,\frac{33}{2}\right)$ 3) a) $d=\frac{89}{41}$ b) $d=2$ c) $d=\frac{8}{5}$ d) $d=\frac{84}{29}$ e) $d=3$

4) $d=\frac{|a+b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 5) $\frac{11}{17},\ 3,\ \frac{17}{5}$ 6) $1,\ 1,\ 2\sqrt{2}$

7) a) $7x+4y-11=0;\ 4x-7y+3=0$ b) $8x+19y-46=0;\ 19x-8y-3=0$
   c) $x+y+3=0;\ x-y+1=0$ d) $11x-121y-71=0;\ 11x+y-71=0$ e) $y=x;\ y=-x$

8) $y=\frac{1}{2}x$ 9) a) $\left(-1,-\frac{5}{2}\right);\ \left(-1,-\frac{25}{8}\right)$ b) $(6,3);\ \left(\frac{9}{2},6\right)$

10) *a)* $y=12;\ 3x+4y-56=0;\ 3x-4y+40=0;$
    b) $y=12;\ y=3x-11;\ y=-3x+35;$
    c) $y=12;\ y=4x-16;\ y=-4x+40$
    $Circ:\left(\frac{8}{3},12\right);\ inc:\left(\frac{23}{3},12\right);\ bar:(7,12)$

11) *a)* $8x+6y-75=0;\ 3x-4y-50=0;\ 48x-14y-625=0;$
    b) $y=\frac{2}{11}x;\ y=7x-75;\ y=-\frac{9}{13}x+\frac{125}{13};$
    c) $y=\frac{1}{18}x;\ x=12;\ 23x+36y-300=0$
    $Circ.:\left(12,-\frac{7}{2}\right);\ inc.:(11,2);\ bar.:\left(12,\frac{2}{3}\right)$

23. ESERCIZI CONCLUSIVI SULLA RETTA

1) a) Calcolare la distanza fra le due rette parallele $y=2x+4;\ \ y=2x-1$.
b) Scrivere l'equazione del luogo dei punti del piano cartesiano, equidistanti dalle due rette considerate.

2) Fra le rette passanti per il punto $(-2,\,3)$,
quali intercettano sull'asse *x* un segmento doppio di quello intercettato sull'asse *y*?

3) Sulla retta $r: y=x+1$ determinare un punto C
in modo che il triangolo ABC, essendo $\mathrm{A}(2,\,1);\ \mathrm{B}(5,\,3)$, abbia area 5.

4) Per quale valore del parametro *a* il baricentro del triangolo di vertici
$(2a-1,\,1);\ \ (b,\,a+3);\ \ (a-3b,\,a+b)$
cade nel punto $(1,\,3)$?

5) Per quale valore di *k* i due punti $\mathrm{A}(k,\,k+1)$ e $\mathrm{B}(2k,\,5-k)$ sono allineati con l'origine?

6) Trovare i vertici di un triangolo rettangolo isoscele, dato il vertice dell'angolo retto $\mathrm{C}(3,\,-1)$
e l'equazione dell'ipotenusa $3x-y+2=0$.

7) Qual è il punto, sulla retta $x+3y-12=0$, equidistante dai punti $\mathrm{A}(0,-1)$ e $\mathrm{B}(7,0)$?

8) Di un triangolo ABC sono noti i vertici $\mathrm{A}(2,\,-1)$ e $\mathrm{B}(7,5)$ nonché l'ortocentro $\mathrm{L}(2,\,4)$.
Determinare il vertice C.

9) Dati $\mathrm{A}(-1,\,5)$ e $\mathrm{B}(1,\,3)$, determinare i punti, sulla retta $y=2x+3$,
che "vedono" il segmento AB sotto un angolo di 90°.

10) Sono dati i punti: $\mathrm{A}(0,3);\ \mathrm{B}(4,0);\ \mathrm{C}(6,t),$ con $t>0$.
Si chiede di determinare il quarto vertice del parallelogrammo ABCD, in modo che la retta BD individui con gli assi cartesiani un triangolo di area 28.

11) E' dato il triangolo ABC, con $\mathrm{A}(-1,\,1);\ \mathrm{B}(4,\,1);\ \mathrm{C}(1,\,5)$.
Dopo aver verificato che il triangolo è isoscele (il che aiuterà a svolgere più velocemente il problema),
determinare le coordinate:
del circocentro; del baricentro; dell'incentro; dell'ortocentro;
del punto P, sul segmento AC, tale che $\mathrm{PO}^2+\mathrm{PC}^2=14$.

12) Determinare i punti, sulla retta $y=2$, equidistanti dalle due rette *r*, *s* di equazioni:
$3x-4y-1=0;\ \ 4x-3y+6=0$

13) Stabilire per quale valore di *a* i punti
$\mathrm{A}(a,\,1-a);\ \ \mathrm{B}(2+a,\,-a);\ \ \mathrm{C}(1,\,a-1)$
NON possono essere vertici di un triangolo.

14) Determinare una retta orizzontale
affinché i suoi due punti di intersezione A, B con le rette $x-2y=0;\ \ x+y=9$ individuino,
insieme con le rispettive proiezioni $\mathrm{A}',\,\mathrm{B}'$ sull'asse delle ascisse, un rettangolo di area 6

RISPOSTE:

1) a: $d=\sqrt{5}$ b: $y=2x+\dfrac{3}{2}$ 2) $y=\dfrac{1}{2}x+4;\ \ y=-\dfrac{1}{2}x+2;\ \ y=-\dfrac{3}{2}x$ (l'ultima soluzione è "degenere")

3) $\mathrm{C}_1(-14,\,-13);\ \ \mathrm{C}_2(6,\,7)$ 4) $a=2,\ b=1$ 5) Per $k=1$ e anche per $k=0$ 6) $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{5},\,\dfrac{19}{5}\right);\ \ \mathrm{B}\left(-\dfrac{9}{5},\,-\dfrac{17}{5}\right)$

7) $(3,\,3)$ 8) $\mathrm{C}\left(\dfrac{4}{5},\,5\right)$ 9) $(1,\,5)$ e $\left(-\dfrac{1}{5},\,\dfrac{13}{5}\right)$ 10) $t=4$

11) circocentro: $\left(\dfrac{3}{2},\,\dfrac{9}{4}\right)$; incentro: $\left(\sqrt{5}-1,\,\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}\right)$; baricentro: $\left(\dfrac{4}{3},\,\dfrac{7}{3}\right)$; ortocentro: $\left(1,\,\dfrac{5}{2}\right)$

$\mathrm{P}_1(0,3);\ \ \mathrm{P}_2\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{13}{5}\right)$ 12) $(-9,\,2);\ \left(\dfrac{9}{7},\,2\right)$ 13) $a=1$ 14) $y=1;\ \ y=2;\ \ y=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

ALTRI ESERCIZI

1) Stabilisci per quale valore di k il punto $A(k, 1-k)$
   a) è tale che il baricentro di AOB, essendo O l'origine e $B(0, 2)$, sta sulla retta $2x+y+1=0$;
   b) è tale che l'asse del segmento OA passa per $W(1/2, 0)$

2) Di un triangolo ABC sono noti il vertice $A(1, 3)$ e il punto medio $M(2, 5)$ del lato AC;
   si sa inoltre che il vertice B appartiene alla retta di equazione $x-2y+12=0$
   e infine che l'area del triangolo è 5.
   Trovare le coordinate dei vertici B e C.

3) a) Trovare i valori del parametro k per cui le due rette:
   $r:\ y=kx+k$
   $s:\ y=(k-1)x+2$
   si intersecano sull'asse delle ascisse.
   b) In corrispondenza del minore fra i due valori trovati,
   scrivere le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette
   e calcolare la distanza fra i due punti in cui tali bisettrici intersecano l'asse delle ordinate.

4) Considera le due rette
   $$r: y=\frac{1}{2}x+3;\quad s: y=2x+3$$
   e prendi due punti, A su r e B su s, aventi la stessa ordinata.
   Dette A' e B' le proiezioni di A e B rispettivamente, sull'asse delle ascisse,
   determina le coordinate di A e di B in modo che il rettangolo $A'B'BA$ abbia area 15.

5) Trova il valore di k per cui le due rette $r: 2x-ky+1=0;\ \ s: (k+2)x+y+4=0$ sono perpendicolari;
   verifica poi che, in questo caso, il loro punto di intersezione ha coordinate $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$

6) Determina le coordinate dei vertici dei due triangoli isosceli,
   aventi per base il segmento di estremi $A(1,0);\ B(5,-2)$ e aventi area 5.

7) Per quali valori del parametro k la terna di punti $A(1, k);\ B(k, k+2);\ C(k-1, 1)$
   è tale che l'angolo $B\widehat{A}C$ è retto?

8) Considerato il triangolo di vertici: $A(0,-3);\ B(7,-4);\ C(-1, 4)$
   a) verificare che è isoscele sulla base BC;
   b) scrivere l'equazione della mediana AM, la quale risulterà anche altezza e bisettrice;
   c) determinare le coordinate del baricentro G;
   d) determinare le coordinate dell'ortocentro E;
   e) determinare le coordinate del circocentro K;
   f) determinare le coordinate dell'incentro I.

RISPOSTE:

1) a) $k=-6$ b) $k=1/2 \vee k=1$ 2) $C(3,7);\ B_1(0,6),\ B_2\left(\frac{20}{3}, \frac{28}{3}\right)$

3) a) $k=3 \vee k=0$; b) $y=\left(\sqrt{2}+1\right)x-2\left(\sqrt{2}+1\right);\ \ y=-\left(\sqrt{2}-1\right)x+2\left(\sqrt{2}-1\right);\ \ d=4\sqrt{2}$

4) $A(4, 5);\ B(1, 5) \vee A(-10,-2);\ B\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$ 5) $k=-4$ 6) $C_1(2,-3);\ C_2(4,1)$ 7) $k=4,\ k=1$

8) a) $AB=AC=5\sqrt{2}$ b) $y=x-3$ c) $G(2,-1)$ d) $E\left(-\frac{7}{3}, -\frac{16}{3}\right)$ e) $K\left(\frac{25}{6}, \frac{7}{6}\right)$ f) $I\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

24. LA PARABOLA NEL PIANO CARTESIANO

Cosa si intende per "parabola"?

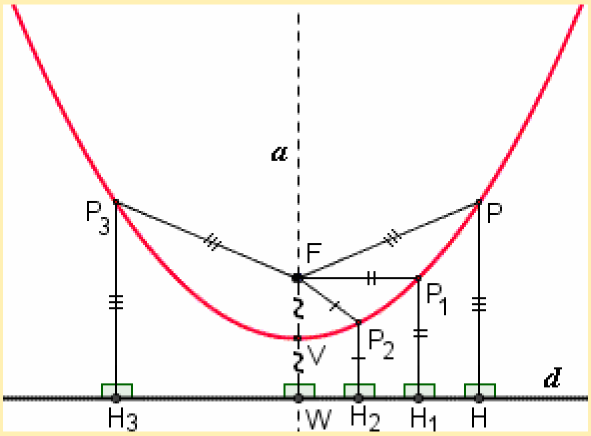
*La definizione di "parabola" può essere posta in più modi,
assai diversi l'uno dall'altro, che si dimostrano esser fra loro equivalenti.
Noi sceglieremo, come la maggior parte dei libri di testo, la definizione seguente.*

DEFINIZIONE DI PARABOLA

Si dice "parabola" il luogo dei punti del piano, aventi la proprietà di essere equidistanti da un punto fisso F detto "fuoco" e da una retta fissa *d* detta "direttrice".

Una parabola ha evidentemente (NOTA) *un asse di simmetria (la perpendicolare alla direttrice passante per il fuoco, tratteggiata e indicata con* ***a*** *nella figura).*

Il punto medio ***V*** *del segmento di perpendicolare FW condotto dal fuoco alla direttrice appartiene alla parabola e ne è detto il "vertice".*

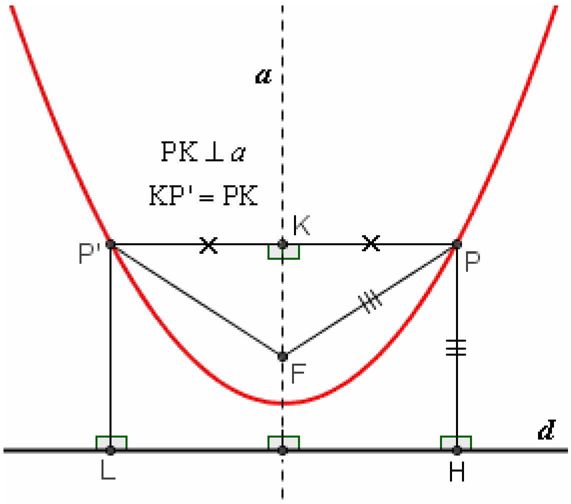


La parabola fa parte, con l'ellisse e con l'iperbole, di una famiglia di importantissime curve chiamate CONICHE.

NOTA
Che la perpendicolare alla direttrice passante per il fuoco sia asse di simmetria per la curva precedentemente definita, è del tutto intuitivo: tuttavia, è anche facilmente dimostrabile coi ben noti teoremi della Geometria euclidea.

Facciamo vedere che se un punto P appartiene alla curva, allora vi apparterrà senz'altro anche il simmetrico di P rispetto alla retta *a*.

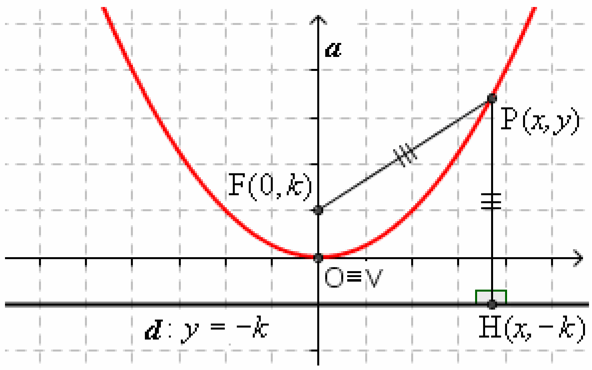
Infatti, con riferimento alla figura:
sia P un punto appartenente alla parabola;
sia P' il simmetrico di P rispetto alla retta *a*;
indichiamo con L la proiezione di P' su *d*.
E' immediato osservare che i due triangoli PKF, P'KF sono uguali per il 1° Criterio e dedurne che P'F = PF ;
è poi P'L = PH in quanto distanze di due rette parallele.
essendo allora PF = PH , perché P appartiene alla parabola, sarà pure P'F = P'L , quindi anche P' apparterrà alla parabola, come volevasi dimostrare.



LA PARABOLA NEL PIANO CARTESIANO

Supponiamo dapprima, per semplicità, che l'asse della parabola coincida con l'asse *y*, e il vertice con l'origine.
Il fuoco F avrà allora coordinate $(0, k)$ e la direttrice avrà equazione $y = -k$.
La costante *k* potrà essere positiva o negativa; nella figura, l'abbiamo supposta positiva.

$$\mathrm{P}(x, y)$$
$$\textit{fuoco } \mathrm{F}(0, k)$$
$$\textit{direttrice } d : y = -k$$
$$\mathrm{PF} = \mathrm{PH} \quad (\mathrm{PH} = dist.(\mathrm{P}, d))$$
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-k)^2} = |y+k|$$
$$x^2 + \cancel{y^2} - 2ky + \cancel{k^2} = \cancel{y^2} + 2ky + \cancel{k^2}$$
$$x^2 - 4ky = 0$$
$$\boxed{y = \frac{1}{4k}x^2 \quad \text{ossia} \quad y = ax^2, \quad \text{se poniamo} \quad a = \frac{1}{4k}}.$$



Fin qui, abbiamo dimostrato che

l'equazione della parabola di fuoco $F(0,k)$ e direttrice $d: y=-k$

è $y=ax^2$, con $a=\dfrac{1}{4k}$ (e dunque, inversamente, $k=\dfrac{1}{4a}$).

Viceversa,

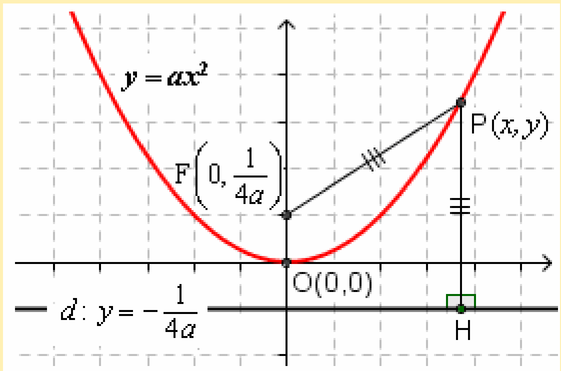
fissata ad arbitrio una costante non nulla *a*, l'equazione $y=ax^2$ rappresenterà *sempre* una parabola: infatti, se si prova a scrivere l'equazione della parabola di fuoco $F\left(0,\dfrac{1}{4a}\right)$ e direttrice $d: y=-\dfrac{1}{4a}$,

si trova proprio $y=ax^2$.

L'essenziale del discorso può essere riassunto nel quadro seguente.

L'equazione $y=ax^2$ rappresenta una parabola con

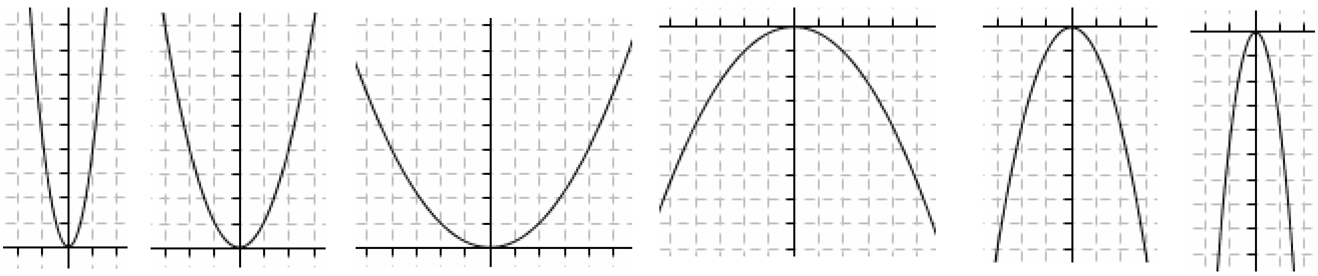
- **vertice nell'origine,**
- **asse coincidente con l'asse *y*,**
- **fuoco $F(0,k)$ con $k=\dfrac{1}{4a}$**
- **e direttrice $d:\ y=-\dfrac{1}{4a}$.**



La quantità $\dfrac{1}{4a}$ fornisce la distanza *orientata* vertice-fuoco
(se è positiva, il fuoco sta sopra il vertice, se negativa sotto).

Se ora andiamo a disegnare la funzione $y=ax^2$ per diversi valori di *a*,

$a=4$ $\quad a=1$ $\quad a=1/4$ $\quad a=-1/4$ $\quad a=-1$ $\quad a=-4$



potremo osservare che

- **con $a>0$, la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto $\cup$;**
- **con $a<0$, la parabola ha concavità rivolta verso il basso $\cap$.**

Ciò è perfettamente coerente col fatto che *k*, ordinata del fuoco,
essendo uguale a $1/(4a)$, ha lo stesso segno di *a*: poiché ora la parabola "gira intorno al fuoco",

♪ con *a*>0, *k*>0 la concavità sarà verso l'alto $\cup$,
♫ con *a*<0, *k*<0 la concavità sarà verso il basso $\cap$.

Il numero *a* viene spesso chiamato "il parametro" della parabola.

E' davvero fondamentale ricordare che la quantità $\dfrac{1}{4a}$ fornisce la distanza orientata vertice-fuoco.

Inoltre:

- quanto più $|a|$ è grande,
  tanto più la parabola è rapida nel suo impennarsi (verso l'alto o verso il basso),
- mentre se $|a|$ è piccolo
  avremo, invece, una parabola che si impenna lentamente e ha una curvatura più "dolce".

Per questo, la costante $|a|$ è detta "apertura" della parabola.

EQUAZIONE DI UNA PARABOLA
CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE *y*, E VERTICE $V(x_0, y_0)$

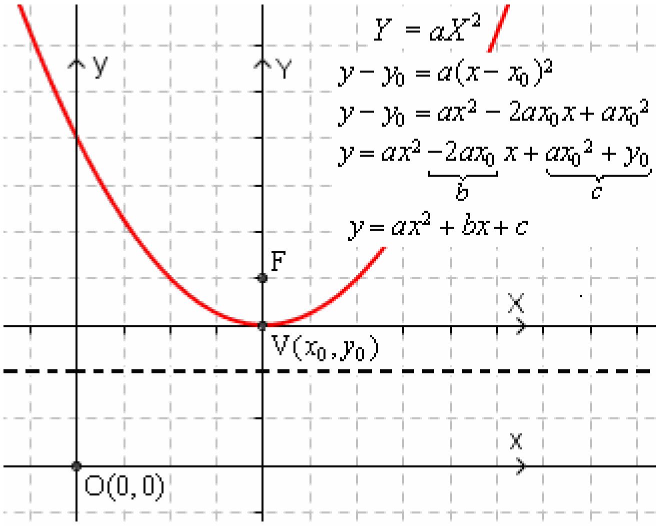
E' giunto il momento di abbandonare l'ipotesi che il vertice della nostra parabola coincida con l'origine: vogliamo infatti porci in condizioni *più generali*.

Il vertice della parabola potrà ora stare in una posizione qualsiasi: indichiamolo con $V(x_0, y_0)$.

Continueremo però ancora a supporre che l'asse della parabola sia parallelo all'asse y (e quindi la direttrice, che è perpendicolare all'asse, sia parallela all'asse x).

Possiamo ricavare l'equazione della nostra parabola ponendoci inizialmente in un riferimento cartesiano ausiliario, nel quale il vertice della parabola coincida con l'origine, per poi ritornare al riferimento cartesiano iniziale.

Passiamo dunque al nuovo riferimento cartesiano XVY, avente l'origine in V, e *traslato* rispetto al sistema di riferimento originario xOy.



Nel riferimento XVY, la parabola avrà equazione della forma $Y = aX^2$,

dove $a = \dfrac{1}{4k}$, $k = \dfrac{1}{4a}$, essendo k l'ordinata del fuoco nel *nuovo* riferimento (k è la misura con segno del segmento orientato vertice-fuoco VF).

Ma le equazioni del cambiamento di riferimento sono

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

per cui, ritornando al "vecchio" riferimento xOy, l'equazione

$$Y = aX^2$$

diventerà

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2$$

Pertanto

EQUAZIONE DI UNA PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE *y* NOTO IL VERTICE

$\boldsymbol{y - y_0 = a(x - x_0)^2}$ **è l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse *y* e vertice** $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$

Il segmento orientato vertice-fuoco (VF) ha misura relativa $\boldsymbol{\dfrac{1}{4a}}$

Se sviluppiamo i calcoli, otterremo

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2$$
$$y - y_0 = ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2$$
$$y = ax^2 \underbrace{-2ax_0}_{b}\, x + \underbrace{ax_0^2 + y_0}_{c}$$
$$y = ax^2 + bx + c$$

Abbiamo così scoperto che

EQUAZIONE GENERALE DI UNA PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE *y*

Una parabola con asse parallelo all'asse *y* ha equazione della forma

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)}$$

dove la quantità $\boldsymbol{\dfrac{1}{4a}}$ **fornisce la misura relativa del segmento orientato vertice-fuoco VF**

Occupiamoci ora del **viceversa:** **data un'equazione della forma $y = ax^2 + bx + c$,**
dove a, b, c sono tre costanti reali $(a \neq 0)$,
siamo sicuri che essa rappresenti sempre una parabola?

Per rispondere, andiamo a vedere se è sempre possibile passare dalla forma $y = ax^2 + bx + c$
alla forma $y - y_0 = a(x - x_0)^2$, che individuerebbe la parabola con asse parallelo all'asse y e vertice (x_0, y_0).

$$y = ax^2 + bx + c; \quad y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right); \quad y = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right);$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]; \quad y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]; \quad y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a};$$

$$y + \frac{\overbrace{b^2 - 4ac}^{\Delta}}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \textit{OSSIA} \quad y - y_0 = a\left(x - x_0\right)^2 \quad \textit{con } x_0 = -\frac{b}{2a}, \; y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Possiamo allora trarre la conclusione seguente.

L'equazione $y = ax^2 + bx + c$, qualunque sia il valore della terna di coefficienti reali a, b, c $(a \neq 0)$, rappresenta sempre una parabola con asse parallelo all'asse y.

Il vertice di tale parabola ha coordinate $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{\Delta}{4a}$, si ha cioè $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

- Con $a > 0$, la parabola ha la **concavità rivolta verso l'alto** $\cup$;
- e con $a < 0$, ha la **concavità rivolta verso il basso** $\cap$. Il numero a è detto il "**parametro**" della parabola.
- **Quanto più il valore assoluto di a è grande ,**
  tanto più la parabola è rapida nel suo impennarsi (verso l'alto o verso il basso),
  mentre se il valore assoluto di a è piccolo avremo, invece, una parabola che si impenna lentamente e ha una curvatura più "dolce". Per questo, il numero $|a|$ è detto "**apertura**" della parabola.

E il fuoco della parabola, che coordinate avrà? E quale sarà l'equazione della direttrice?
Per rispondere, è sufficiente ricordare il ruolo che il parametro a ricopre in tutto questo discorso:

$a = \frac{1}{4k}$, ovvero $k = \frac{1}{4a}$, con k = misura con segno del segmento orientato vertice-fuoco.

Sarà allora $\quad \boldsymbol{y_F = y_V + \frac{1}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a} = \frac{1-\Delta}{4a}; \qquad d: y = y_V - \frac{1}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a} = -\frac{1+\Delta}{4a}}$

RIASSUMENDO: DALL'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA ALLE COORDINATE DI VERTICE E FUOCO E ALLE EQUAZIONI DI ASSE E DIRETTRICE

Nella parabola di equazione $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$, si ha $\boxed{V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right); \; F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right); \; d: y = -\frac{1+\Delta}{4a}}$.

Le ordinate che compaiono in tali formule possono essere "ricostruite" senza fatica a partire dalla sola ascissa del vertice

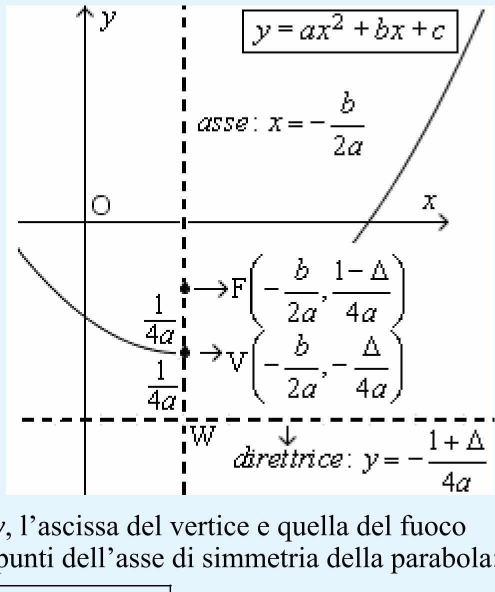
$$\boxed{x_V = -\frac{b}{2a}}$$

Infatti, poiché V sta sulla parabola, si ha subito

$$y_V = a{x_V}^2 + by_V + c$$

e basterà poi tenere presente che l'ordinata y_F del fuoco e l'ordinata costante y_d di tutti i punti della direttrice possono essere ricavate dall'ordinata y_V del vertice, addizionandole e rispettivamente sottraendole la quantità

$$\boxed{\frac{1}{4a} = \text{misura relativa del segmento orientato vertice-fuoco} = VF = WV}$$



Ovviamente, essendo l'asse parallelo all'asse y, l'ascissa del vertice e quella del fuoco coincidono anche con l'ascissa costante di tutti i punti dell'asse di simmetria della parabola:

$$\boxed{x_F = x_V = -\frac{b}{2a}; \quad asse: \; x = -\frac{b}{2a}}$$

ESEMPI SVOLTI

1) *E' data la parabola di equazione* $y = x^2 - 2x - 8$.
Disegna la curva, poi determina:
le coordinate del vertice e del fuoco; l'equazione dell'asse e della direttrice.
Quanto vale il "parametro" di questa parabola? Quanto vale l' "apertura"?

Quando si deve disegnare una parabola,
conviene innanzitutto calcolare la quantità $-\frac{b}{2a}$,
che esprime: l'ascissa del vertice, l'ascissa del fuoco
e l'ascissa costante di tutti i punti dell'asse di simmetria.

Nel nostro caso, è $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = +1$.

Dunque potremo disegnare per prima cosa,
tratteggiato, l'asse di simmetria $x = +1$,
che ci sarà *molto utile* in quanto,
nel disegnare poi la parabola, dopo aver
1) dato a x un valore,
2) calcolato il corrispondente valore di y,
3) e segnato sul foglio il punto corrispondente,

potremo, senza altri calcoli,
posizionare immediatamente *un altro* punto:
il simmetrico del precedente, rispetto all'asse.

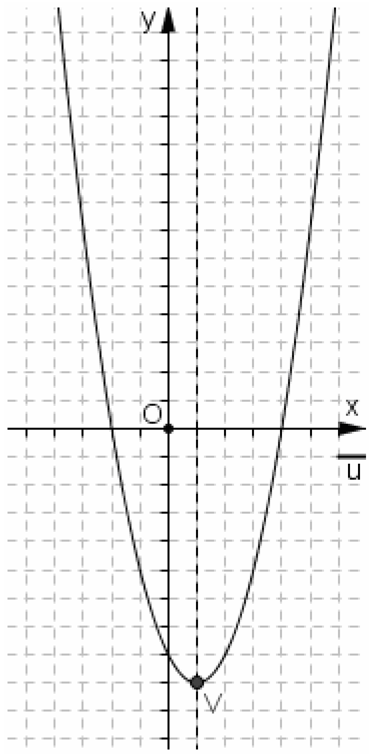
Per fare un esempio, con riferimento alla figura qui a fianco,
dopo aver segnato il punto $(0, -8)$
potremo subito segnare anche il punto $(2, -8)$.

Ora, per quanto riguarda l'ordinata del vertice,
la cui ascissa è $x_V = -\frac{b}{2a} = 1$, essa potrà essere calcolata:

- tramite la formula
$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}{4 \cdot 1} = -\frac{4+32}{4} = -\frac{36}{4} = -9$$
- oppure,
più semplicemente e senza bisogno di ricordare formule,
sostituendo l'ascissa nota nell'equazione della parabola:
$$y_V = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = 1 - 2 - 8 = -9$$

Per l'ordinata del fuoco,
e l'ordinata costante di tutti i punti della direttrice,
di può procedere con le formule note
oppure ricordare soltanto che
la *distanza orientata vertice-fuoco* è
$$\frac{1}{4a} = \frac{1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{4}$$
e, addizionando poi sottraendo questa quantità
all'ordinata del vertice, si ottengono rispettivamente
l'ordinata del fuoco e l'ordinata che caratterizza la direttrice.
Dunque:
$$y_F = y_V + \frac{1}{4} = -9 + \frac{1}{4} = -\frac{35}{4}$$
$$\textit{direttrice}: \ y = y_V - \frac{1}{4} = -9 - \frac{1}{4} = -\frac{37}{4}$$

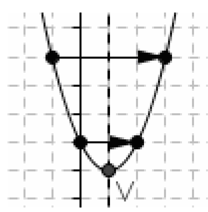
Il "parametro" di questa parabola vale $a = 1$
L' "apertura" vale $|a| = |1| = 1$.



x	$y = x^2 - 2x - 8$
–4	16
–3	7
–2	0
–1	–5
0	–8
1	–9
2	–8
3	–5
4	0
5	7
6	16

Come spiegato qui a sinistra, una volta
determinata una coppia (x, y) e quindi
disegnato un punto, se ne può subito
segnare un altro ossia il simmetrico,
rispetto all'asse tratteggiato,
del punto individuato prima.

Ciò permette di risparmiare,
pressappoco, la metà dei calcoli.



2) *Scrivi l'eq. della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per i 3 punti* $A(-1,3);\ B(1,5);\ C(4,-7)$.

L'equazione generale di una parabola con asse parallelo all'asse y è $y = ax^2 + bx + c$.
Ci sono 3 parametri da determinare, dunque:
ma abbiamo appunto 3 condizioni, le condizioni di appartenenza dei 3 punti.

$$\begin{array}{c} A(-1,3) \\ B(1,5) \\ C(4,-7) \end{array} \begin{cases} 3 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c \\ 5 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \\ -7 = a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a - b + c \\ 5 = a + b + c \\ -7 = 16a + 4b + c \end{cases} \quad \begin{cases} a - b + c = 3 \\ a + b + c = 5 \\ 16a + 4b + c = -7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} (2)-(1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} 2b = 2;\ b = 1 \\ a + 1 + c = 5;\ a + c = 4 \\ 16a + 4 + c = -7;\ 16a + c = -11 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} (1) \\ (3)-(2) \\ (2) \end{array} \begin{cases} b = 1 \\ 15a = -15;\ a = -1 \\ -1 + c = 4;\ c = 5 \end{cases}$$

La parabola che ci interessa è perciò la $\boxed{y = -x^2 + x + 5}$.

3) *Scrivere l'eq. della parabola, con asse parallelo all'asse y, che ha per vertice* $V(1,4)$ *e passa per* $P(-2,1)$.
Determinare successivamente: il fuoco; l'equazione dell'asse e della direttrice; il parametro; l'apertura.

L'equazione di una parabola di cui sia noto il vertice si può scrivere con la formula $y - y_0 = a(x - x_0)^2$
che nel nostro caso diventa $y - 4 = a(x-1)^2$
Determineremo il valore del parametro a imponendo l'appartenenza del punto $P(-2,1)$ e quindi scrivendo

$$1 - 4 = a(-2-1)^2;\ -3 = 9a;\ a = -\frac{1}{3}.$$

L'equazione è perciò

$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x-1)^2;\ 3(y-4) = -(x-1)^2;\ 3y - 12 = -x^2 + 2x - 1;\ 3y = -x^2 + 2x + 11;\ y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

Ora, per quanto riguarda il fuoco è $x_F = x_V = 1;\quad y_F = y_V + \dfrac{1}{4a} = 4 + \dfrac{1}{4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)} = 4 + \dfrac{1}{-\frac{4}{3}} = 4 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{13}{4}$.

La direttrice ha equazione $d: y = y_V - \dfrac{1}{4a};\quad y = 4 - \dfrac{1}{4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)};\quad y = 4 - \dfrac{1}{-\frac{4}{3}};\quad y = 4 + \dfrac{3}{4};\quad y = \dfrac{19}{4}$.

L'asse ha equazione $x = x_F$ quindi $x = 1$; il parametro è $a = -\dfrac{1}{3}$; l'apertura è $|a| = \left|-\dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{1}{3}$.

4) *Scrivere l'equazione della parabola di vertice* $V(2,0)$ *e direttrice* $d: y = -1$

METODO ALGEBRICO

$$y - y_0 = a(x-x_0)^2 \quad \text{quindi} \quad y - 0 = a(x-2)^2;$$
$$y = a(x-2)^2;$$
$$y = ax^2 - 4ax + 4a$$

La direttrice ha equazione:

$$y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1 + (-4a)^2 - 4\cdot a\cdot 4a}{4a} = -\frac{1}{4a}$$
$$y = -\frac{1}{4a}$$

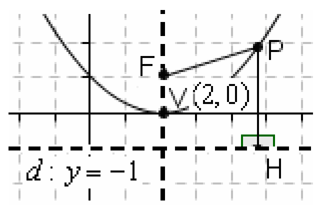
da cui $-\dfrac{1}{4a} = -1;\ a = \dfrac{1}{4}$

Equazione della parabola:

$$y = \frac{1}{4}(x-2)^2;\ y = \frac{1}{4}\left(x^2 - 4x + 4\right);$$
$$\boxed{y = \frac{1}{4}x^2 - x + 1}$$

METODO GEOMETRICO (più efficace!)

Dalla figura si vede che il fuoco
(che giace sull'asse, a una distanza dal vertice
uguale a quella che il vertice ha dalla direttrice)
deve aver coordinate $(2,1)$.
Ma la parabola che ha per fuoco $F(2,1)$ e per direttrice $d: y = -1$ non è altro che il luogo dei punti $P(x,y)$ equidistanti dal fuoco e dalla direttrice: quindi



$$PF = PH$$
$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = |y+1|$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2$$
$$x^2 - 4x + 4 \cancel{+y^2} - 2y \cancel{+1} = \cancel{y^2} + 2y \cancel{+1}$$
$$-4y = -x^2 + 4x - 4;\quad \boxed{y = \frac{1}{4}x^2 - x + 1}$$

CASI PARTICOLARI di $y = ax^2 + bx + c$

- $c = 0$: $y = ax^2 + bx$

  In questo caso (termine noto nullo) è certamente verificata la condizione di appartenenza dell'origine, che ha coordinate $(0,0)$, alla curva; pertanto **la parabola passa per l'origine.**

> In generale, è utile tener presente che una qualsivoglia **curva algebrica**
> (= curva la cui **equazione** si può portare sotto la forma**: polinomio nelle variabili *x, y* uguagliato a zero**)
> passa per l'origine,
> se e solo se la sua equazione manca del termine noto.

- $b = 0$: $y = ax^2 + c$

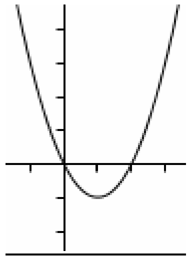
  In questo caso, si ha $x_V = -\dfrac{b}{2a} = 0$ e quindi

  ♪ **il vertice della parabola sta sull'asse delle *y*;**
  ♫ **l'asse delle *y* coincide con l'asse di simmetria della parabola.**

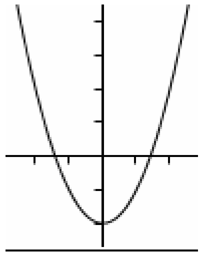
  Quest'ultimo fatto si comprende ancor meglio se si pensa che,
  poiché manca il termine in x e sopravvivono solo il termine in x^2 e il termine noto,
  se si muta x in $-x$, la *y* corrispondente rimane la medesima;
  insomma, **a valori opposti di *x* corrisponde lo stesso valore di *y***
  ($\forall x,\ f(-x) = f(x)$: **si dice che la funzione è "pari"**).
  Ma ciò comporta appunto che la parabola presenti una simmetria rispetto all'asse verticale.

- $b = c = 0$: $y = ax^2$

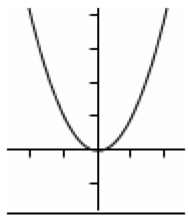
  Come abbiamo già visto e come si deduce dal fatto che qui sono verificati contemporaneamente entrambi i casi particolari esaminati in precedenza, **la parabola ha il vertice nell'origine**.



$c = 0$: $y = ax^2 + bx$
la parabola
passa per l'origine



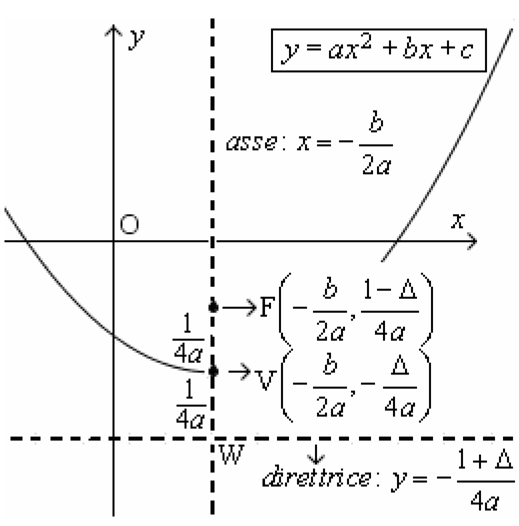
$b = 0$: $y = ax^2 + c$
la parabola è simmetrica
rispetto all'asse x

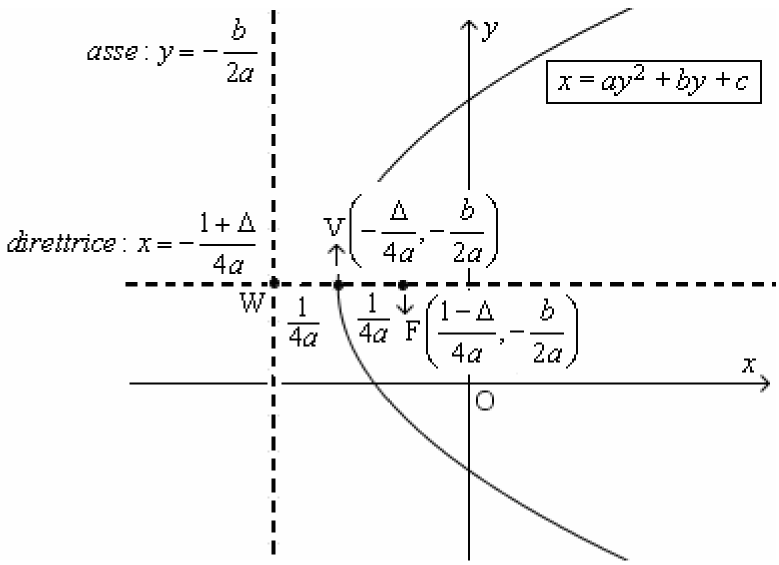


$b = c = 0$: $y = ax^2$
la parabola
ha il vertice nell'origine

PARABOLA CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE *x*

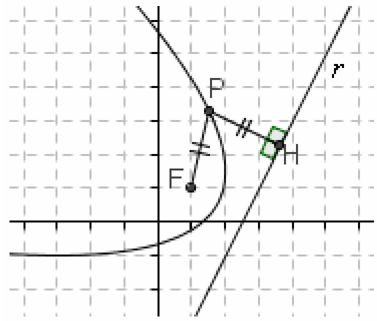
Se si pensa ad una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle *x*,
i ruoli di *x* e di *y* sono scambiati ma il discorso rimane ovviamente il medesimo.
Pertanto, confrontando le due situazioni:





PARABOLA “RUOTATA”

Se venisse richiesto di determinare l’equazione della parabola
avente per fuoco il punto $\mathrm{F}(1,1)$ e per direttrice le retta $r:\ y=2x-5\ \ (2x-y-5=0)$,
basterebbe considerare il generico punto $\mathrm{P}(x,y)$ del piano cartesiano
e porre la condizione che le due distanze di P dal punto F e dalla retta *r* siano uguali.



$$\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\frac{|2x-y-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$\sqrt{x^2-2x+1+y^2-2y+1}=\frac{|2x-y-5|}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2-2x+y^2-2y+2}=|2x-y-5|$$

$$5x^2-10x+5y^2-10y+10=4x^2+y^2+25-4xy-20x+10y$$

$$\boxed{x^2+4xy+4y^2+10x-20y-15=0}$$

Questo è solo un esempio: si potrebbe dimostrare, in generale, che l’equazione di una parabola comunque disposta nel piano cartesiano si può *sempre* scrivere sotto la forma

$$\boxed{ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0}$$

e inoltre che, in questa equazione, risulta sempre

$$\boxed{b^2-4ac=0}\ !!!$$

ESEMPI SVOLTI

5) Scrivere l’equazione della parabola che ha per direttrice l’asse *x*, per asse l’asse *y* e che passa per $\mathrm{A}(1,1)$.

$$y=ax^2+c\ \ (\textit{ha per asse l'asse } y,\ \textit{quindi } b=0)$$

$$\textit{direttrice di equazione } y=0:\quad -\frac{1+\Delta}{4a}=0;\quad 1+\Delta=0\quad 1+0-4ac=0;\quad 1-4ac=0$$

$$\textit{passaggio per } (1,1):\ 1=a\cdot 1^2+c;\ \ 1=a+c$$

$$\begin{cases}1-4ac=0;\ \ ac=\dfrac{1}{4}\\ a+c=1\end{cases}$$

Il sistema ha una sola soluzione: $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ c=\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Dunque la parabola cercata ha equazione $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$

6) Una parabola con l’asse parallelo all’asse *x* ha per fuoco il punto $\mathrm{F}(-2,4)$ e che passa per $\mathrm{A}(1,8)$.
Qual è la sua equazione?

Parabola con asse parallelo all’asse *x*: equazione $x=ay^2+by+c$ e fuoco $\left(\dfrac{1-\Delta}{4a},-\dfrac{b}{2a}\right)$. Dunque:

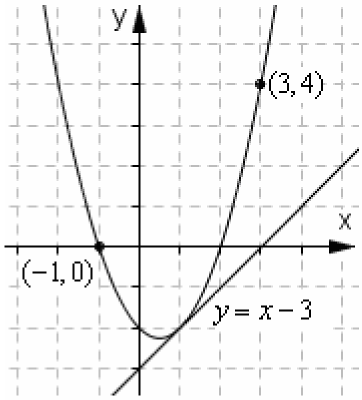
$$\begin{cases}\dfrac{1-\Delta}{4a}=-2\\ -\dfrac{b}{2a}=4\\ 1=64a+8b+c\ \ (\textit{passaggio per } P)\end{cases}\quad \begin{cases}1-b^2+4ac=-8a\\ -b=8a\\ 64a+8b+c=1\end{cases}\quad \begin{cases}b=-8a\\ \cancel{64a}\ \cancel{-64a}+c=1;\\ 1-b^2+4ac=-8a\end{cases}\quad \begin{cases}b=-8a\\ c=1\\ 1-(-8a)^2+4a=-8a\end{cases}$$

$$1-64a^2+4a=-8a;\quad -64a^2+12a+1=0;\quad 64a^2-12a-1=0;\quad a_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+64}}{64}=\frac{6\pm10}{64}=\left\langle\begin{array}{l}-\dfrac{1}{16}\\ \dfrac{1}{4}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{16}\\ b=\dfrac{1}{2}\\ c=1\end{cases}\ \vee\ \begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\ b=-2\\ c=1\end{cases}$$

Ci sono perciò 2 parabole che risolvono il problema: $\boxed{x=-\dfrac{1}{16}y^2+\dfrac{1}{2}y+1}$ e $\boxed{x=\dfrac{1}{4}y^2-2y+1}$

7) Scrivere l'equazione della parabola, con l'asse parallelo all'asse y, che passa per i due punti $(-1,0)$ e $(3,4)$ ed è tangente alla retta di equazione $y = x - 3$.



Equazione generale: $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

$\boxed{\text{PASSAGGIO PER } (-1,0)}$: $0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$; $\boxed{0 = a - b + c}$

$\boxed{\text{PASSAGGIO PER } (3,4)}$: $4 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$; $\boxed{4 = 9a + 3b + c}$

Condizione di tangenza:
facendo il sistema fra la parabola e la retta, questo sistema dovrà avere una sola soluzione

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = x - 3 \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione risolvente del sistema: $ax^2 + bx + c = x - 3$

Questa equazione di 2° grado avrà una sola soluzione se, e soltanto se, $\boxed{\Delta = 0}$

$$ax^2 + bx - x + c + 3 = 0; \quad ax^2 + (b-1)x + (c+3) = 0$$

$$\boxed{\Delta = 0} \quad \boxed{(b-1)^2 - 4a(c+3) = 0} \quad \boxed{\text{CONDIZIONE DI TANGENZA}}$$

$$\begin{cases} (b-1)^2 - 4a(c+3) = 0 \\ a - b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} (3)-(2) \\ (2) \\ (1) \end{matrix} \begin{cases} 8a + 4b = 4;\ \ 2a + b = 1;\ \ b = 1 - 2a \\ a - 1 + 2a + c = 0;\ \ c = 1 - 3a \\ (\cancel{1} - 2a \cancel{-1})^2 - 4a(1 - 3a + 3) = 0 \end{cases}$$

$$(-2a)^2 - 4a(4 - 3a) = 0;\ \ 4a^2 - 16a + 12a^2 = 0;\ \ 16a^2 - 16a = 0;\ \ a^2 - a = 0$$

$$a(a-1) = 0; \quad a = \left\langle \begin{matrix} 0 \ \ \textit{non accettabile (con } a = 0\textit{, non si avrebbe una parabola!)} \\ 1 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 - 2a = 1 - 2 = -1 \\ c = 1 - 3a = 1 - 3 = -2 \end{cases} \quad \textit{Pertanto la parabola che risolve il problema è la } \boxed{y = x^2 - x - 2}$$

8) Scrivere l'equazione della parabola, con l'asse parallelo all'asse y, tangente alla retta $y = 3x + 4$ e altresì tangente, nell'origine, alla retta $y = -x$.

Equazione generale: $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

$\boxed{\textit{Passaggio per l'origine } (0,0): \ c = 0}$

Condizione di tangenza con la retta $y = -x$:
facendo il sistema fra la parabola e la retta, questo sistema dovrà avere una sola soluzione

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx \ \ \textit{(abbiamo già tenuto conto del fatto che } c = 0) \\ y = -x \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione risolvente del sistema: $ax^2 + bx = -x$; $\quad ax^2 + (b+1)x = 0$

$$\boxed{\Delta = 0} \quad (b+1)^2 - 4 \cdot a \cdot 0 = 0 \quad (b+1)^2 = 0 \quad \boxed{b = -1} \quad \boxed{\text{CONDIZIONE DI TANGENZA}}$$

Condizione di tangenza con la retta $y = 3x + 4$:
facendo il sistema fra la parabola e la retta, questo sistema dovrà avere una sola soluzione

$$\begin{cases} y = ax^2 - x \quad (\textit{abbiamo già tenuto conto del fatto che } b = -1) \\ y = 3x + 4 \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione risolvente del sistema:

$ax^2 - x = 3x + 4$

$ax^2 - 4x - 4 = 0$

$\boxed{\frac{\Delta}{4} = 0}$ $4 + 4a = 0$ $\boxed{a = -1}$ $\boxed{\textit{CONDIZIONE DI TANGENZA}}$

(*abbiamo utilizzato, per comodità, il* $\Delta/4$ *anzichè il* Δ; *è chiaro che* $\Delta = 0$ *se e solo se* $\Delta/4 = 0$)

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -1; \quad \textit{pertanto la parabola che risolve il problema è la } \boxed{y = -x^2 - x} \\ c = 0 \end{cases}$$

9) Determinare le equazioni delle due rette tangenti alla parabola $y = x^2 - x - 6$, condotte dal punto $A(1, -7)$

Scriviamo l'equazione della generica retta passante per $A(1, -7)$:

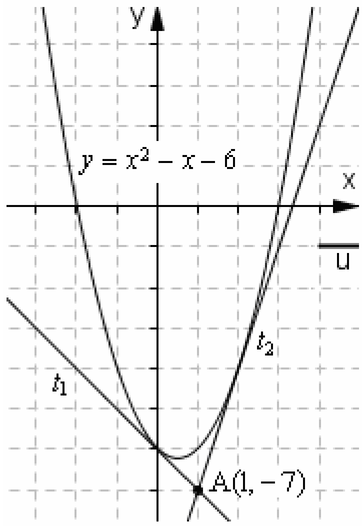
$\boxed{y + 7 = m(x - 1)}$

Poniamo a sistema la retta con la parabola;
il sistema ottenuto avrà un'equazione risolvente di 2° grado;
noi in questa equazione risolvente porremo la condizione $\boxed{\Delta = 0}$

$$\begin{cases} y = x^2 - x - 6 \\ y + 7 = m(x - 1) \end{cases}$$

$x^2 - x - 6 + 7 = m(x - 1)$
$x^2 - x + 1 = mx - m$
$x^2 - x - mx + 1 + m = 0$
$x^2 - (1 + m)x + (1 + m) = 0$

$\boxed{\Delta = 0}$ $(1 + m)^2 - 4(1 + m) = 0$ $(1 + m)(1 + m - 4) = 0$
$(m + 1)(m - 3) = 0$ $m = -1 \vee m = 3$



Le due tangenti cercate sono perciò le rette

$t_1: \; y + 7 = -1 \cdot (x - 1); \; y + 7 = -x + 1; \; \boxed{y = -x - 6}$

$t_2: \; y + 7 = 3 \cdot (x - 1); \; y + 7 = 3x - 3; \; \boxed{y = 3x - 10}$

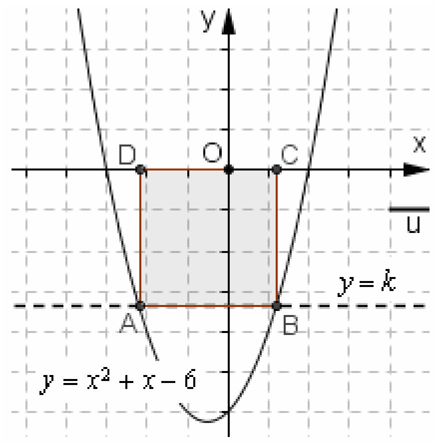
10) Determinare l'equazione della retta tangente alla parabola dell'esercizio precedente, nel suo punto di ascissa -2.

L'ordinata del punto è $y = x^2 - x - 6 = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$. *Il punto è* $(-2, 0)$.
Generica retta per $(-2, 0)$: $y - 0 = m(x + 2)$; $y = mx + 2m$
Sistema con la parabola: $\begin{cases} y = x^2 - x - 6 \\ y = mx + 2m \end{cases}$
Equazione risolvente: $x^2 - x - 6 = mx + 2m$; $x^2 - x - mx - 6 - 2m = 0$; $x^2 - (1 + m)x - (6 + 2m) = 0$
Condizione di tangenza $\boxed{\Delta = 0}$: $(1 + m)^2 + 4(6 + 2m) = 0$; $1 + 2m + m^2 + 24 + 8m = 0$
$m^2 + 10m + 25 = 0$ $(m + 5)^2 = 0$ $m = -5$

Com'era geometricamente prevedibile (dato che in questo caso il punto apparteneva alla curva) si è trovata UNA SOLA retta tangente: quella di equazione $\boxed{y = -5x - 10}$.

11) La parabola di equazione $y = x^2 + x - 6$ determina, con l'asse delle x, una regione limitata chiusa. Quanto misura il lato del quadrato inscritto in tale regione?

Consideriamo una retta r parallela all'asse x,
di equazione $y = k$.
Vogliamo determinare il parametro k in modo che,
dette A e B le intersezioni di r con la parabola,
e dette C e D le proiezioni di B e A rispettivamente sull'asse x,
il rettangolo ABCD abbia i lati tutti uguali fra loro.



$$\begin{cases} y = x^2 + x - 6 \\ y = k \end{cases}$$

$$x^2 + x - 6 = k$$

$$x^2 + x - 6 - k = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-6-k)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24 + 4k}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25 + 4k}}{2}$$

$$\mathrm{A}\left(\frac{-1 - \sqrt{25+4k}}{2}, k\right) \quad \mathrm{B}\left(\frac{-1 + \sqrt{25+4k}}{2}, k\right)$$

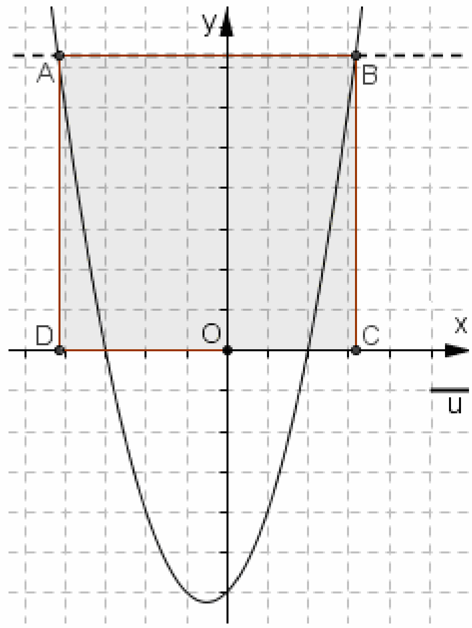
$$\mathrm{AB} = \frac{-1 + \sqrt{25+4k}}{2} - \frac{-1 - \sqrt{25+4k}}{2} = \ldots = \sqrt{25+4k}$$

$$\mathrm{AD} = |k|$$

$$\sqrt{25+4k} = |k| \qquad 25 + 4k = k^2 \qquad k^2 - 4k - 25 = 0$$

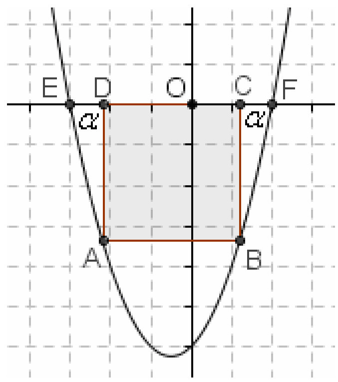
$$k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 25} = \left\langle \begin{array}{l} 2 - \sqrt{29} \\ 2 + \sqrt{29} \end{array} \right.$$

La soluzione che ci interessa è evidentemente solo quella negativa:
$k = 2 - \sqrt{29}$
che corrisponde alla retta $y = 2 - \sqrt{29}$
e al quadrato di lato $|k| = \left|2 - \sqrt{29}\right| = \sqrt{29} - 2$.



Il valore di k positivo
corrisponderebbe al quadrato nella seconda figura,
che non è però quello richiesto dal problema.

IN ALTERNATIVA,
si sarebbe potuta assumere come incognita la misura
(>0) di uno qualsiasi dei due segmenti uguali $\mathrm{ED} = \mathrm{CF} = \alpha$.
La risoluzione sarebbe stata allora



$$\mathrm{D}(-3+\alpha, 0); \quad \mathrm{E}(2-\alpha, 0)$$

$$y_{\mathrm{A}} = (-3+\alpha)^2 + (-3+\alpha) - 6 = \cancel{9} - 6\alpha + \alpha^2 \cancel{-3} + \alpha \cancel{-6} = \alpha^2 - 5\alpha$$

$$\mathrm{AD} = \left|\alpha^2 - 5\alpha\right|; \quad \mathrm{DE} = 2 - \alpha - (-3+\alpha) = 2 - \alpha + 3 - \alpha = 5 - 2\alpha$$

L'equazione risolvente è $\left|\alpha^2 - 5\alpha\right| = 5 - 2\alpha$
che può essere ricondotta, ad esempio, al sistema misto

$$\begin{cases} 5 - 2\alpha \geq 0 \\ \alpha^2 - 5\alpha = \pm(5 - 2\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \leq \dfrac{5}{2} \\ \alpha^2 - 5\alpha = 5 - 2\alpha \ \vee \ \alpha^2 - 5\alpha = -5 + 2\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \leq \dfrac{5}{2} \\ \alpha = \dfrac{3 \pm \sqrt{29}}{2} \ \vee \ \dfrac{7 \pm \sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

Tenuto conto che deve essere anche $\alpha > 0$, si vede che l'unica soluzione accettabile è $\alpha = \dfrac{7 - \sqrt{29}}{2}$

la quale poi porta alla stessa misura, per il lato del quadrato, trovata con l'altro (più comodo) metodo.

25. ESERCIZI SULLA PARABOLA

1) Trovare vertice, asse, fuoco, direttrice della parabola
$y = x^2 - 3x - 4$;
disegnare la curva.

2) Trovare vertice, asse, fuoco, direttrice della parabola
$y = x - 2x^2$;
disegnare la curva

3) Trovare vertice, asse, fuoco, direttrice della parabola
$y = \frac{1}{4}x^2 + 1$;
disegnare la curva.

4) Scrivere l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse *y*, passante per i tre punti
$\mathrm{A}(1,0)$; $\mathrm{B}(2,1)$; $\mathrm{C}(3,4)$;
determinarne vertice, asse, fuoco, direttrice.

5) Scrivere l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse *y*,
avente vertice in $\mathrm{V}(2,4)$
e passante per $\mathrm{A}(1,3)$.
SUGGERIMENTO IMPORTANTE
Conviene utilizzare la formula
$y - y_0 = a(x - x_0)^2$:
in questo modo, infatti, c'è un solo parametro da determinare anziché 3 !

6) Scrivere l'equazione della parabola con fuoco $\mathrm{F}(3,1)$ e direttrice $d: y = 2$

7) Una parabola ha vertice in $\mathrm{V}\left(3,-\frac{3}{2}\right)$ e fuoco in $\mathrm{F}(3,-1)$. Determinarne l'equazione.

8) Scrivere le equazioni delle parabole di vertice $\mathrm{V}(-3,2)$ e apertura $|a| = 1$

9) Scrivere l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse *x*, passante per i tre punti
$\mathrm{A}(1,0)$; $\mathrm{B}(2,1)$; $\mathrm{C}(3,4)$;
determinarne vertice, asse, fuoco, direttrice.

10) Scrivere l'equazione della parabola avente per fuoco l'origine, e per direttrice la retta $x + y = 4$
(Occhio!
Non essendo l'asse di simmetria parallelo né all'asse *x*, né all'asse *y*,
l'equazione *non* sarà della forma
$y = ax^2 + bx + c$ o $x = ay^2 + by + c$)

11) Condurre, dal punto $\mathrm{A}(3,4)$, le rette tangenti alla parabola di equazione $y = -x^2 + 4x - 3$,
e calcolare l'area del triangolo AST, essendo S, T i punti di contatto.

12) Scrivere l'equazione della retta tangente alla parabola $y = -x^2$ nel suo punto di ascissa 1.

13) Scrivere l'equazione della parabola (con asse verticale)
passante per i due punti $\mathrm{A}(-3,4)$ e $\mathrm{B}(0,1)$
e tangente nel punto B alla retta di coefficiente angolare 2.
Successivamente, scrivere l'equazione della retta tangente alla parabola in A.

14) Nel segmento parabolico che la $y = -x^2 + 6x$ determina con l'asse x,
inscrivere un rettangolo il cui perimetro misuri 18.

15) Nel segmento parabolico che la parabola $y = x^2 - 6x + 5$ determina sull'asse *x*, inscrivere:
a) un rettangolo di perimetro 10
b) un rettangolo di area 6
c) un quadrato
d) un rettangolo di diagonale 4

16) Disegnata la parabola
$$y^2 = 8x,$$
determinare l'equazione della retta, ad essa tangente,
parallela alla retta
$$2x + 2y - 3 = 0$$

17) Verificare che le due rette tangenti condotte ad una parabola da un punto qualsiasi della sua direttrice, sono sempre perpendicolari.
OSSERVAZIONE:
non è restrittivo supporre che la parabola abbia il vertice nell'origine e l'asse coincidente con l'asse *y*.
In questo modo, i calcoli saranno più semplici.

18) Dimostra che il luogo dei centri delle circonferenze
passanti per $A(1,1)$ e tangenti all'asse x
è una parabola,
e scrivine l'equazione.

19) Data la funzione
$$y = x^2 + |x - 2|,$$
disegnarne il grafico
e scrivere le equazioni delle due semirette tangenti
nel punto "angoloso" di ascissa 2.

20) Scrivi l'equazione della parabola con asse verticale passante per i punti
$$(1,4);\ (3,4);\ (4,7)$$
e l'equazione della parabola con asse verticale, di vertice $(3,8)$ e passante per $(1,4)$.
Fra le rette $y = 2x + q$,
   a) quali sono quelle che, complessivamente, hanno 4 intersezioni con le due parabole?
   b) Quali sono quelle che hanno 3 intersezioni?
   c) Quali sono quelle che hanno 2 intersezioni?
   d) Quali sono quelle che hanno 1 sola intersezione?

21) Condurre una retta parallela all'asse *y*,
in modo che le due parabole
$$y = x^2 - 2x + 1 \ \text{ e } \ y = -x^2 + 4x - 1$$
determinino su di essa un segmento uguale a 2.

22) Sulla parabola avente vertice $V(-1,-2)$ e fuoco $F\left(-1,-\dfrac{7}{4}\right)$,
determinare i punti le cui distanze dagli assi cartesiani siano una il doppio dell'altra.

23) Scrivere l'equazione della parabola di vertice $V(-1,-1)$ e tangente alla retta $y = 2x$.
Dopo aver verificato che tale parabola passa per l'origine e per il punto $A(-3,3)$,
determinare, sull'arco OA di parabola, un punto P in modo che:
   a) l'area del triangolo PAO misuri 3;
   b) l'area del triangolo PAO sia massima

SOLUZIONI

1) $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$; $a: x=\frac{3}{2}$; $F\left(\frac{3}{2}, -6\right)$; $d: y=-\frac{13}{2}$

2) $V\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$; $a: x=\frac{1}{4}$; $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$; $d: y=\frac{1}{4}$

3) $V(0,1)$; $a: x=0$; $F(0,2)$; $d: y=0$

4) $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$; $V\equiv A(1,0)$; $\text{asse}: x=1$; $F\left(1, \frac{1}{4}\right)$; $d: y=-\frac{1}{4}$

5) $y=-x^2+4x$ 6) $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-3$ 7) $y=\frac{1}{2}x^2-3x+3$

8) Se l'apertura è $|a|=1$, il parametro potrà essere $a=1$ (1^a parabola) oppure $a=-1$ (2^a parabola).
Utilizzando l'equazione $y-y_0=a(x-x_0)^2$ di una parabola noto il vertice, avremo immediatamente:
$y-2=1\cdot(x+3)^2$; $y-2=x^2+6x+9$; $y=x^2+6x+11$ (1^a parabola);
$y-2=-1\cdot(x+3)^2$; $y-2=-x^2-6x-9$; $y=-x^2-6x-7$ (2^a parabola).

9) $x=-\frac{1}{6}y^2+\frac{7}{6}y+1$; $V\left(\frac{73}{24}, \frac{7}{2}\right)$; $\text{asse}: y=\frac{7}{2}$; $F\left(\frac{37}{24}, \frac{7}{2}\right)$; $d: x=\frac{109}{24}$

10) $x^2+y^2-2xy+8x+8y-16=0$

11) $t_1: y=2x-2$; $t_2: y=-6x+22$; $\text{Area}=16$

12) $y=-2x+1$

13) $y=x^2+2x+1$; $y=-4x-8$

14) base = 4, altezza = 5 opp. b = 0, h = 9 (soluzione degenere)

15a) base = 2, h = 3

15b) base = 2, h = 3 oppure $b=\sqrt{13}-1$, $h=\frac{\sqrt{13}+1}{2}$

15c) $\text{lato}=2\left(\sqrt{5}-1\right)$

15d) due soluzioni entrambe degeneri, in cui il rettangolo ha base 0 e altezza 4, o viceversa

16) $y=-x-2$

17) La parabola $y=ax^2$ ha come direttrice la retta $y=-\frac{1}{4a}$.

Un punto generico della direttrice ha dunque coordinate $\left(k, -\frac{1}{4a}\right)$.

La generica retta per questo punto avrà equazione $y+\frac{1}{4a}=m(x-k)$

e scrivendo la condizione di tangenza di questa retta con la parabola, si trova un'equazione, nell'incognita *m*, le cui soluzioni m_1, m_2 sono, per qualsiasi valore di *k*, antireciproche l'una dell'altra. Segue la tesi.

18) $y=\frac{1}{2}x^2-x+1$

19) $y=3x-2$ $(x\le 2)$; $y=5x-6$ $(x\ge 2)$

20) $y=x^2-4x+7$, $y=-x^2+6x-1$
- 4 intersezioni con $-2<q<-1 \vee -1<q<2 \vee 2<q<3$
- 3 intersezioni con $q=-2$, $q=-1$, $q=2$, $q=3$
- 2 intersezioni con $q<-2 \vee q>3$
- per nessun valore di *q* si ha 1 sola intersezione

21) La retta in questione ha equazione della forma $x=k$; si trova che *k* può assumere i valori: 0, 1, 2 oppure 3.

22) $y=x^2+2x-1$; $(\pm 1, \pm 2)$; $\left(-2\pm\sqrt{5},\ 4\mp 2\sqrt{5}\right)$; $(-2,-1)$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; $\left(\frac{-5\pm\sqrt{41}}{4}, \frac{5\mp\sqrt{41}}{8}\right)$

23) $y=x^2+2x$; a) $P_1(-2,0)$; $P_2(-1,-1)\equiv V$ b) $P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ (la retta dovrà essere tangente!)

26. LA CIRCONFERENZA NEL PIANO CARTESIANO

La circonferenza di centro $C(x_0, y_0)$ e raggio r è il luogo dei punti $P(x, y)$ tali che $PC = r$.

Pertanto la sua equazione si ottiene coi passaggi seguenti:

$PC = r$

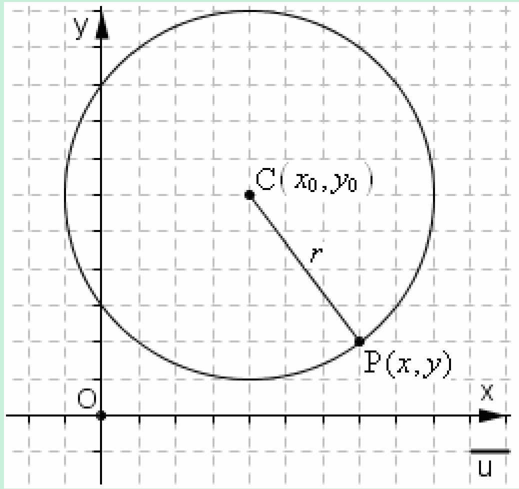
(1) $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = r$

(2) $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2}$

$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = r^2$

$x^2 + y^2 \underbrace{-2x_0}_{\alpha} x \underbrace{-2y_0}_{\beta} y + \underbrace{x_0^2 + y_0^2 - r^2}_{\gamma} = 0$

(3) $\boxed{x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0}$



Dati dunque il centro $C(x_0, y_0)$ e la misura r del raggio, l'equazione si scriverà

- sotto la forma (1)
- o, meglio, già sotto la forma (2),
- poi si faranno i calcoli per portarsi alla forma definitiva (3).

ESEMPI

1) *Scrivere l'equazione della circonferenza di centro* $(4,6)$ *e raggio* 5
(che è poi proprio quella della figura sopra!)

$\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2} = 5$

$(x-4)^2+(y-6)^2 = 25$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 12y + 36 = 25$

$\boxed{x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0}$

Per esercizio, prendi ora qualche punto che dalla figura risulti appartenere alla circonferenza, ad esempio il punto $(1,\ 2)$ *o il punto* $(-1,\ 6)$ *e controlla, sostituendo, che le sue coordinate verificano l'equazione trovata.*

2) *Scrivere l'equazione della circonferenza di centro* $A(1,-3)$ *e passante per* $B(-6,21)$

Per prima cosa calcolo il raggio

$r = AB = \sqrt{(-6-1)^2+(21+3)^2} = \sqrt{(-7)^2+24^2} = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$.

Poi: $(x-1)^2+(y+3)^2 = 25^2$; $\quad x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 625$; $\quad \boxed{x^2 + y^2 - 2x + 6y - 615 = 0}$

3) *Scrivere l'equazione della circonferenza di diametro* AB, *con* $A(0,-3);\ B(4,2)$

Innanzitutto determino il centro, punto medio del diametro: $C\left(\frac{0+4}{2}, \frac{-3+2}{2}\right) = \left(2, -\frac{1}{2}\right)$

Poi calcolo il raggio, ad esempio come metà del diametro: $r = \frac{\sqrt{(4-0)^2+(2+3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$.

Infine: $(x-2)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2$; $\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{41}{4}$; $\ \boxed{x^2 + y^2 - 4x + y - 6 = 0}$

Osserviamo che a partire dalla (3) si può risalire alle coordinate del centro e alla misura del raggio tramite le formule seguenti:

$\alpha = -2x_0 \to \boxed{x_0 = -\frac{\alpha}{2}} \qquad \beta = -2y_0 \to \boxed{y_0 = -\frac{\beta}{2}}$

$\gamma = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \ \to\ r^2 = x_0^2 + y_0^2 - \gamma =$ *da cui* $\boxed{r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - \gamma}}$

ESEMPIO

Determinare centro e raggio della circonferenza di equazione $2x^2+2y^2+4x-3y=18$

Innanzitutto dobbiamo **portare l'equazione nella forma "standard"** $x^2+y^2+\ldots=0$,
che è poi quella in relazione alla quale valgono le formule ricavate in precedenza.

In questo caso si tratterà di portare tutto a 1° membro e dividere per 2: $x^2+y^2+2x-\frac{3}{2}y-9=0$.

Ora: $x_0=-\frac{2}{2}=-1 \quad y_0=-\frac{-\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4} \qquad r=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2-(-9)}=\sqrt{1+\frac{9}{16}+9}=\sqrt{\frac{169}{16}}=\frac{13}{4}$

Supponiamo invece che sia data un'equazione della forma
$\boldsymbol{x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0}$ **con** α, β, γ **scelti in modo arbitrario**.
Sarebbe ora **un errore dare per scontato che l'equazione data rappresenti per forza una circonferenza**.
Consideriamo infatti l'equazione $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ e cerchiamo di ricondurla, se possibile, col metodo "del completamento del quadrato", alla forma (2). Avremo:

$$x^2+\alpha x+\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\alpha^2}{4}+y^2+\beta y+\frac{\beta^2}{4}-\frac{\beta^2}{4}+\gamma=0; \quad \left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma$$

$$\left[x-\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(-\frac{\beta}{2}\right)\right]^2=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma$$

Tutto ora **dipende dal segno della quantità** a secondo membro $\boldsymbol{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$.

- Infatti, se tale quantità è <0, si vede che l'equazione non può essere soddisfatta da alcuna coppia (x, y) (una somma di due quadrati non potrà mai dare come risultato un numero negativo) e saremo costretti a concludere che l'equazione data rappresenta il **luogo vuoto**.
- Se poi è $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma=0$, l'equaz. data sarà verificata se e solo se si annullano contemporaneamente entrambi i quadrati a primo membro, e quindi le loro basi; ma ciò avviene solo con $x=-\frac{\alpha}{2},\ y=-\frac{\beta}{2}$.

  Perciò, in questo caso, l'equazione è soddisfatta dalle coordinate di un punto soltanto: il punto $\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)$.

  Il **luogo** che l'equazione rappresenta è in questo caso **puntiforme**
  (potremmo, con un po' di fantasia, pensare ad una circonferenza di raggio nullo, ridotta al solo centro).
- Se, infine, è $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma>0$, l'equazione può essere scritta come

  $\left[x-\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(-\frac{\beta}{2}\right)\right]^2=r^2$, avendo posto $r=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$

  e rappresenta **effettivamente una circonferenza**, di centro $\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)$ e raggio $r=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$.

Riassumendo, e impostando il discorso da un punto di vista "pratico", diremo dunque che:

Data un'equazione della forma $\boldsymbol{x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0}$**,**
noi "ci aspettiamo" in generale che rappresenti una circonferenza,
e andiamo subito a calcolarne le coordinate $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$ **del centro e la misura** $\boldsymbol{r}$ **del raggio con le formule**

$$\boldsymbol{x_0=-\frac{\alpha}{2}; \quad y_0=-\frac{\beta}{2}; \quad r=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}}$$

Se, tuttavia, applicando la terza formula ci ritroviamo con un radicando negativo,
dovremo "fare marcia indietro" e concludere che l'equazione assegnata
non rappresentava una circonferenza bensì il luogo vuoto.
Nel caso poi il radicando ci risulti nullo, concluderemo che l'equazione assegnata
rappresenta una "circonferenza degenere, di raggio nullo, ridotta perciò al suo solo centro".

ESEMPI SVOLTI - PROBLEMI SULLA CIRCONFERENZA

Sarà molto utile tenere sempre presenti le osservazioni che seguono.

Una circonferenza $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$

- passa per l'origine se e soltanto se la sua equazione ha $\gamma=0$, ossia: manca del termine noto, è della forma $x^2+y^2+\alpha x+\beta y=0$
- ha il centro sull'asse x se e soltanto se la sua equazione manca del termine con y, vale a dire ha $\beta=0$
- ha il centro sull'asse y se e soltanto se la sua equazione manca del termine con x, vale a dire ha $\alpha=0$.

Se in un qualsiasi problema occorre determinare *n* parametri, si imposterà a tale scopo un sistema con *n* condizioni contenenti quei parametri.

1) *Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i tre punti* $A(-3,3);\ B(-2,4);\ C(1,5)$.

Il problema può essere risolto CON METODO ALGEBRICO O CON METODO GEOMETRICO.

- Il **metodo algebrico ("METODO DELL'APPARTENENZA")**
consiste nello scrivere l'equazione della generica circonferenza $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$,
per poi determinare la terna di coefficienti α,β,γ
scrivendo le condizioni di appartenenza dei tre punti A, B, C e facendone il sistema.

$\Gamma:\ x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$

$A(-3,3)\in\Gamma:\ (-3)^2+3^2+\alpha\cdot(-3)+\beta\cdot 3+\gamma=0$

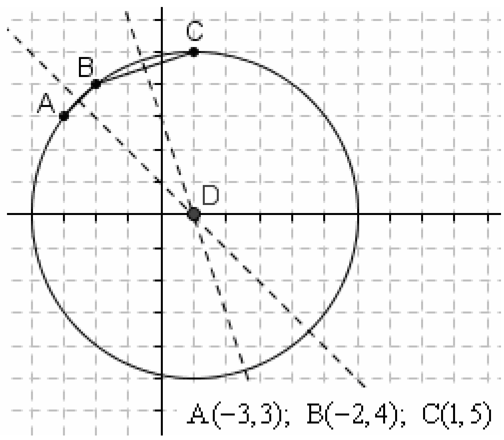
$B(-2,4)\in\Gamma:\ (-2)^2+4^2+\alpha\cdot(-2)+\beta\cdot 4+\gamma=0$

$C(1,5)\in\Gamma:\ 1^2+5^2+\alpha\cdot 1+\beta\cdot 5+\gamma=0$

$$\begin{cases}9+9-3\alpha+3\beta+\gamma=0\\4+16-2\alpha+4\beta+\gamma=0\\1+25+\alpha+5\beta+\gamma=0\end{cases}\quad\begin{cases}-3\alpha+3\beta+\gamma=-18\\-2\alpha+4\beta+\gamma=-20\\\alpha+5\beta+\gamma=-26\end{cases}\quad\ldots\quad\begin{cases}\alpha=-2\\\beta=0\\\gamma=-24\end{cases}\quad \textit{da cui}\quad \boxed{\Gamma:\ x^2+y^2-2x-24=0}$$

- Il **metodo geometrico ("METODO DEGLI ASSI")**
consiste nel tener presente che in una circonferenza
l'asse di una corda passa sempre per il centro;
perciò il centro di una circonferenza può essere individuato come punto di intersezione degli assi di due corde qualsiasi.
Facile poi calcolare il raggio; dopodiché, noti centro e raggio, si potrà scrivere l'equazione sotto la forma

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$



Asse di AB:

$$(x+3)^2+(y-3)^2=(x+2)^2+(y-4)^2\ \ldots\ x+y-1=0$$

Asse di BC:

$$(x+2)^2+(y-4)^2=(x-1)^2+(y-5)^2\ \ldots\ 3x+y-3=0$$

Intersezione D dei due assi: $\begin{cases}x+y-1=0\\3x+y-3=0\end{cases}\ \ldots\ \begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ $D(1,0)$ Raggio: $DA=\sqrt{(1+3)^2+(0-3)^2}=5$

Equazione circonferenza: $(x-1)^2+(y-0)^2=25;\quad x^2-2x+1+y^2=25;\quad \boxed{x^2+y^2-2x-24=0}$

2) *Scrivere l'equazione della circonferenza di centro* $A(-4,2)$ *e passante per* $B(-3,5)$

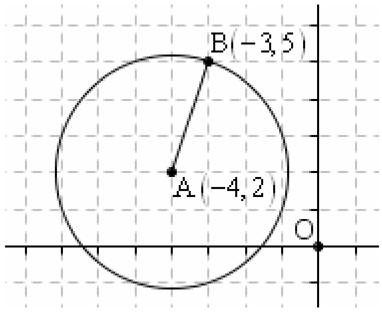
$r=AB=\sqrt{(-3-(-4))^2+(5-2)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

Circonferenza di centro $A(-4,2)$ *e raggio* $\sqrt{10}$:

$(x+4)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$

$x^2+8x+16+y^2-4y+4=10$

$\boxed{x^2+y^2+8x-4y+10=0}$



ALTERNATIVA, decisamente meno conveniente

L'equazione di una circonferenza è sempre della forma

$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$.

Ora, dette $(x_0,\,y_0)$ le coordinate del centro, sappiamo che valgono le formule

$$x_0=-\frac{\alpha}{2}\ \text{da cui}\ \alpha=-2x_0;\qquad y_0=-\frac{\beta}{2}\ \text{da cui}\ \beta=-2y_0.$$

Nel nostro caso, essendo $(x_0,\,y_0)=(-4,\,2)$ avremo dunque

$x^2+y^2+8x-4y+\gamma=0$

quindi resterà da determinare solo γ.

A tale scopo, possiamo porre la condizione di appartenenza del punto $B(-3,5)$ e otterremo:

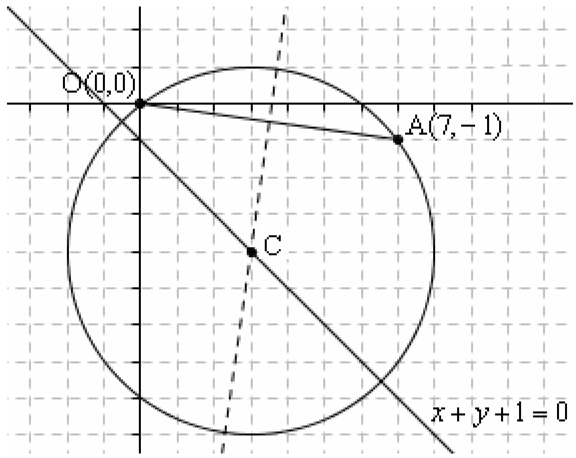
$(-3)^2+5^2+8\cdot(-3)-4\cdot5+\gamma=0;\quad 9+25-24-20+\gamma=0;\quad \gamma=10$

In definitiva l'equazione sarà: $\boxed{x^2+y^2+8x-4y+10=0}$

3) *Scrivi l'equazione della circonferenza che passa per i due punti* $O(0,0)$ e $A(7,-1)$ *e ha il centro sulla retta di equazione* $x+y+1=0$

♪ 1° MODO

E' noto che in una circonferenza il centro sta sull'asse di ogni corda.
Allora per trovare il centro basterà scrivere l'equazione dell'asse del segmento OA e successivamente trovare l'intersezione fra tale asse e la retta $x+y+1=0$.



Asse di OA:

$P(x,y)$

$PO=PA$

$PO^2=PA^2$

$(x-0)^2+(y-0)^2=(x-7)^2+(x+1)^2$

$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}=\cancel{x^2}-14x+49+\cancel{y^2}+2y+1$

$14x-2y-50=0$

$7x-y-25=0$

Intersezione fra l'asse trovato e la retta $x+y+1=0$, per determinare il centro:

$$\begin{cases}7x-y-25=0\\x+y+1=0\end{cases}\ \ldots\ \begin{cases}x=3\\y=-4\end{cases}\quad C(3,-4)$$

Raggio: $r=CO=\sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

Equazione circonferenza: $(x-3)^2+(x+4)^2=25\ \ldots\ \boxed{x^2+y^2-6x+8y=0}$

♫ 2° MODO

Presa la generica equazione di una circonferenza $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ abbiamo *3 parametri* α,β,γ da determinare e dobbiamo quindi fare un *sistema* con *3 condizioni*.

Appartenenza di $O(0,0)$: $\gamma=0$

Appartenenza di $A(7,-1)$: $49+1+7\alpha-\beta+\gamma=0,\ 7\alpha-\beta+\gamma=-50$

Appartenenza del centro, che ha coordinate $\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)$, *alla retta* $x+y+1=0$:

$$-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}+1=0,\ -\alpha-\beta+2=0,\ \alpha+\beta=2$$

$$\begin{cases}\gamma=0\\7\alpha-\beta+\gamma=-50\\\alpha+\beta=2\end{cases}\ \ldots\ \begin{cases}\alpha=-6\\\beta=8\\\gamma=0\end{cases}\quad \text{da cui l'equazione:}\ \boxed{x^2+y^2-6x+8y=0}$$

4) *Scrivi l'equazione della circonferenza che ha per centro il punto* $C(4,2)$ *ed è tangente alla retta* $y=3x+2$

♪ 1° MODO

Il raggio della circonferenza sarà la distanza fra il centro $C(4,2)$ e la retta $y=3x+2;\ 3x-y+2=0$.

$$r=\frac{|3\cdot 4\cancel{-2}\cancel{+2}|}{\sqrt{9+1}}=\frac{12}{\sqrt{10}}$$

Equazione:

$$(x-4)^2+(y-2)^2=\left(\frac{12}{\sqrt{10}}\right)^2$$

$$x^2-8x+16+y^2-4y+4=\frac{144}{10}$$

$$10x^2-80x+160+10y^2-40y+40=144$$

$$10x^2+10y^2-80x-40y+56=0$$

$$\boxed{5x^2+5y^2-40x-20y+28=0}$$

♫ 2° MODO (puramente algebrico, molto meno conveniente!)

Presa la generica equazione di una circonferenza

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

la conoscenza delle coordinate del centro $C(4,2)$ ci assicura (vedi esercizio 2, "ALTERNATIVA") che è

$$\alpha=-2x_0=-8,\quad \beta=-2y_0=-4.$$

Dunque l'equazione sarà

$$x^2+y^2-8x-4y+\gamma=0.$$

Per determinare poi γ possiamo "porre la condizione di tangenza con la retta $y=3x+2$".

In pratica, il sistema finalizzato a determinare le intersezioni retta-circonferenza, ossia il sistema

$$\begin{cases} y=3x+2 \\ x^2+y^2-8x-4y+\gamma=0 \end{cases},$$

dovrà avere 1 sola soluzione.

Scriviamo dunque l'equazione risolvente del sistema

$$x^2+(3x+2)^2-8x-4(3x+2)+\gamma=0$$

$$x^2+9x^2\cancel{+12x}+4-8x\cancel{-12x}-8+\gamma=0$$

$$10x^2-8x-4+\gamma=0$$

e domandiamoci:
per quale valore di γ questa equazione, che è di 2° grado,
ha eccezionalmente 1 sola soluzione anziché 2?

Un'equazione di 2° grado ha 1 sola soluzione (= 2 soluzioni coincidenti fra loro)
se e soltanto se $\Delta=0$.
Quindi dovrà essere

$$\boxed{\Delta=0},$$

o anche

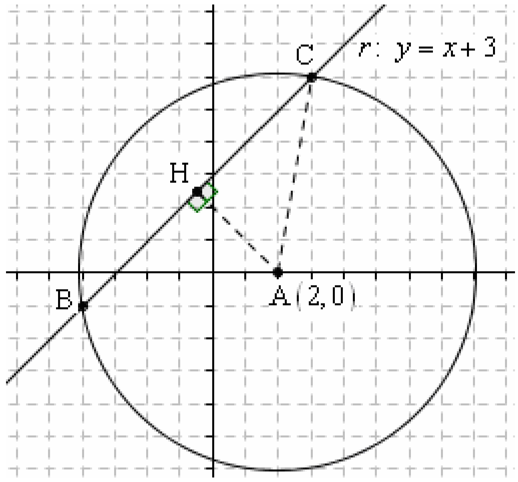
$$\boxed{\frac{\Delta}{4}=0};\ \ (-4)^2-10(-4+\gamma)=0;\ \ 16+40-10\gamma=0;\ \ \gamma=\frac{56}{10}=\frac{28}{5}$$

L'equazione cercata è

$$x^2+y^2-8x-4y+\frac{28}{5}=0$$

$$\boxed{5x^2+5y^2-40x-20y+28=0}$$

5) *Scrivere l'equazione della circonferenza che ha centro in* $\mathrm{A}(2,0)$ *e stacca sulla retta* $r:\ y=x+3$ *una corda* BC *la cui lunghezza è* $6\sqrt{2}$.



Fatto un disegno approssimativo, possiamo tracciare la perpendicolare AH dal centro A alla corda BC. Com'è noto, tale perpendicolare taglierà a metà la corda stessa, quindi si avrà

$\mathrm{BH}=\mathrm{HC}=3\sqrt{2}$.

Se allora calcoliamo la lunghezza del segmento AH, che è poi la distanza del centro $\mathrm{A}(2,0)$ dalla retta

$r:\ y=x+3;\ \ x-y+3=0$,

potremo poi, con Pitagora, determinare il raggio AC e infine, essendo noti il centro e il raggio, scrivere l'equazione richiesta.

$$\mathrm{AH}=d(\mathrm{A},r)=\frac{|2-0+3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{AH}^2+\mathrm{HC}^2}=\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{50}{4}+18}=\frac{\sqrt{122}}{2}$$

Equazione circonferenza di centro $\mathrm{A}(2,0)$ e raggio $\sqrt{122}/2$:

$$(x-2)^2+(y-0)^2=\left(\frac{\sqrt{122}}{2}\right)^2;\qquad x^2-4x+4+y^2=\frac{\cancel{122}^{61}}{\cancel{4}_2}\ \ \ldots\ \boxed{2x^2+2y^2-8x-53=0}$$

In ALTERNATIVA, si sarebbe potuto (metodo algebrico, in questo caso molto meno conveniente):

I) scrivere l'equazione della circonferenza avente per centro il punto $\mathrm{A}(2,0)$, lasciando indicata con r la misura del raggio:

$$(x-2)^2+(y-0)^2=r^2$$

II) determinare le coordinate dei punti di intersezione di questa circonferenza con la retta $r:\ y=x+3$:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-0)^2=r^2\\ y=x+3\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=x+3\\ (x-2)^2+(x+3)^2=r^2;\ \ 2x^2+2x+13-r^2=0;\ \ x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-2(13-r^2)}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{2r^2-25}}{2};\end{cases}$$

$$\mathrm{B}:\begin{cases}x=\dfrac{-1-\sqrt{2r^2-25}}{2}\\ y=x+3=\dfrac{-1-\sqrt{2r^2-25}}{2}+3=\dfrac{5-\sqrt{2r^2-25}}{2}\end{cases}\qquad \mathrm{C}:\begin{cases}x=\dfrac{-1+\sqrt{2r^2-25}}{2}\\ y=x+3=\dfrac{-1+\sqrt{2r^2-25}}{2}+3=\dfrac{5+\sqrt{2r^2-25}}{2}\end{cases}$$

III) Calcolare la distanza BC (che dipende dal parametro r) e poi domandarsi per quale valore di r tale distanza risulta uguale proprio a $6\sqrt{2}$

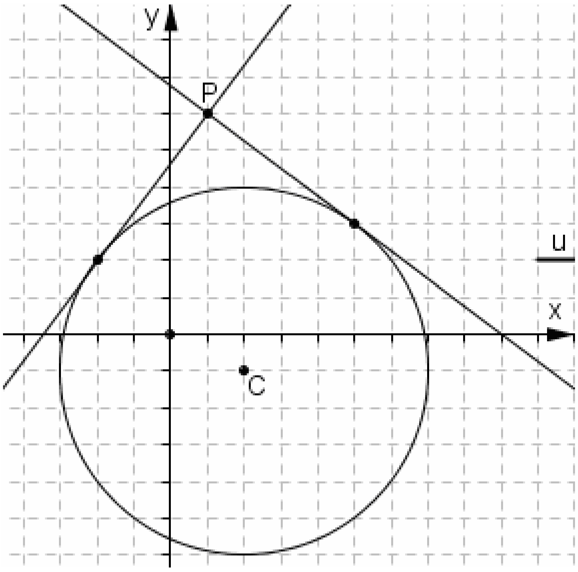
$$\mathrm{B}:\begin{cases}x=\dfrac{-1-\sqrt{2r^2-25}}{2}\\ y=\dfrac{5-\sqrt{2r^2-25}}{2}\end{cases}\qquad \mathrm{C}:\begin{cases}x=\dfrac{-1+\sqrt{2r^2-25}}{2}\\ y=\dfrac{5+\sqrt{2r^2-25}}{2}\end{cases}$$

$$\mathrm{BC}=\sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{2r^2-25}}{2}-\frac{-1-\sqrt{2r^2-25}}{2}\right)^2+\left(\frac{5+\sqrt{2r^2-25}}{2}-\frac{5-\sqrt{2r^2-25}}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\cancel{2}\sqrt{2r^2-25}}{\cancel{2}}\right)^2+\left(\frac{\cancel{2}\sqrt{2r^2-25}}{\cancel{2}}\right)^2}=\sqrt{2r^2-25+2r^2-25}=\sqrt{4r^2-50}$$

$$\sqrt{4r^2-50}=6\sqrt{2};\ \ 4r^2-50=72;\ \ 4r^2=122;\ \ r^2=\frac{122}{4};\ \ r=\sqrt{\frac{122}{4}}=\frac{\sqrt{122}}{2},\ \ ecc.$$

6) *Condurre dal punto* $\mathrm{P}(1,6)$ *le tangenti alla circonferenza di equazione* $x^2+y^2-4x+2y-20=0$.



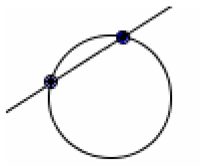
S'intende
che sono richieste
le equazioni
di queste due
rette tangenti.

Il problema può essere risolto con METODO ALGEBRICO o con METODO GEOMETRICO.

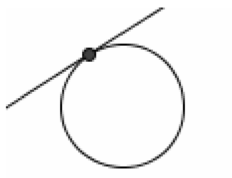
♪ Il **metodo algebrico ("METODO DEL DELTA")**
consiste nel porre l'equazione data a sistema con l'equazione della generica retta per P

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x+2y-20=0 \\ y-6=m(x-1) \end{cases}$$

per poi determinare
i valori di *m* per i quali
questo sistema di 2° grado,
anziché portare a *due* valori
per la coppia (x, y)
quindi a *due* punti di intersezione
retta-circonferenza …



… porta ad *una sola* coppia (x, y),
quindi ad *un solo*
punto di intersezione.



L'equazione risolvente sarà un'equazione di secondo grado contenente il parametro *m* nei coefficienti.
Ma un'equazione di secondo grado ammette una sola soluzione se e solo se $\Delta=0$!
Coraggio:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x+2y-20=0 \\ y=mx-m+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=mx-m+6 \\ x^2+(mx-m+6)^2-4x+2(mx-m+6)-20=0 \end{cases}$$

Considero ora la sola equazione risolvente.

$$x^2+(mx-m+6)^2-4x+2(mx-m+6)-20=0$$

Svolgo i calcoli, ordino i termini
(prima quelli con x^2, poi quelli con x, infine i "termini noti", ossia quelli non contenenti né x^2 né x)

$$x^2+m^2x^2+m^2+\underset{**}{36}-2m^2x\ \underline{+12mx}-\underline{\underline{12m}}-4x\ \underline{+2mx}\ \underline{\underline{-2m}}+\underset{**}{12}-\underset{**}{20}=0$$

$$x^2+m^2x^2-2m^2x+14mx-4x+m^2-14m+28=0$$

$$\left(1+m^2\right)x^2-2\left(m^2-7m+2\right)x+\left(m^2-14m+28\right)=0$$

A questo punto NON MI INTERESSA *risolvere* l'equazione:
mi interessa invece cercare quali sono i valori di m per cui
l'equazione ha 1 sola soluzione anziché 2.

E tali valori di m saranno quelli per i quali il Δ dell'equazione
(o, indifferentemente, il Δ " della formula ridotta", ossia il $\Delta/4$)
è uguale a 0.

$$\boxed{\frac{\Delta}{4}=0}$$

$$\left(m^2-7m+2\right)^2-\left(1+m^2\right)\left(m^2-14m+28\right)=0$$

$$\cancel{m^4}\ \underline{+49m^2}\ \underset{**}{+4}\ \cancel{-14m^3}\ \underline{+4m^2}\ \underline{\underline{-28m}}\ \underline{-m^2}\ \underline{\underline{+14m}}\ \underset{**}{-28}\ \cancel{-m^4}\ \cancel{+14m^3}\ \underline{-28m^2}=0$$

$$24m^2-14m-24=0$$

$$m_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+576}}{24}=\frac{7\pm\sqrt{625}}{24}=\frac{7\pm 25}{24}=\begin{cases}-\dfrac{18}{24}=-\dfrac{3}{4}\\ \dfrac{32}{24}=\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

Le due rette tangenti hanno dunque equazioni:

$$y-6=m(x-1)$$

con $m=-\dfrac{3}{4}$ o, rispettivamente, $m=\dfrac{4}{3}$

e sono perciò:

$$t_1:\ y-6=-\frac{3}{4}(x-1);\quad y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}+6;\quad \boxed{y=-\frac{3}{4}x+\frac{27}{4}}$$

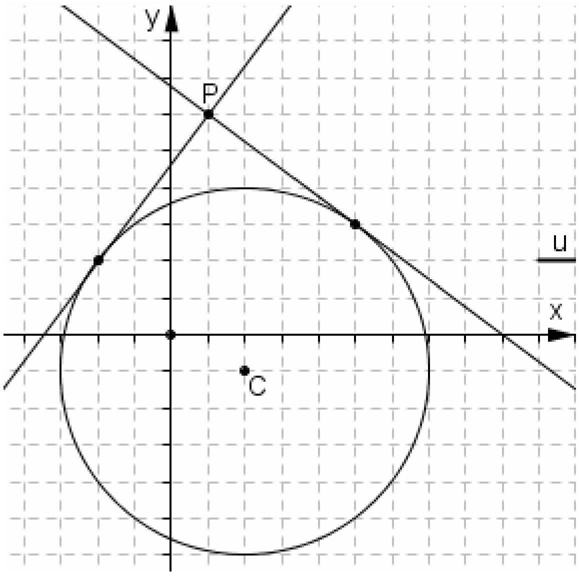
$$t_2:\ y-6=\frac{4}{3}(x-1);\quad y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}+6;\quad \boxed{y=\frac{4}{3}x+\frac{14}{3}}$$

♫ Il **metodo geometrico ("METODO DELLA DISTANZA")**
consiste nello scrivere l'equazione della generica retta per P: $y-6=m(x-1)$
e nell'imporre la condizione che tale retta abbia distanza, dal centro della circonferenza
(le cui coordinate sono immediatamente ricavabili dall'equazione),
uguale al raggio della circonferenza stessa (anch'esso ricavabile dall'equazione).

$$x^2+y^2-4x+2y-20=0$$

$$\mathrm{C}\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)=(2,-1)$$

$$r=\sqrt{4+1+20}=5$$



Distanza della retta
$y-6=m(x-1)$
ossia
$y=mx-m+6$
o anche
$mx-y-m+6=0$
dal centro $(2,-1)$:

$$d=\frac{|m\cdot 2-(-1)-m+6|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|2m+1-m+6|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|m+7|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$d=5$$

$$\frac{|m+7|}{\sqrt{m^2+1}}=5$$

$$|m+7|=5\sqrt{m^2+1}$$

$$m^2+14m+49=25m^2+25$$

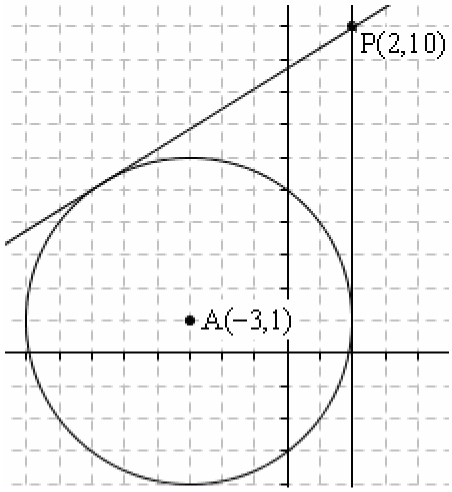
$$-24m^2+14m+24=0$$

$$12m^2-7m-12=0$$

$$m_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+576}}{24}=\begin{cases}-3/4\\ 4/3\end{cases}$$

valori uguali a quelli determinati col metodo precedente!

7) *Condurre dal punto* $P(2,10)$ *le tangenti alla circonferenza di centro* $A(-3,1)$ *e raggio* 5.



L'interesse di questo problema sta nel fatto che il punto è esterno,
quindi le tangenti sono due,
ma scrivendo l'equazione della generica retta per P

$$y-10=m(x-2)$$

e poi applicando
il metodo del delta o il metodo della distanza,
di tangente se ne trova una sola.

E per forza!
La seconda tangente è, in questo caso, una retta parallela all'asse y,
quindi non rappresentabile sotto la forma

$$y-y_0=m(x-x_0)\,.$$

La tangente mancante, dunque,
non verrà determinata col calcolo,
ma semplicemente dall'osservazione del disegno.

♪ Metodo del Δ:

$$\begin{cases}(x+3)^2+(y-1)^2=25\\ y-10=m(x-2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+6x+9+y^2-2y+1=25\\ y-10=mx-2m\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2+6x-2y-15=0\\ y=mx-2m+10\end{cases}$$

$$x^2+(mx-2m+10)^2+6x-2(mx-2m+10)-15=0$$

$$x^2+m^2x^2+4m^2+100-4m^2x\,\underline{+20mx}\,\underline{\underline{-40m}}+6x\,\underline{-2mx}\,\underline{\underline{+4m}}-20-15=0$$

$$x^2+m^2x^2-4m^2x+18mx+6x+4m^2-36m+65=0$$

$$(1+m^2)x^2-2(2m^2-9m-3)x+(4m^2-36m+65)=0$$

$$\boxed{\frac{\Delta}{4}=0}$$

$$(2m^2-9m-3)^2-(1+m^2)(4m^2-36m+65)=0$$

$$\cancel{4m^4}\ \cancel{+81m^2}+9\cancel{-36m^3}\ \cancel{-12m^2}\ \underline{\underline{+54m}}\ \cancel{-4m^2}\ \underline{\underline{+36m}}-65\cancel{-4m^4}\cancel{+36m^3}\ \cancel{-65m^2}=0$$

$$90m-56=0$$

$$m=\frac{56}{90}=\frac{28}{45}$$

Una tangente ha dunque equazione $y-10=\frac{28}{45}(x-2)\rightarrow\boxed{y=\frac{28}{45}x+\frac{394}{45}}$;

L'altra tangente equazione *che si trae direttamente dalla figura*: $\boxed{x=2}$

♫ In ALTERNATIVA, metodo della distanza:
imponiamo che sia uguale a 5 la distanza della retta $y-10=m(x-2)$ dal punto $A(-3,1)$

$$y-10=m(x-2)$$

$$y-10=mx-2m$$

$$mx-y-2m+10=0$$

$$\frac{|m\cdot(-3)-1-2m+10|}{\sqrt{m^2+1}}=5$$

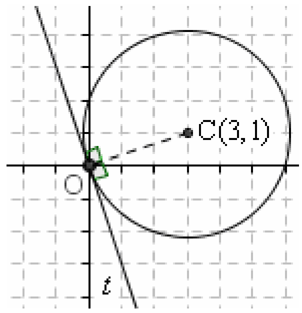
$$\frac{|-3m-1-2m+10|}{\sqrt{m^2+1}}=5;\quad\frac{|-5m+9|}{\sqrt{m^2+1}}=5;\quad|-5m+9|=5\sqrt{m^2+1};$$

$$\cancel{25m^2}-90m+81=\cancel{25m^2}+25;\quad -90m=-56;\quad m=\frac{56}{90}=\frac{28}{45}\ \ldots\ \textit{stesse conclusioni di prima.}$$

8) *Scrivere l'equazione della retta tangente nell'origine alla circonferenza* $x^2+y^2-6x-2y=0$

La differenza fra questo problema e i due precedenti sta nel fatto che
QUESTA VOLTA IL PUNTO APPARTIENE ALLA CIRCONFERENZA.

Oltre al *metodo del delta* e al *metodo della distanza*,
abbiamo allora a disposizione anche un terzo e comodissimo metodo,
che potremmo chiamare "**METODO DELLA PERPENDICOLARITA'** ":
la tangente cercata è semplicemente la retta,
passante per l'origine,
e ivi perpendicolare al raggio che ha un estremo nell'origine.



Determiniamo dunque il coefficiente angolare della retta CO:

$$m_{CO}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_C-y_O}{x_C-x_O}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

dopodiché sarà $m_t=-3$ da cui:

$\boxed{t:\ y=-3x}$

9) Scrivi le equazioni delle circonferenze, col centro sull'asse *y*, tangenti alle due rette
$r_1: y=-2x-4;\quad r_2: y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$.

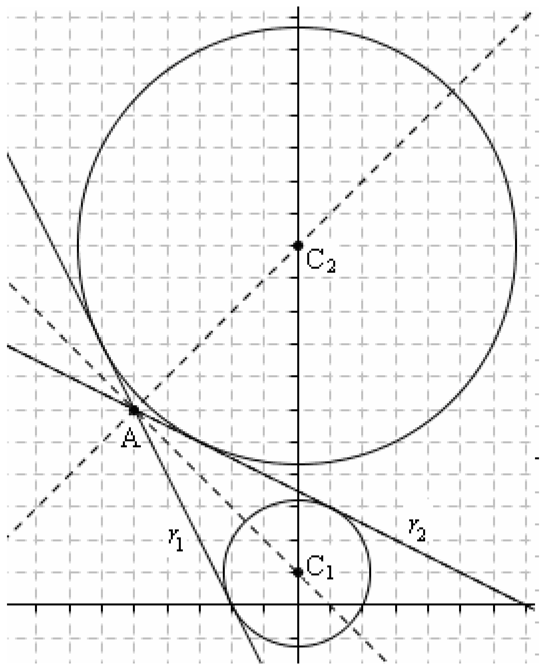
♪ METODO GEOMETRICO

Facendo la figura si vede che il problema ha 2 soluzioni.

In ciascuno dei due casi, il centro può essere determinato come intersezione fra l'asse *y* e una delle bisettrici (tratteggiate) degli angoli formati dalle rette r_1, r_2.

Il raggio sarà poi la distanza fra il centro così trovato e r_1 o, indifferentemente, r_2.

Noti il centro e il raggio si scriverà l'equazione richiesta.
Fai tu tutti i calcoli.



♫ Il METODO ALGEBRICO è più pesante. Vediamolo.

Si scrive l'equazione della generica circonferenza che ha per centro un punto $C(0,k)$ sull'asse *y* e raggio indicato con *r*:

$$(x-0)^2+(y-k)^2=r^2 .$$

Tale equazione contiene due parametri *k*, *r*.

Si tratta ora di determinare tali due parametri in modo che la circonferenza sia tangente a entrambe le rette r_1, r_2.

Condizione di tangenza con

$$r_1:\ \begin{cases}x^2+(y-k)^2=r^2\\ y=-2x-4\end{cases}$$

$$x^2+(-2x-4-k)^2=r^2$$

$$5x^2+4(4+k)x+(16+8k+k^2-r^2)=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=0\quad 4(4+k)^2-5(16+8k+k^2-r^2)=0$$

$$-k^2-8k-16+5r^2=0$$

$$r_2:\ \begin{cases}x^2+(y-k)^2=r^2\\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\end{cases}$$

$$x^2+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}-k\right)^2=r^2$$

$$5x^2-2(7-2k)x+(49-28k+4k^2-4r^2)=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=0\quad (7-2k)^2-5(49-28k+4k^2-4r^2)=0$$

$$-16k^2+112k-196+20r^2=0$$

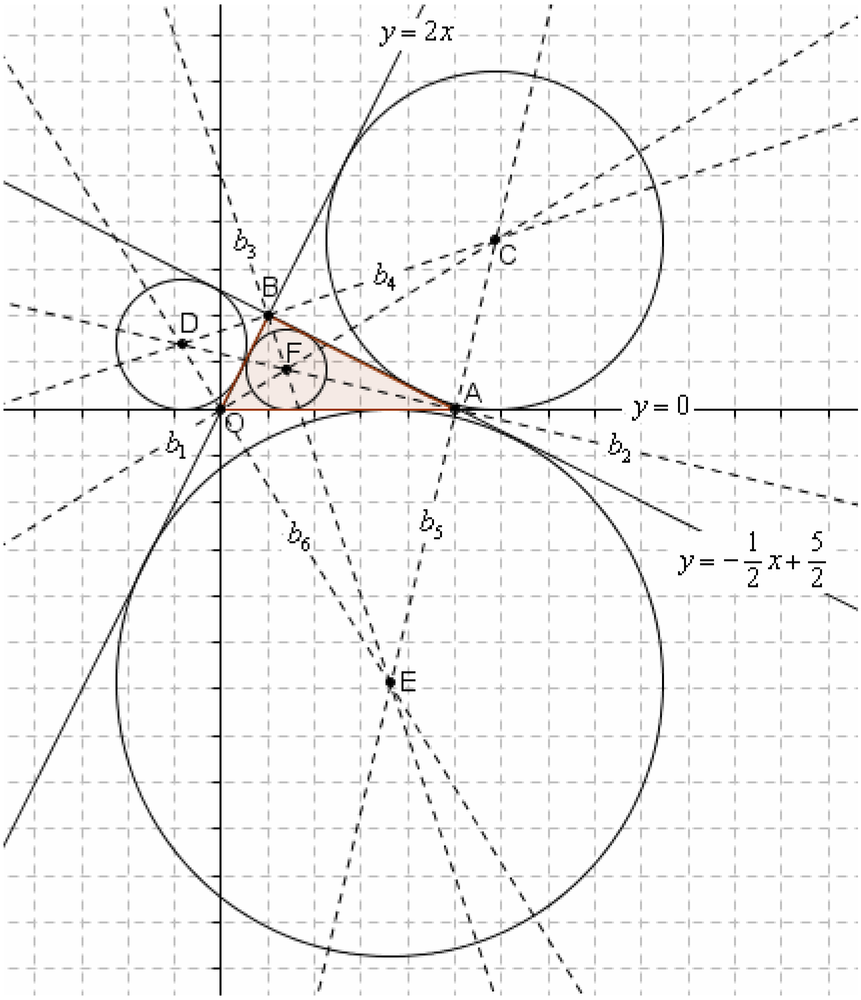
$$\begin{cases}-k^2-8k-16+5r^2=0\\ -16k^2+112k-196+20r^2=0\end{cases}\qquad \begin{cases}4k^2+32k+64-20r^2=0 & (1^a\ eq.)\cdot(-4)\\ -16k^2+112k-196+20r^2=0\end{cases}$$

$$(1)+(2)\quad -12k^2+144k-132=0;\quad k^2-12k+11=0;\quad (k-1)(k-11)=0;\quad k=1\vee k=11$$

$$\begin{cases}k=1\\ -1-8-16+5r^2=0;\ r^2=25;\ r=\sqrt{5}\end{cases}\quad\vee\quad\begin{cases}k=11\\ -121-88-16+5r^2=0;\ r^2=45;\ r=\sqrt{45}=3\sqrt{5}\end{cases}$$

10) *Scrivi le equazioni delle circonferenze tangenti alle tre rette* $y=0,\ \ y=2x,\ \ y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

Il metodo geometrico è di gran lunga il più efficace.
Si tratta di trovare i centri intersecando le bisettrici di opportuni angoli, poi …
Procediamo.



Equazioni di b_1 e b_6, bisettrici degli angoli formati dalle rette $y=0$ e $y=2x\ (2x-y=0)$:

$$\frac{|y|}{\sqrt{0+1}}=\frac{|2x-y|}{\sqrt{4+1}};\quad |y|=\frac{|2x-y|}{\sqrt{5}};\quad |y|\sqrt{5}=|2x-y|;\quad y\sqrt{5}=\pm(2x-y)$$

I) $y\sqrt{5}=2x-y;\ \ y\sqrt{5}+y=2x;\ \ y\left(\sqrt{5}+1\right)=2x;\ \ y=\frac{2x}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}=\frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{5-1}x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}x\ \ (b_1)$

II) $y\sqrt{5}=-2x+y;\ \ y\sqrt{5}-y=-2x;\ \ y\left(\sqrt{5}-1\right)=-2x;\ \ y=-\frac{2}{\sqrt{5}-1}x\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=-\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}x=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x\ \ (b_6)$

Equazioni di b_2 e b_5, bisettrici degli angoli formati da $y=0$ e $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\ (x+2y-5=0)$:

$$\frac{|y|}{\sqrt{0+1}}=\frac{|x+2y-5|}{\sqrt{1+4}};\quad |y|=\frac{|x+2y-5|}{\sqrt{5}};\quad |y|\sqrt{5}=|x+2y-5|;\quad y\sqrt{5}=\pm(x+2y-5)$$

I) $y\sqrt{5}=x+2y-5;\ \ y\sqrt{5}-2y=x-5;\ \ y\left(\sqrt{5}-2\right)=x-5;$

$$y=\frac{x-5}{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=\frac{(x-5)\left(\sqrt{5}+2\right)}{5-4}=\left(\sqrt{5}+2\right)x-5\left(\sqrt{5}+2\right)\ \ (b_5)$$

II) $y\sqrt{5}=-x-2y+5;\ \ y\sqrt{5}+2y=-x+5;\ \ y\left(\sqrt{5}+2\right)=-x+5;$

$$y=\frac{-x+5}{\sqrt{5}+2}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}=\frac{(-x+5)\left(\sqrt{5}-2\right)}{5-4}=-\left(\sqrt{5}-2\right)x+5\left(\sqrt{5}-2\right)\ \ (b_2)$$

Equazioni di b_3 e b_4, bisettrici degli angoli formati da $y=2x$ $(2x-y=0)$ e $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ $(x+2y-5=0)$:

$$\frac{|2x-y|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|x+2y-5|}{\sqrt{1+4}};\quad \frac{|2x-y|}{\cancel{\sqrt{5}}}=\frac{|x+2y-5|}{\cancel{\sqrt{5}}};\quad 2x-y=\pm(x+2y-5)$$

I) $2x-y=x+2y-5;\ \ -3y=-x-5;\ 3y=x+5;\ y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}\ (b_4)$

II) $2x-y=-x-2y+5;\ \ y=-3x+5\ (b_3)$

$$b_1\cap b_2\ (\mathrm{F}):\ \begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}x \\ y=-\left(\sqrt{5}-2\right)x+5\left(\sqrt{5}-2\right)\end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}x=-\left(\sqrt{5}-2\right)x+5\left(\sqrt{5}-2\right)$$

$$x\sqrt{5}-x=-2x\sqrt{5}+4x+10\sqrt{5}-20;$$

$$3x\sqrt{5}-5x=10\sqrt{5}-20;$$

$$\left(3\sqrt{5}-5\right)x=10\left(\sqrt{5}-2\right);$$

$$x=\frac{10\left(\sqrt{5}-2\right)}{3\sqrt{5}-5}\cdot\frac{3\sqrt{5}+5}{3\sqrt{5}+5}=\frac{10\left(15+5\sqrt{5}-6\sqrt{5}-10\right)}{45-25}=\frac{10\left(5-\sqrt{5}\right)}{20}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{5\sqrt{5}-5-5+\sqrt{5}}{4}=\dfrac{6\sqrt{5}-10}{4}=\dfrac{3\sqrt{5}-5}{2}\end{cases}$$

$$\mathrm{F}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)$$

Raggio della circonferenza di centro $\mathrm{F}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)$: $r=d(\mathrm{F},\ y=0)=|y_{\mathrm{F}}|=\left|\frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right|=\frac{3\sqrt{5}-5}{2}$

$\boxed{\text{Equazione della circonferenza di centro } \mathrm{F}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)\text{: e raggio} =\frac{3\sqrt{5}-5}{2}}$:

$$\left(x-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)^2$$

$$x^2-\left(5-\sqrt{5}\right)x+\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2+y^2-\left(3\sqrt{5}-5\right)y+\cancel{\left(\frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)^2}=\cancel{\left(\frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{x^2+y^2-\left(5-\sqrt{5}\right)x-\left(3\sqrt{5}-5\right)y+\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2=0}$$

o anche

$$\boxed{4x^2+4y^2-4\left(5-\sqrt{5}\right)x-4\left(3\sqrt{5}-5\right)y+\left(5-\sqrt{5}\right)^2=0}$$

Abbiamo proposto questo esercizio come esempio di problema
con calcoli più complicati del solito;
prosegui ora tu, se lo desideri, con le equazioni delle altre tre circonferenze.

27. ESERCIZI SULLA CIRCONFERENZA

1) Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $K(3,0)$ e tangente alla retta $y=2x$.

2) Determinare l'equazione della circonferenza passante per $A(0,2)$ e $B(2,2)$ e tangente alla retta $y=2x-7$.

3) Scrivere l'equazione della circonferenza passante per $A(4,4)$
e tangente alla retta $r: y=2x+1$ nel suo punto di ascissa 1.

4) Scrivere l'equazione della circonferenza inscritta nel triangolo OAB, con: $O(0,0)$; $A(4,0)$; $B(0,-3)$
poi l'equazione della circonferenza circoscritta al medesimo triangolo.

5) Determinare le equazioni delle circonferenze tangenti agli assi e passanti per il punto $(1,2)$

6) E' richiesta l'equazione della circonferenza passante per O, per il punto $(-1,1)$,
e che stacca sulla retta $x+y-2=0$ una corda lunga $2\sqrt{2}$.

7) Scrivere le equazioni delle tangenti comuni alla circonferenza di centro $C_1(0,1)$ e raggio $r_1=1$
e alla circonferenza di centro $C_2(3,-1)$ e raggio $r_2=3$

8) Scrivere le equazioni delle due circonferenze
tangenti alla retta $r: y=\dfrac{x-1}{2}$ nel suo punto di ascissa 1, e aventi raggio $\sqrt{5}$.

9) Trovare i centri delle circonferenze tangenti alle rette $y=x$, $y=0$, e aventi raggio unitario.

10) Sono date: la circonferenza C_1 di centro $(1,3)$ e raggio 1; e la circonferenza C_2 di centro $(2,0)$ e raggio 2.

a) Dal punto A (0,6) conduci le due rette tangenti alla C_1 e scrivine le equazioni.
Verifica poi che le due rette in questione risultano tangenti anche alla C_2.

b) Le due circonferenze ammettono, oltre alle due tangenti comuni già tracciate,
anche altre due tangenti comuni: scrivine le equazioni.

SOLUZIONI

1) $5x^2+5y^2-30x+9=0$

2) Due soluzioni: $x^2+y^2-2x-4=0 \quad \vee \quad x^2+y^2-2x-15y+26=0$

3) $x^2+y^2-6x-4y+8=0$

4) $x^2+y^2-4x+3y=0; \quad x^2+y^2-2x+2y+1=0$

5) $x^2+y^2-2x-2y+1=0\,; \quad x^2+y^2-10x-10y+25=0$

6) $4x^2+4y^2-3x-11y=0$

7) $y=2; \quad y=-\dfrac{12}{5}x-\dfrac{8}{5}$

8) $x^2+y^2-4y-1=0\,; \quad x^2+y^2-4x+4y+3=0$

9) Ben 4 circonferenze sono soluzioni del problema.
I loro centri sono, rispettivamente:

$$C_1\left(1+\sqrt{2},\,1\right); \quad C_2\left(1-\sqrt{2},\,1\right); \quad C_3\left(-1+\sqrt{2},\,-1\right); \quad C_4\left(-1-\sqrt{2},\,-1\right)$$

10) a) $y=-\dfrac{4}{3}x+6; \quad x=0$

b) $y=\dfrac{3}{4}x+1; \quad y=2$

28. LUOGHI GEOMETRICI

Si dice "luogo geometrico" l'insieme costituito dai punti (del piano, o dello spazio) che godono di una determinata proprietà geometrica.

In Geometria Analitica, l'equazione di un luogo geometrico si ricava scrivendo l'uguaglianza a cui soddisfano tutti e soli i punti P(x, y) del piano cartesiano, che fanno parte del luogo, e traducendola poi in coordinate.

- *Scrivi l'equazione del luogo dei punti la cui distanza da* $\mathrm{O}(0,0)$ *è doppia della distanza da* $\mathrm{A}(3,0)$

  Il luogo in questione è l'insieme di tutti e soli i punti $\mathrm{P}(x,y)$, tali che $\mathrm{PO}=2\cdot\mathrm{PA}$. Traducendo in coordinate quest'uguaglianza, avremo: $\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-3)^2+y^2}$; ... $x^2+y^2-8x+12=0$

  Questa equazione individua la circonferenza di centro (4,0) e raggio 2.

- *Scrivi l'eq. del luogo dei punti la cui distanza dalla retta* $4x-3y=0$ *è doppia della distanza dall'asse x.*

  $r:\ 4x-3y=0;\quad asse\ x:\ y=0$

  $\{\mathrm{P}(x,y)/\ d(\mathrm{P},r)=2\cdot d(\mathrm{P},asse\ x)\}$

  $$\frac{|4x-3y|}{\sqrt{16+9}}=2|y|;\quad |4x-3y|=10|y|;\quad 4x-3y=\pm 10y;\ \left\langle\begin{array}{l}4x-13y=0\\4x+7y=0\end{array}\right.$$

  Il luogo in questione è perciò costituito da una coppia di rette.

- *Scrivi l'equazione del luogo dei punti che vedono il segmento* AB, *con* A(1,1) *e* B(3,3), *sotto un angolo retto.*

  RISOLUZIONE 1

  La geometria euclidea ci insegna che il luogo in questione è la circonferenza di diametro AB: è perciò immediato determinare l'equazione richiesta.

  NOTA. E' del tutto spontaneo far rientrare anche i due punti A e B nel luogo, come "posizioni limite". Osserviamo che, a stretto rigore, per tali punti l'angolo in questione è "indeterminato"; e fra i valori dell'indeterminazione c'è anche il valore 90°.

  RISOLUZIONE 2

  Se non si intuisce subito la natura del luogo, si potrà procedere come segue:

  $$\left\{\mathrm{P}(x,y)/\ m_{\mathrm{PA}}=-\frac{1}{m_{\mathrm{PB}}}\right\}\quad\left(\textit{ricordiamo che per il coeff. angolare vale la formula } m=\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

  $$\frac{y-1}{x-1}=-\frac{1}{\frac{y-3}{x-3}};\quad \frac{y-1}{x-1}=-\frac{x-3}{y-3},\ \ con\ x\neq 3;$$

  $$y^2-3y-y+3=-x^2+3x+x-3,\ \ con\ x\neq 3,\ x\neq 1,\ y\neq 3$$

  $$x^2+y^2-4x-4y+6=0,\ \ con\ x\neq 3,\ x\neq 1,\ y\neq 3$$

  L'equazione ricavata è quella di una circonferenza (facile poi controllare che questa circonferenza ha centro nel punto medio di AB e raggio uguale alla metà di AB, quindi risulta avere per diametro AB).

  E' vero tuttavia che le condizioni poste privano la circonferenza in esame di alcuni punti: quelli di ascissa 1 o 3, e quelli di ordinata 3.
  Si tratta dei due punti A e B (del cui "diritto di appartenere al luogo" abbiamo già discusso nella NOTA) e dei due punti S(1,3) e T(3,1).
  Riguardo ad S e T, anch' essi appartengono senza dubbio al nostro luogo, perché:
  - *SA è parallelo all'asse y, SB è parallelo all'asse x quindi* $A\hat{S}B=90°$;
  - *TA è parallelo all'asse x, TB è parallelo all'asse y, quindi* $A\hat{T}B=90°$.

  Perché dunque i nostri passaggi algebrici hanno portato ad estrometterli?
  Ciò è avvenuto per il fatto che, quando si utilizzano i coefficienti angolari, restano tagliate inesorabilmente fuori le rette parallele all'asse y; e SA, TB sono per l'appunto tali.
  Perciò il procedimento da noi seguito era fatalmente "destinato" ad escludere alcuni punti, che invece appartengono a pieno diritto al luogo in questione.
  Pertanto "a posteriori", riconoscendo che anche S e T fanno parte del luogo, semplicemente ignoreremo le condizioni poste, e diremo che il luogo cercato è la circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x-4y+6=0$
  NESSUN PUNTO ESCLUSO.

RISOLUZIONE 3
Alla stessa equazione avremmo potuto pervenire anche con un altro metodo.
Il luogo dei punti $P(x,y)$ per i quali $A\hat{P}B = 90°$
può essere pensato come il luogo dei punti $P(x,y)$ per cui il triangolo APB è rettangolo in P.
Ma se un triangolo è rettangolo, allora in esso la somma dei quadrati dei cateti è uguale al quadrato dell'ipotenusa; e viceversa, se in un triangolo la somma dei quadrati di due lati è uguale al quadrato del lato rimanente, allora il triangolo è rettangolo, con l'angolo retto che è opposto all'ultimo lato menzionato (Teorema di Pitagora e suo inverso).
In definitiva, $P(x,y)$ appartiene al nostro luogo se e solo se

$$PA^2 + PB^2 = AB^2$$
$$\left[(x-1)^2 + (y-1)^2\right] + \left[(x-3)^2 + (y-3)^2\right] = (3-1)^2 + (3-1)^2$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DI UN LUOGO GEOMETRICO

Consideriamo le seguenti equazioni, in cui i valori di *x* e di *y* vengono fatti dipendere da un parametro *t*:

$$\boxed{\begin{cases} x = t^2 + 3 \\ y = 1 - t \end{cases}, \ \textit{con } t \in \mathbb{R}}$$

Se noi facciamo variare *t*, varierà in corrispondenza la coppia (x, y); ad esempio:

$$t = 0 \to \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \ (3,1) \qquad t = 1 \to \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \ (4,0) \qquad t = \frac{1}{2} \to \begin{cases} x = 13/4 \\ y = 1/2 \end{cases} \ \left(\frac{13}{4}, \frac{1}{2}\right) \qquad \ldots$$

Le equazioni considerate individuano perciò un luogo di punti sul piano cartesiano:
al variare di *t* in $\mathbb{R}$, il punto $(x,y) = (t^2+3,\ 1-t)$ "si muove" sul piano cartesiano, descrivendo una curva.

Ci chiediamo ora:
è possibile passare dalle equazioni parametriche alla ordinaria equazione cartesiana F(*x*, *y*) = 0 del luogo?

Sì, e molto facilmente.
Basta infatti **isolare il parametro in una delle due equazioni, e poi andare a sostituire nell'altra.**

$$\begin{cases} x = t^2 + 3 \\ y = 1 - t \end{cases} \quad \to \quad \begin{array}{l} t = 1 - y \\ x = (1-y)^2 + 3 \end{array} \quad \ldots \quad \boxed{x = y^2 - 2y + 4} \quad \textit{equazione cartesiana del luogo}$$

Esempio
Scrivere l'equazione del luogo descritto dai baricentri dei triangoli ABP, *essendo:*
$A(3,0);\ \ B(6,0);\ \ P$ *un punto della retta* $y = 2x$

Indichiamo le coordinate di P con $(\alpha, 2\alpha)$. Avremo:

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{3+6+\alpha}{3} = \frac{9+\alpha}{3}; \qquad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{0+0+2\alpha}{3} = \frac{2\alpha}{3}$$

quindi: $\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{9+\alpha}{3} \\ y = \dfrac{2\alpha}{3} \end{cases}}$ che sono le equazioni *parametriche* del luogo considerato.

Passiamo ora all'equazione *cartesiana*: $\alpha = \dfrac{3y}{2};\quad x = \dfrac{9 + \frac{3y}{2}}{3} \quad \ldots \quad \boxed{y = 2x - 6}$

Attività
Con GeoGebra, utilizzando lo strumento "Luogo", costruisci il luogo dei baricentri dei triangoli ABP.

Esercizio 1
Determinare il luogo dei punti di intersezione delle rette di equazioni:
$r_1:\ 3x + y + 2k - 1 = 0,\ \ r_2:\ x - y - k = 0$
al variare del parametro k *in* $\mathbb{R}$ *(soluzione:* $y = 5x - 1$*)*

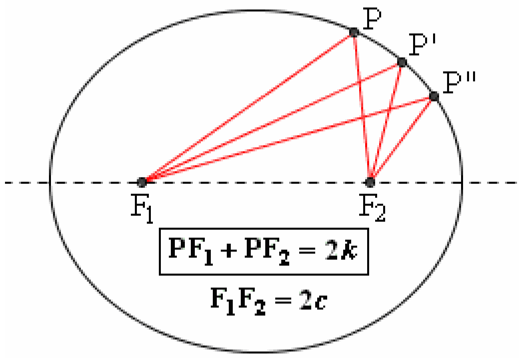
Esercizio 2
Scrivere l'equazione del luogo (già da noi in precedenza considerato) dei punti che vedono il segmento AB, con A(1,1) e B(3,3), sotto un angolo retto, interpretandolo come luogo dei punti di intersezione di due rette r ed s, passanti rispettivamente per A e per B, e perpendicolari fra loro.

29. L'ELLISSE NEL PIANO CARTESIANO

DEFINIZIONE DI ELLISSE

Si dice "ellisse"
il luogo dei punti del piano
per i quali è costante la somma delle distanze
da due punti fissi, detti "fuochi":
$\mathbf{PF_1 + PF_2} = \textit{costante}$

Indicheremo
la somma costante con $2k$,
e la distanza fra i due fuochi = distanza focale) con $2c$.



E' divertente costruire un'ellisse di costante $2k$, e distanza focale $2c$, attraverso una semplice esperienza.
Prendi una cordicella di lunghezza $2k$, e fissa, sulla lavagna, due punti F_1, F_2 la cui distanza valga $2c$.
Chiedi a due compagni di tenere fisse le estremità della cordicella, rispettivamente in F_1 e in F_2;
tu, intanto, tramite un pezzetto di gesso che terrai con la mano, descriverai il punto P tirando la cordicella in modo che le sue due parti, dal gessetto al punto fisso F_1 e dal gessetto a F_2, siano belle diritte e tese.
Muovendo il gessetto, mentre la cordicella è tenuta sempre tesa, sulla lavagna apparirà un'ellisse:
infatti la somma $PF_1 + PF_2$ si manterrà sempre uguale alla lunghezza costante della cordicella.

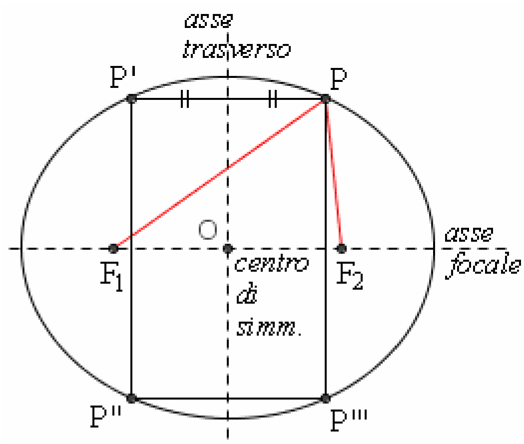
E' evidente che, fissata la distanza focale $2c$, c'è un *vincolo* per la costante $2k$:
la cordicella, di misura $2k$, dovrà essere per forza più lunga di $F_1F_2 = 2c$ ($2k > 2c,\ k > c$).
Con riferimento alla figura, la "disuguaglianza triangolare" ci dice infatti che $2k = PF_1 + PF_2 > F_1F_2 = 2c$.
Se scegliessimo $2k < 2c$, il luogo dei punti P per cui $PF_1 + PF_2 = 2k$ sarebbe vuoto;
se poi prendessimo $2k = 2c$, il luogo degenererebbe in … dillo tu!

Insomma: **dovrà essere $2k > 2c$ ($k > c$) affinché il luogo non sia né vuoto, né degenere.**

Si intuisce, si constata da buoni disegni,
e si potrebbe facilmente dimostrare,
che un'ellisse è dotata di **due assi di simmetria**:

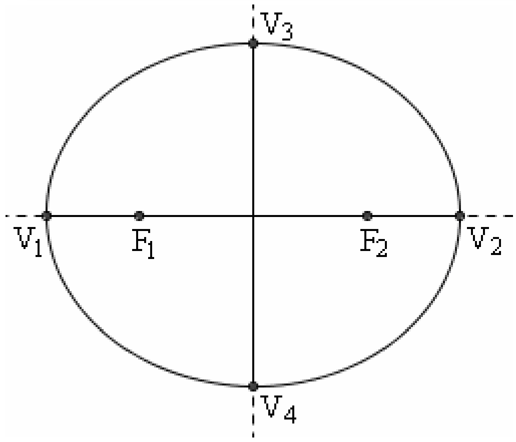
- la retta passante per i due fuochi (detta "asse focale")
- e l'asse del segmento che ha per estremi i due fuochi (detta "asse trasverso").

La curva possiede pure **un centro di simmetria**
(chiamato, per brevità, semplicemente **"il centro"** dell'ellisse):
esso è l'intersezione O fra l'asse focale e l'asse trasverso,
ossia il punto medio del segmento che ha per estremi i fuochi.



Si dicono "**vertici**" dell'ellisse
i punti di intersezione della curva coi suoi assi di simmetria.
Nella figura, abbiamo indicato i quattro vertici con
V_1, V_2, V_3, V_4.
I segmenti che congiungono le coppie di vertici opposti
vengono detti "gli assi" dell'ellisse
(asse maggiore, asse minore").

Ma allora, cosa dobbiamo pensare
quando una persona ci parla degli "assi" di un'ellisse?
Quella persona sta pensando a delle rette o a dei segmenti?
In effetti c'è una certa ambiguità.
Ma il contesto del discorso renderà senz'altro chiaro
quale debba essere l'interpretazione corretta.

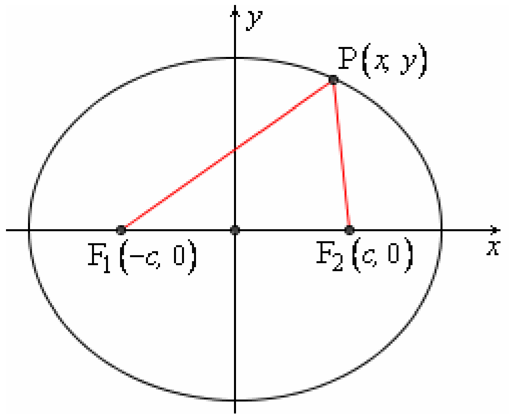


E' possibile dimostrare (lo lascio a te per esercizio!) che, in un'ellisse:

- **l'asse maggiore è sempre quello contenente i fuochi;**
- **l'asse maggiore è uguale alla "costante dell'ellisse"**
  (ossia la somma costante di cui parla la definizione, quella che abbiamo indicato con $2k$)

L'EQUAZIONE DELL'ELLISSE

Per semplicità, supporremo inizialmente che gli assi del riferimento cartesiano coincidano con gli assi di simmetria dell'ellisse.
In queste condizioni, si parlerà di **"ellisse riferita ai suoi assi"**, o anche di "ellisse in posizione canonica" (brevemente: "**ellisse canonica**").



Se l'ellisse è in posizione canonica, il centro (= centro di simmetria) dell'ellisse coinciderà con l'origine e i fuochi staranno o sull'asse *x*, o sull'asse *y*.
In ciascuno dei due casi, l'origine sarà il punto medio del segmento F_1F_2.

Supponiamo dapprima che i fuochi stiano sull'asse *x*.

In questo caso, al posto di indicare la "somma costante" con $2k$, la indicheremo con $2a$ (questa scelta è dettata da motivi di opportunità che si comprenderanno solo a posteriori).
Avremo dunque:

$$F_1(-c,0);\ \ F_2(c,0)\ \ P(x,y)$$
$$PF_1+PF_2=2a$$
$$(*)\qquad \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}+\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}=2a;\qquad \sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}=2a-\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$
$$\cancel{x^2}+2cx\cancel{+c^2}\cancel{+y^2}=4a^2\cancel{+x^2}-2cx\cancel{+c^2}\cancel{+y^2}-4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$
$$4cx-4a^2=-4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2};\qquad a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}=a^2-cx$$
$$a^2x^2\cancel{-2a^2cx}+a^2c^2+a^2y^2=a^4\cancel{-2a^2cx}+c^2x^2$$
$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Essendo ora $a=k>c$, sarà anche $a^2>c^2$ e quindi $a^2-c^2>0$. Potremo allora porre

$$a^2-c^2=b^2;$$

la nostra equazione diventerà

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

e dividendo per il secondo membro, che è sicuramente non nullo, otterremo

$$(**)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\qquad (b^2=a^2-c^2)$$

Abbiamo fin qui fatto vedere che, se un punto $P(x,y)$ appartiene all'ellisse di fuochi $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$ e costante $2a$, allora le coordinate (x,y) di P verificheranno l'equazione $(**)$.
Si può poi dimostrare che vale anche il viceversa, ossia che, se un punto (x,y) è tale che le sue coordinate verifichino la $(**)$, allora (x,y) appartiene all'ellisse di fuochi $F_1(-c,0);\ F_2(c,0)$ e costante $2a$ (NOTA)

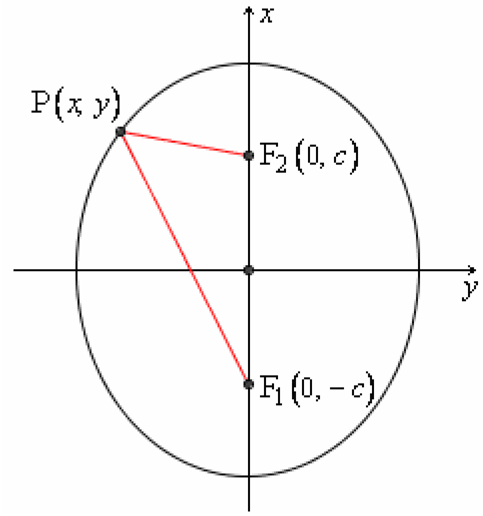
Resta così stabilito che l'ellisse di fuochi $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$ e costante $2a$ ha equazione

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad (b^2=a^2-c^2)}$$

NOTA. La dimostrazione è lasciata allo studente:

consiste nel controllare che ogni punto P di coordinate $\left(x,\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)$ è tale che $PF_1+PF_2=2a$,

ossia verifica l'equazione $(*)$: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$.
Osserviamo che questo fatto non è da considerarsi "scontato" a priori: infatti i passaggi algebrici da noi effettuati a partire dall'equazione iniziale, che conteneva radicali quadratici, hanno comportato ben due elevamenti al quadrato:
e sappiamo che, elevando al quadrato i due membri di un'equazione, può capitare che si "intrufolino" nell'equazione "false soluzioni", soluzioni non accettabili.
Ciò nel nostro caso non è avvenuto, ma teoricamente avrebbe potuto avvenire.



E se i fuochi stessero sull'asse *y*?

In questo caso, al posto di indicare la "somma costante" con $2k$, la indicheremo con $2b$
e, fatti i calcoli, perverremo all'equazione

$$b^2x^2+(b^2-c^2)y^2=b^2(b^2-c^2)\ ;$$

ponendo ora

$$b^2-c^2=a^2$$

(posizione lecita in quanto $b=k>c$)
l'equazione assumerà la forma

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

e finalmente, dopo aver diviso per a^2b^2,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a^2=b^2-c^2)$$

Si capisce a questo punto che la scelta di indicare la costante dell'ellisse
(= la somma costante di cui parla la definizione)

- **con $2a$ anziché con $2k$ quando i fuochi stanno sull'asse *x*,**
- **con $2b$ anziché con $2k$ quando i fuochi stanno sull'asse *y*,**

è motivata dal fatto che in questo modo, in entrambi i casi,
si perviene formalmente alla stessa equazione.

Ricapitoliamo:

Considerata un'ellisse canonica coi fuochi sull'asse *x*, se si indica con $2c$ la sua distanza focale e con $2a$ la sua costante, la sua equazione è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (b^2=a^2-c^2)$	Considerata un'ellisse canonica coi fuochi sull'asse *y*, se si indica con $2c$ la sua distanza focale e con $2b$ la sua costante, la sua equazione è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a^2=b^2-c^2)$

Dunque un'ellisse canonica, sia che abbia i fuochi in orizzontale, sia che li abbia in verticale,
ha sempre equazione della forma

$$\textbf{(1)}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Data ora un'equazione della forma (1), ci domandiamo:
rappresenterà sempre un'ellisse, qualunque siano i valori dei due parametri a, b?
La risposta è affermativa. Infatti:

- Se $a^2>b^2$, poniamo $a^2-b^2=c^2$
  e andiamo a ricavare l'equazione dell'ellisse di fuochi $(\pm c, 0)$ e costante $2a$: troveremo la (1).
  Ciò prova che la (1), nel caso $a^2>b^2$, rappresenta un'ellisse (coi fuochi in orizzontale).
- Se $b^2>a^2$, poniamo $b^2-a^2=c^2$
  e andiamo a ricavare l'equazione dell'ellisse di fuochi $(0, \pm c)$ e costante $2b$: troveremo la (1).
  Ciò prova che la (1), nel caso $b^2>a^2$, rappresenta un'ellisse (coi fuochi in verticale).
- Se poi $b^2=a^2$, a ben guardare la (1) è l'equazione di una circonferenza!
  Ora, potrai facilmente verificare che
  una circonferenza può essere vista come una particolare ellisse
  in cui i fuochi sono coincidenti, sovrapposti.
  Infatti, quando diciamo che la circonferenza di centro O e raggio *r* è il luogo dei punti P per i quali
  $\mathrm{PO}=r$,
  potremmo anche dire che si tratta del luogo dei punti P per i quali
  $\mathrm{PF_1}+\mathrm{PF_2}=2r$,
  avendo posto i due punti $\mathrm{F_1}, \mathrm{F_2}$ entrambi in O.

STUDIO DELL'EQUAZIONE $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Intersecando la curva $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ con gli assi, avremo che:

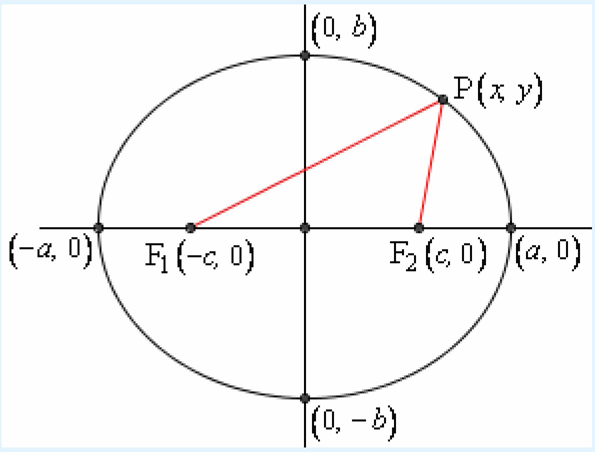
- **i punti di intersezione A_1, A_2 con l'asse orizzontale hanno coordinate: $A_1(-a,0)$; $A_2(a,0)$**
- **i punti di intersezione B_1, B_2 con l'asse verticale hanno coordinate: $B_1(0,-b)$; $B_2(0,b)$.**

Caso dei fuochi in orizzontale:

$$PF_1+PF_2=2a$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$con\ \ b^2=a^2-c^2\ \rightarrow\ c^2=a^2-b^2$$

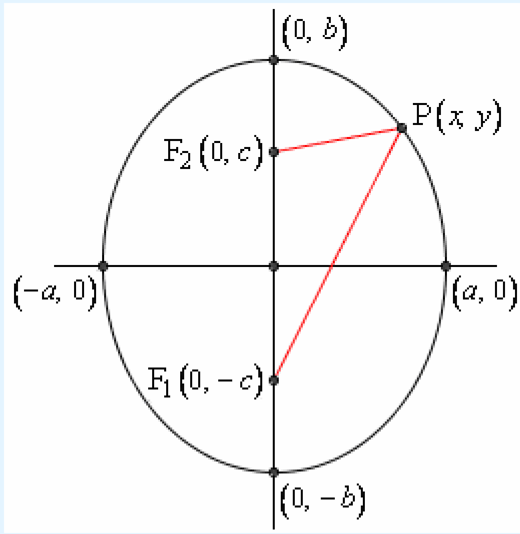


Caso dei fuochi in verticale:

$$PF_1+PF_2=2b$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$con\ \ a^2=b^2-c^2\ \rightarrow\ c^2=b^2-a^2$$



Quindi, **IN OGNI CASO,**

- ***a* è il semiasse orizzontale,**
- ***b* è il semiasse verticale.**

Occorre poi sempre ricordare che

- **la costante dell'ellisse** (NOTA) **è uguale all'asse maggiore,**
- **l'asse maggiore è quello contenente i fuochi (= i fuochi stanno sull'asse maggiore).**

NOTA.
Ricordiamo che:
per "costante dell'ellisse" intendiamo la somma costante di cui parla la definizione,
quella che avevamo in generale indicato con $2k$ e che per l'ellisse canonica abbiamo preferito indicare con $2a$ nel caso i fuochi fossero in orizzontale, con $2b$ per fuochi in verticale

Dalle osservazioni appena fatte segue che:

- **se $a>b$, allora i fuochi sono in orizzontale**
- **se $b>a$, allora i fuochi sono in verticale**

In ogni caso,
la semidistanza focale *c* si ottiene estraendo la radice quadrata della differenza fra a^2 e b^2,
con l'intesa che questa differenza venga calcolata sottraendo dal numero maggiore il minore,
in modo da avere risultato positivo:

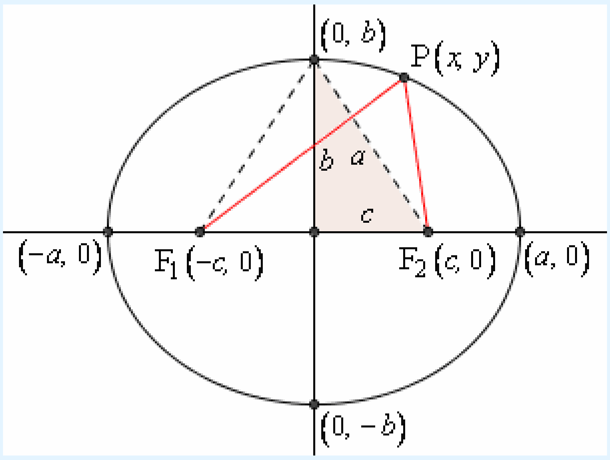
$$c=\begin{cases}\sqrt{a^2-b^2} & se\ \ a^2>b^2\\ \sqrt{b^2-a^2} & se\ \ b^2>a^2\end{cases}$$. Potremmo anche dire che $c=\sqrt{|a^2-b^2|}$

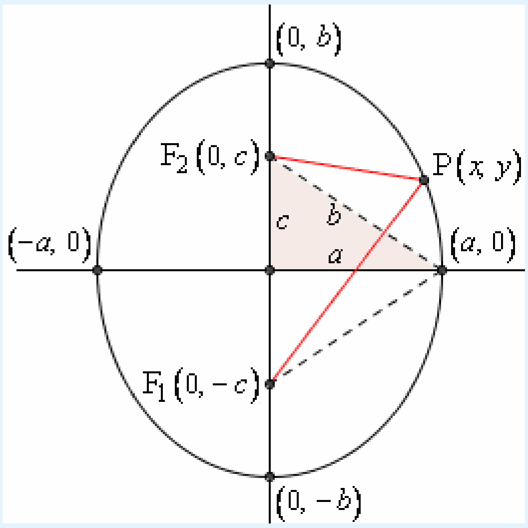
RIASSUNTO DEL RIASSUNTO SULL'ELLISSE NEL PIANO CARTESIANO

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Se $a>b$:
fuochi in orizzontale
$\mathrm{PF_1}+\mathrm{PF_2}=2a$
$c^2=a^2-b^2$

Se $b>a$:
fuochi in verticale
$\mathrm{PF_1}+\mathrm{PF_2}=2b$
$c^2=b^2-a^2$





In definitiva:

- **quando mi danno un'equazione della forma**

  (1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

  io dico:
  Che bello! Ho un'ellisse. La misura del semiasse orizzontale è *a*, quella del semiasse verticale è *b*.

  Posso subito fare, quindi, il disegno,
  sapendo che i vertici in orizzontale hanno ascisse $\pm a$ e quelli in verticale hanno ordinate $\pm b$
  (se la memoria mi tradisce, NO PROBLEM:
  cerco le intersezioni di (1) con gli assi e ritrovo queste cose automaticamente).

  Dove stanno i fuochi?
  Ovviamente, sul semiasse maggiore,
  che potrà essere quello orizzontale o quello verticale, a seconda dei casi.

  E che coordinate hanno?
  Mi basterà ricavare la **semidistanza focale *c***, perché poi **le coordinate dei fuochi saranno:**
  $(\pm c, 0)$ se i fuochi sono in orizzontale, $(0, \pm c)$ se sono in verticale.

  Ma come ricavo *c*?
  Semplice:
  c^2 potrà valere a^2-b^2 oppure b^2-a^2;
  basterà scegliere, fra le due differenze, quella che dà risultato positivo.
  Potremmo anche dire che c^2 è il valore assoluto di a^2-b^2: $c^2=|a^2-b^2|$.

- Inversamente, **quando un problema mi parla di un' ellisse "canonica"**, devo pensare
  ad un'ellisse "riferita ai suoi assi", cioè ad un'ellisse collocata in un sistema di riferimento
  i cui assi cartesiani coincidano con gli assi di simmetria dell'ellisse.
  So che **l'equazione sarà della forma**

  (1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

  e si tratterà di determinare i valori delle due costanti *a, b* (o direttamente: a^2, b^2,
  sfruttando due opportune condizioni che il problema mi fornirà.

ECCENTRICITA' DI UN'ELLISSE

Un'ellisse può essere più o meno "bislunga",
può discostarsi in misura maggiore o minore dalla forma circolare.
Poiché un'ellisse è individuata dalla sua distanza focale $2c$ e dalla sua costante $2k$,
si comprende che dovrà essere il rapporto $(2c)/(2k) = c/k$ a determinare la forma della curva.

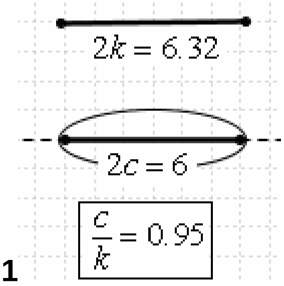


Figura 1

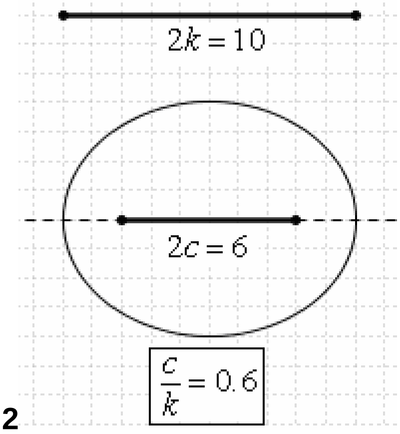


Fig. 2

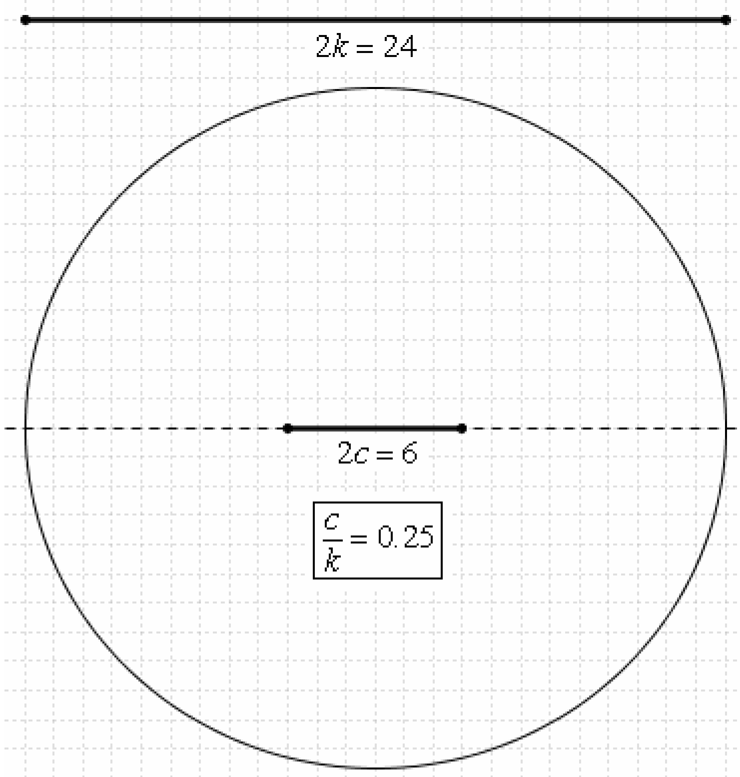


Fig. 3

Nella sequenza di figure sovrastanti
è stata tenuta fissa la distanza $2c$ tra i due fuochi: $2c = 6$ in tutti e tre i casi.
E' stato invece fatto crescere, nel passaggio dalla figura 1 alla 2 e poi alla 3, il valore della grandezza $2k$
($2k = \mathrm{PF}_1 + \mathrm{PF}_2$, essendo P il generico punto dell'ellisse).
Con ciò, si è fatto variare il rapporto c/k, che è andato decrescendo.
Si può osservare che
quanto più il rapporto c/k diminuisce,
tanto più l'ellisse tende ad assomigliare ad una circonferenza.

La quantità c/k
(semidistanza focale/semicostante dell'ellisse,
o, se si preferisce: semidistanza focale/semiasse maggiore.,
viene chiamata "**eccentricità**" dell'ellisse e indicata con il simbolo ***e***.

$$e = \frac{semidistanza\ \ focale}{semicostante\ dell'ellisse} = \frac{semidistanza\ \ focale}{semiasse\ maggiore} \left(= \frac{distanza\ \ focale}{asse\ maggiore} \right).$$

Poiché la semidistanza focale è sempre più piccola del semiasse maggiore,
***e* sarà sempre compresa fra 0 e 1.**
Se la quantità *e* è piccola (cioè, vicina a 0),
l'ellisse tende ad assomigliare ad una circonferenza;
se invece e è grande (cioè, vicina a 1),
l'ellisse si discosta dalla forma circolare, ossia appare "bislunga", "eccentrica".

Per capire meglio,
supponiamo che la nostra ellisse sia collocata in un riferimento cartesiano, e riferita ai suoi assi.

La sua equazione sarà allora, come sappiamo, della forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dove a, b saranno i due semiassi.

Supponiamo, per fissare le idee, che il semiasse maggiore sia quello orizzontale, cioè a.
Allora potremo scrivere:

$$e = \frac{semidistanza\ \ focale}{semiasse\ maggiore} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Di qui si vede che *e* risulta più grande, quando
è più piccolo il rapporto *b/a* fra il semiasse minore e il maggiore.
Ma un piccolo rapporto semiasse minore/semiasse maggiore
comporta, è evidente, una forma più "bislunga" dell'ellisse.

- Può l'eccentricità di un'ellisse essere uguale a 1?
  No, perché la costante dell'ellisse dovrebbe essere uguale alla distanza focale,
  e l'ellisse, in tali condizioni, degenera in un segmento.
- Può essere $e = 0$?
  Ciò richiederebbe una distanza focale nulla, cioè che i due fuochi siano sovrapposti, coincidenti.
  In effetti, *è possibile* pensare coincidenti i due fuochi:
  la curva si riduce, in questo caso, ad una circonferenza.

In definitiva: **nell'ellisse si ha** $\mathbf{0 \le e < 1}$**;**
$e = 0$ nel caso della circonferenza,
mentre in un'ellisse molto "bislunga", "eccentrica" si ha *e* prossimo a 1.

ALCUNI ESEMPI DI ESERCIZI SULL'ELLISSE CANONICA

- ESEMPIO 1

Disegna e studia l'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

Abbiamo $a^2=25,\ b^2=9 \ \rightarrow\ a=5,\ b=3$.

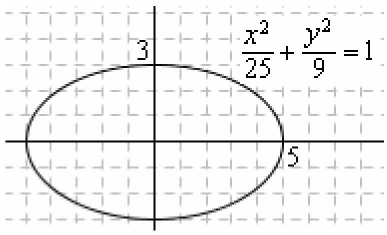
Ci converrà disegnare *immediatamente* i vertici
$(\pm 5,\ 0);\ (0,\ \pm 3)$.

Il semiasse maggiore risulta essere *a*
(che è il semiasse orizzontale):
quindi i fuochi sono in orizzontale.

Calcoliamo la semidistanza focale:
$c^2=a^2-b^2 \ \rightarrow\ c^2=16 \ \rightarrow\ c=4$.

Perciò i fuochi hanno coordinate $(\pm 4,\ 0)$.

L'eccentricità vale
$e=c/a=4/5$.



- ESEMPIO 2

Disegna e studia l'ellisse di equazione $4x^2+3y^2=12$

Prima di tutto dobbiamo portare l'equazione sotto la forma
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

A tale scopo, occorre dividere per 12:
avremo così
$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

$a^2=3,\ b^2=4 \ \rightarrow\ a=\sqrt{3},\ b=2$.

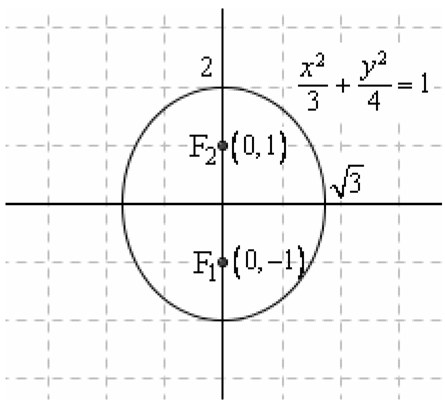
Ci converrà disegnare *immediatamente* i vertici
$(\pm\sqrt{3},\ 0);\ (0,\ \pm 2)$.

Il semiasse maggiore risulta essere *b*
(che è il semiasse verticale):
quindi i fuochi sono in verticale.

Calcoliamo la semidistanza focale:
$c^2=b^2-a^2 \ \rightarrow\ c^2=1 \ \rightarrow\ c=1$.

Perciò i fuochi hanno coordinate $(0,\ \pm 1)$

L'eccentricità vale
$e=c/b=1/2$.



- ESEMPIO 3

Scrivi l'equazione dell'ellisse canonica di costante (= somma costante) 10, *passante per* (3,1)

Se la costante (= somma costante) è 10, allora la semicostante è 5:
ma allora, sarà $a=5$ o piuttosto $b=5$?
Beh, facendo un disegnino, si vede che di ellissi canoniche con costante 10, passanti per (3,1), ce n'è due: una con i fuochi in orizzontale, e l'altra coi fuochi in verticale.
Il problema ha quindi due soluzioni.

Distinguiamo i due casi:

FUOCHI IN ORIZZONTALE (= asse maggiore orizzontale): $a=5$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{b^2}=1$, e ponendo la condizione di appartenenza del punto (3,1) si ottiene: $b^2=\frac{25}{16}$.

L'equazione in questo caso è dunque $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{16}}=1 \;\rightarrow\; x^2+16y^2=25$

FUOCHI IN VERTICALE (= asse maggiore verticale): $b=5$

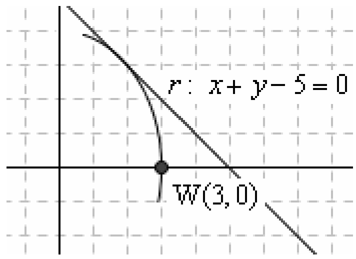
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{25}=1$, e ponendo la condizione di appartenenza del punto (3,1) si ottiene: $a^2=\frac{75}{8}$.

L'equazione in questo caso è dunque $\frac{x^2}{\frac{75}{8}}+\frac{y^2}{25}=1 \;\rightarrow\; 8x^2+3y^2=75$

- ESEMPIO 4

Determina l'equazione dell'ellisse canonica passante per $\mathrm{W}(3,0)$ *e tangente alla* $r:\; x+y-5=0$

Scriviamo l'equazione generale $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



Abbiamo ora bisogno di due condizioni,
per determinare i due parametri *a*, *b*.

- Una condizione sarà data dall'appartenenza di $\mathrm{W}(3,0)$;
- l'altra sarà la condizione di tangenza retta-ellisse, ottenibile ponendo a sistema l'equazione della retta con quella dell'ellisse e imponendo all'equazione risolvente del sistema la condizione $\Delta=0$.

Si ottiene in definitiva: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

- ESEMPIO 6

Determina l'equazione della retta tangente all'ellisse $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$, *nel suo punto* A *di coordinate* (3, 1)

Quando si ha UNA CURVA "DI 2° GRADO" (ellisse, circonferenza, parabola, iperbole)
E UN PUNTO $\mathrm{P_0}(x_0, y_0)$ CHE APPARTENGA (occhio, è indispensabile!) ALLA CURVA,
si potrebbe dimostrare che il problema di scrivere
L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE A QUELLA CURVA IN QUEL SUO PUNTO
si può risolvere semplicemente applicando la seguente comodissima

REGOLA DEGLI SDOPPIAMENTI:

si effettuano, nell'equazione della curva, le sostituzioni

$$x^2 \rightarrow x_0x \qquad y^2 \rightarrow y_0y \qquad xy \rightarrow \frac{y_0x+x_0y}{2} \qquad x \rightarrow \frac{x_0+x}{2} \qquad y \rightarrow \frac{y_0+y}{2}$$

ed è fatta!

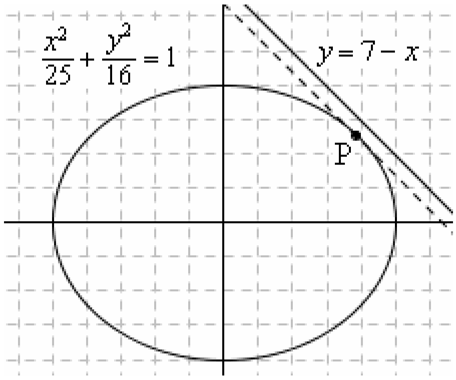
Nel nostro caso, avremo $\frac{3x}{12}+\frac{1\cdot y}{4}=1$ ossia $x+y=4$.

Controlla tu stesso che col "metodo del $\Delta=0$" si otterrebbe la medesima equazione.

ESEMPIO 6

Considerata l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$,
determina le coordinate del suo punto più vicino alla retta $y=7-x$.

Facendo un disegno, ci si rende conto che si tratta del punto P di contatto con l'ellisse, di una delle due tangenti alla curva parallele alla retta data e quindi aventi coefficiente angolare $m=-1$.



Ma una generica retta di coefficiente angolare -1 ha equazione della forma $y=-x+k$:
poniamo dunque tale equazione a sistema con l'equazione dell'ellisse, allo scopo di determinare il valore di k per il quale si ha tangenza.

$$\begin{cases} y=-x+k \\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{(-x+k)^2}{16}=1$$

$$16x^2+25\left(x^2-2kx+k^2\right)=400$$

$$16x^2+25x^2-50kx+25k^2=400$$

$$\boxed{41x^2-50kx+25k^2-400=0}$$

Condizione di tangenza: $\boxed{\frac{\Delta}{4}=0}$

$$(25k)^2-41\left(25k^2-400\right)=0$$

$$625k^2-41\cdot 25\left(k^2-16\right)=0$$

Semplificando per 25:

$$25k^2-41\left(k^2-16\right)=0;\ \ 25k^2-41k^2+656=0;\ \ -16k^2=-656;\ \ k^2=41$$

$\boxed{k=\sqrt{41}}$ (*la soluzione* <0 *viene esclusa: corrisponderebbe al punto più LONTANO*)

Con $k=\sqrt{41}$, la retta è $y=-x+\sqrt{41}$
e le coordinate del punto P di intersezione fra la retta e l'ellisse si possovo ricavare ponendo $k=\sqrt{41}$ nell'equazione risolvente del sistema

$\boxed{41x^2-50kx+25k^2-400=0}$,

che diventa così

$$\boxed{41x^2-50x\sqrt{41}+25\cdot 41-400=0}$$

$$41x^2-50x\sqrt{41}+1025-400=0$$

$$41x^2-50x\sqrt{41}+625=0$$

$$\left(x\sqrt{41}-25\right)^2=0$$

$$x=\frac{25}{\sqrt{41}}\ \rightarrow\ y=-x+\sqrt{41}=-\frac{25}{\sqrt{41}}+\sqrt{41}=\frac{-25+41}{\sqrt{41}}=\frac{16}{\sqrt{41}}$$

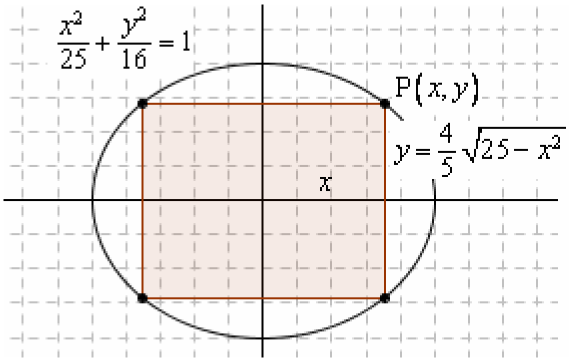
Si ha pertanto

$$\boxed{P\left(\frac{25}{\sqrt{41}},\ \frac{16}{\sqrt{41}}\right)}$$

ESEMPIO 7 - *Nell'ellisse di equazione* $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ *inscrivi il rettangolo di area massima.*

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1;$

$y=...=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$
(nel 1° *e* 2° quadrante si prenderà il segno +)



Detto $P(x,y)$ il vertice del rettangolo appartenente al 1° quadrante, si avrà

$base\ rettangolo = 2x$
$altezza\ rettangolo = 2y = 2\cdot\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2} = \frac{8}{5}\sqrt{25-x^2}$

$Area\ (da\ massimizzare) =$
$= 2x\cdot\frac{8}{5}\sqrt{25-x^2} = \frac{16x}{5}\sqrt{25-x^2}\quad con\ 0\le x\le 5$

Ora, determinare il valore di x per il quale la quantità

$$\boxed{S(x)=\frac{16x}{5}\sqrt{25-x^2}}$$

assume il suo valore massimo (nell'intervallo $0\le x\le 5$)
è facile se si conoscono le cosiddette *derivate* …
… ma noi possiamo cavarcela ugualmente anche senza di queste.
Infatti
UNA QUANTITA' POSITIVA E' MASSIMA QUANDO E' MASSIMO IL SUO QUADRATO!

$$\boxed{S^2(x)}=\left(\frac{16x}{5}\sqrt{25-x^2}\right)^2=\frac{256x^2}{25}\left(25-x^2\right)=\boxed{256x^2-\frac{256}{25}x^4}\quad con\ 0\le x\le 5$$

Possiamo ora per comodità andare a cercare il valore di x per il quale è massima
la quantità ottenibile dividendo la precedente per 256, ossia

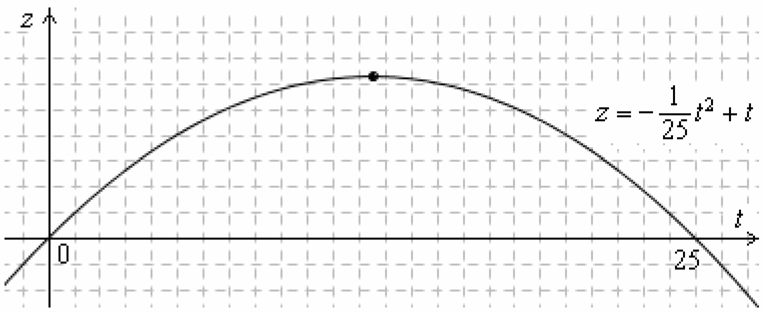
$$\boxed{\frac{S^2(x)}{256}=x^2-\frac{1}{25}x^4\quad con\ 0\le x\le 5},$$

o anche, posto $x^2=t$,

$$\boxed{t-\frac{1}{25}t^2=-\frac{1}{25}t^2+t\quad con\ 0\le t\le 25}$$

La funzione

$$\boxed{z=-\frac{1}{25}t^2+t}\quad con\ 0\le t\le 25$$



ha come grafico un arco di parabola
(vedi figura).
Il punto più alto di questa parabola
è il vertice, che si ha con

$$t=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{-\frac{2}{25}}=\frac{25}{2}$$

che corrisponde a

$$x=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2},\quad \boxed{2x=5\sqrt{2}\ \ (base)}$$

da cui

$$y=\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}=\frac{4}{5}\sqrt{25-\frac{25}{2}}=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{50-25}{2}}=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{4}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},\quad \boxed{2y=2\sqrt{2}\ \ (altezza)}$$

E in definitiva allora, fra tutti i rettangoli inscrivibili nell'ellisse assegnata,
quello di area massima è il rettangolo le cui dimensioni orizzontale e verticale misurano risp. $5\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$.

TRASLAZIONE DI UNA CURVA NEL PIANO CARTESIANO

Abbiamo visto, nel capitolo sulle trasformazioni geometriche del volume 2,
che, data una curva di equazione $y = f(x)$ oppure $F(x,y)=0$, e considerato un numero positivo p,

♪ se al posto di x si sostituisce $x-p$,
la nuova curva ha un grafico che, rispetto a quello della curva "madre",
è traslato orizzontalmente con "effetto bastian contrario", ossia: è traslato verso DESTRA di p unità.

♫ Analogamente, la sostituzione $x \to x+p$
porta a una curva "figlia" traslata verso SINISTRA di p unità rispetto alla curva "madre".

ELLISSE TRASLATA

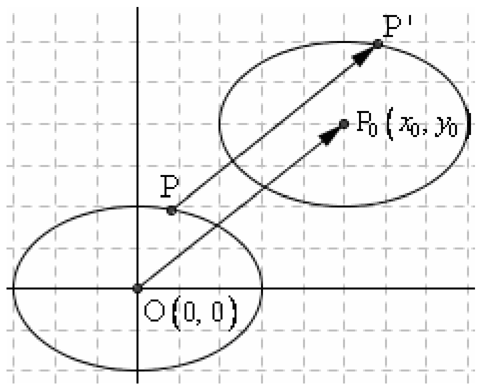
Consideriamo un'ellisse, che sia collocata nel piano cartesiano in modo da essere traslata rispetto alla posizione canonica.

Questa ellisse avrà il suo centro di simmetria in un punto $P_0(x_0, y_0)$ anziché nell'origine.

Essa potrà essere pensata come ottenibile per traslazione, a partire dall'ellisse canonica avente gli stessi semiassi.

Dunque
l'equazione di un'ellisse "traslata", di centro (x_0, y_0), sarà

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$



D'altronde, la nostra ellisse, nel sistema di riferimento ausiliario XP_0Y avente origine in $P_0(x_0, y_0)$, e traslato rispetto al sistema iniziale xOy, si troverà in posizione canonica, e quindi avrà equazione della forma

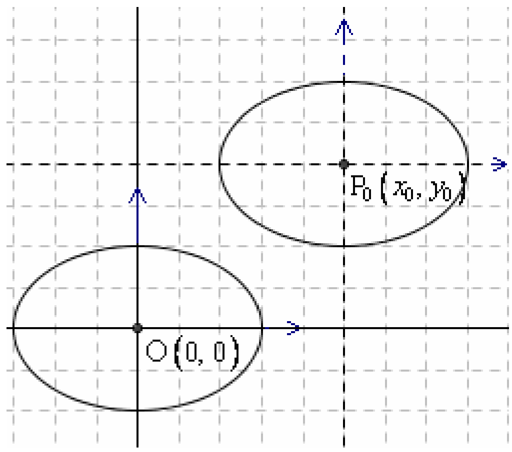
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1,$$

essendo a, b i semiassi orizzontale e verticale;
ora, tornando al sistema xOy
tramite le equazioni di <u>cambiamento di riferimento</u>

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases},$$

si ricava appunto l'equazione

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

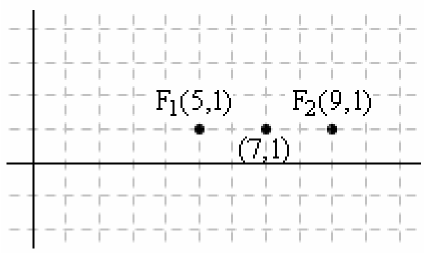


❑ ESEMPIO 1
Scrivi l'equazione dell'ellisse di fuochi $F_1(5,1)$; $F_2(9,1)$
e semiasse maggiore 3.

Il centro di simmetria della curva è il punto $(7,1)$.
I fuochi sono in orizzontale:
dunque il semiasse maggiore è quello orizzontale. Perciò
$a=3 \;\; (a^2=9)$.

La semidistanza focale è $c=2$.
$c^2=a^2-b^2 \;\to\; b^2=a^2-c^2=9-4=5$

In definitiva l'equazione sarà $\frac{(x-7)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{5}=1$



❑ ESEMPIO 2 - *Scrivi l'equazione dell'ellisse di fuochi* $F_1(-2,3)$; $F_2(-2,-3)$ *e semiasse maggiore* 5.

Soluzione: $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

❑ ESEMPIO 3 - *Qual è l'equazione dell'ellisse traslata di centro* $(1,-2)$ *e semiassi* 4, 5 ?

Due possibilità: $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{25}=1; \quad \frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$

DIETRO-FRONT: DALL'EQUAZIONE ALLA CURVA … SE POSSIBILE

Dunque l'equazione dell'ellisse traslata di centro (x_0, y_0) è:

$$(2) \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Se sviluppiamo i calcoli e liberiamo dai denominatori, otteniamo un'equazione dalla forma:

$$(3) \quad mx^2+ny^2+px+qy+r=0$$

E' lecito ora chiedersi se un'equazione che si presenta sotto la forma (3), ossia un'equazione di 2° grado in x, y, mancante del "termine rettangolare" xy, rappresenti sempre un'ellisse.

La risposta è negativa.

Innanzitutto, si può dimostrare che

condizione necessaria affinché la (3) individui un'ellisse
è che *m, n* siano concordi.
Ma **tale condizione non è poi sufficiente,**
perché, anche con *m, n* concordi,
(3) potrebbe rappresentare
un luogo puntiforme, o il luogo vuoto.

Nella pratica, quando è data un'equazione dalla forma (3), con m, n concordi,
ed è richiesto di studiare la curva corrispondente,
si cerca di ricondurre la (3) alla forma (2), ammesso che ciò si riveli possibile,
applicando il **metodo del completamento del quadrato**.

- ESEMPIO 1

$$4x^2+2y^2-4x+12y+11=0$$

Potrebbe trattarsi di un'ellisse, in quanto i coefficienti di x^2 e y^2 sono concordi.

$$4(x^2-x)+2(y^2+6y)+11=0$$

$$4\left[\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\right]+2\left[\left(y^2+6y+9\right)-9\right]+11=0$$

$$4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-1+2\left(y^2+6y+9\right)-18+11=0$$

$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y+3\right)^2=8$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(y+3\right)^2}{4}=1$$

e l'ultima equazione ottenuta rivela trattarsi di un'ELLISSE TRASLATA,
di centro $\left(\frac{1}{2},-3\right)$ e semiassi $a=\sqrt{2}$ (semiasse orizzontale), $b=2$ (semiasse verticale).

- ESEMPIO 2

$$x^2+9y^2-2x+36y+46=0$$

Si ottiene, dopo opportuni passaggi: $\frac{(x-1)^2}{9}+(y+2)^2=-1$ LUOGO VUOTO

- ESEMPIO 3

$$4x^2+y^2+12x-10y+34=0$$

$\left(2x+3\right)^2+\left(y-5\right)^2=0$ LUOGO PUNTIFORME, RIDOTTO AL SOLO PUNTO $\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$.

30. ESERCIZI SULL'ELLISSE (soluzioni alla fine della rassegna)

A partire dall'equazione di un'ellisse

♪ *stabilisci quanto valgono*

I. *le lunghezze dei semiassi orizzontale (a) e verticale (b);*
II. *le coordinate dei vertici e dei fuochi;*
III. *la costante (somma costante delle distanze di un punto dai fuochi)* $2k$
IV. *l'eccentricità*

♫ *disegna la curva*

1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 2) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{225}=1$ 3) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$ 4) $9x^2+25y^2=225$

5) $\frac{36}{25}x^2+\frac{9}{4}y^2=1$ 6) $x^2+4y^2=1$ 7) $25x^2+9y^2=1$ 8) $x^2+10\left(y^2-1\right)=0$

Scrivi l'equazione di un'ellisse conoscendone i fuochi e la costante (=somma costante) 2k.

9) $F_{1,2}(\pm 4, 0);\ 2k=10$ 10) $F_{1,2}(0, \pm 4);\ 2k=10$ 11) $F_{1,2}(\pm 5, 0);\ 2k=26$

12) $F_{1,2}\left(0, \pm\sqrt{3}\right);\ 2k=4$ 13) $F_{1,2}\left(\pm\frac{3}{5}, 0\right);\ 2k=2$ 14) $F_{1,2}\left(\pm\sqrt{5}, 0\right);\ 2k=6$

Scrivi l'equazione di un'ellisse conoscendone i vertici.
Determinane i fuochi e la costante (=somma costante) 2k.

15) $(\pm 8,0);\ (0,\pm 10)$ 16) $\left(\pm\sqrt{2},0\right);\ \left(0,\pm\frac{1}{5}\right)$

Scrivi l'equazione di un'ellisse canonica conoscendone uno dei semiassi (a è quello orizzontale, b il verticale) e sapendo che passa per un punto P assegnato.
Determina inoltre i fuochi della curva e il valore della sua costante (=somma costante) 2k.

17) $a=5;\ P\left(4, \frac{12}{5}\right)$ 18) $a=8;\ P\left(\frac{64}{17}, -15\right)$ 19) $b=10;\ P\left(-3\sqrt{3}, 5\right)$

Scrivi l'equazione di un'ellisse conoscendone i fuochi e sapendo che passa per un punto P assegnato.

20) $F_{1,2}(\pm 4, 0);\ P\left(4, \frac{9}{5}\right)$ 21) $F_{1,2}\left(0, \pm\sqrt{3}\right);\ P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ 22) $F_{1,2}(\pm 1, 0);\ P(0, -3)$

Scrivi l'equazione di un'ellisse canonica sapendo che passa per la coppia seguente di punti:

23) $\left(3, \frac{16}{5}\right);\ \left(4, \frac{12}{5}\right)$ 24) $\left(\frac{1}{3}, 2\sqrt{2}\right);\ \left(\frac{\sqrt{5}}{3}, 2\right)$ 25) $\left(\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right);\ (-1, -3)$

Determina l'equazione di un'ellisse canonica a partire dalle informazioni seguenti
(a semiasse orizzontale, b verticale, c semidistanza focale, e eccentricità)

26) $a=7, b=4$ 27) $a=9, c=40$ 28) $a=2\sqrt{3}, c=2\sqrt{2}$ 29) $b=2\sqrt{2}, c=1$

30) $a=5, a>b, e=\frac{4}{5}$ 31) $a=5, a<b, e=\frac{4}{5}$ 32) $b=1,\ e=\frac{1}{2}$

33) $a=25,\ a>b,\ e=\frac{7}{25}$ 34) $a=12,\ a<b,\ e=\frac{4}{5}$ 35) $a<b,\ c=2\sqrt{2},\ e=\frac{2}{3}\sqrt{2}$ 36) $c=3,\ e=\frac{5}{6}$

Porta in forma standard le seguenti equazioni (ciascuna rappresenta un semiellisse); disegna la curva:

37) $y=\sqrt{1-4x^2}$ 38) $y=5\sqrt{1-x^2}$ 39) $y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ 40) $y=\frac{3}{7}\sqrt{49-16x^2}$

Considera la curva associata all'equazione data, e determina i valori del parametro per i quali
I) rappresenta un'ellisse
II) rappresenta un'ellisse coi fuochi sull'asse x
III) rappresenta un'ellisse coi fuochi sull'asse y
IV) rappresenta una circonferenza

41) $\frac{x^2}{3k-2}+\frac{y^2}{k-4}=1$ 42) $\frac{x^2}{3k-2}+\frac{y^2}{k+4}=1$ 43) $\frac{x^2}{k^2-4}+\frac{y^2}{2k-1}=1$ 44) $\frac{x^2}{k-1}+\frac{y^2}{7-k}=1$

Scrivi l'equazione della retta tangente ad un'ellisse in un suo punto.

45) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{18}=1\ \ \mathrm{P}(1,-3)$ 46) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\ \ \mathrm{P}\left(3,-\frac{16}{5}\right)$ 47) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1\ \ \mathrm{P}\left(-2\sqrt{2},\,2\right)$

Scrivi le equazioni delle rette tangenti ad un'ellisse assegnata condotte da un dato punto esterno.

48) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{18}=1\ \ \mathrm{P}(3,-3)$ 49) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1\ \ \mathrm{P}(1,3)$ 50) $\frac{x^2}{4}+y^2=1\ \ \mathrm{P}(2,5)$

Scrivi l'equazione di un'ellisse canonica di cui si conoscono una retta tangente, e una seconda condizione.

51) *Tangenza con la retta* $t: y=\frac{25-4x}{5}$; *passaggio per* $\mathrm{P}\left(3,\frac{12}{5}\right)$

52) *Tangenza con la retta* $t: y=3x+4\sqrt{3}$; *asse minore* $=4$

53) *Tangenza con la retta* $t: x+2y=3$; *somma costante* $=2k=2\sqrt{5}$

54) *Tangenza con la retta* $t: x+3y-6=0$; *semidistanza focale* $=c=4$

55) Quando la Terra si trova in "afelio"
(il punto di massima distanza dal Sole)
tale distanza misura circa $km\ 1{,}52\cdot10^8$.
La distanza minima ("perielio") è invece di $km\ 1{,}47\cdot10^8$ circa.
L'orbita della Terra intorno al Sole è di forma ellittica, e il Sole ne occupa uno dei fuochi.
Sapresti, a partire da questi dati, determinare approssimativamente l'asse maggiore dell'ellisse?
E l'eccentricità? (Troverai che è davvero piccola piccola … determina il suo valore con 3 cifre significative)

56) Anche l'orbita della Luna intorno alla Terra è ellittica;
la Terra ne occupa uno dei fuochi.
Il perigeo è il punto di minima distanza della Luna dalla Terra:
la distanza è di circa 363 mila chilometri.
L'apogeo è il punto di massima distanza della Luna dalla Terra:
distanza pari a 405 mila chilometri circa.
E' maggiore l'eccentricità dell'orbita lunare intorno alla Terra o quella dell'orbita terrestre intorno al Sole?

57) Quanto distano dall'origine i punti di intersezione delle due ellissi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

e

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\ ?$$

58) Dimostra che in un'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$
i valori assoluti delle ordinate di due punti con la stessa ascissa,
situati rispettivamente
- sull'ellisse
- e sulla circonferenza circoscritta all'ellisse,

stanno fra loro come $b:a$.

59) Determina la misura del lato del quadrato inscritto nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

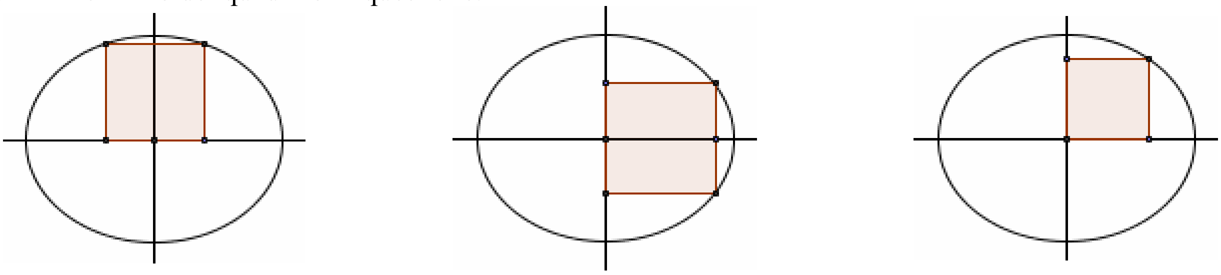
60) Determina la misura del lato del quadrato circoscritto all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

61) Data l'ellisse $x^2+2y^2=2$, determina l'area del rettangolo inscritto, avente due lati passanti per i fuochi.

62a)

Le figure I), II), III) mostrano l'ellisse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

e un quadrato con due vertici su di essa (un solo vertice nell'ultimo caso) e gli altri vertici sugli assi cartesiani.
Determinare il lato del quadrato in questione.



I) II) III)

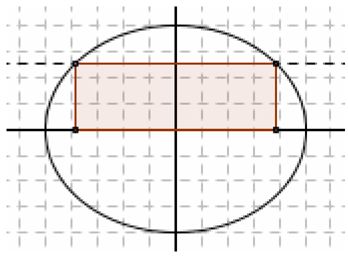
62b)
Generalizziamo: rispondi agli stessi quesiti I), II), III) dell'esercizio precedente

con riferimento all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

63)

Interseca l'ellisse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ con una retta $y=k$ $(k>0)$

in modo che il rettangolo in figura abbia area $10\sqrt{3}$



64) Nell'ellisse $x^2+\frac{y^2}{b^2}=1$

determina b^2 in modo che sia unitario il lato del quadrato inscritto nell'ellisse.

65) Nell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

determina i punti di contatto delle quattro tangenti
parallele alle diagonali del rettangolo circoscritto all'ellisse.

66) Sull'ellisse di equazione $4x^2+y^2=4$,
determinare i punti equidistanti
dal fuoco superiore e dal vertice che si trova sul semiasse delle ascisse positive.

67) Determina le coordinate del punto in cui la normale (= perpendicolare alla tangente)
all'ellisse $2x^2+y^2=2$ nel suo punto P, avente ordinata 1 e appartenente al 2° quadrante,
interseca ulteriormente l'ellisse.

68) Qual è la lunghezza del segmento che un'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

stacca sulla diagonale del rettangolo circoscritto?

69) Cos'hanno di particolare le curve seguenti?

a) $x^2+4y^2=0$

b) $x^2+4y^2+1=0$

70) Data un'ellisse di costante (= somma costante) $2a$,
giustifica rigorosamente la seguente affermazione:
i punti P_0 interni all'ellisse sono tali che $P_0F_1 + P_0F_2 < 2a$;
per quelli esterni si ha invece $P_0F_1 + P_0F_2 > 2a$.

71) Dimostra che, data una circonferenza γ di centro O e un punto A interno ad essa,
il luogo dei punti del piano aventi la proprietà di essere equidistanti da γ e da A è un'ellisse.
Dove si trovano i fuochi di questa ellisse?

72) L'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a > b$,
ha, com'è noto,
fuochi di coordinate

$$F_1 = (-c, 0) = \left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right); \quad F_2 = (c, 0) = \left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$$

ed eccentricità

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Dimostra ora che,
dati tre numeri positivi

$$a, \quad b < a, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

e considerati
il punto $F_2(c, 0)$
e la retta $d_2 : x = \frac{a^2}{c}$,
anche il luogo dei punti P tali che si abbia

$$\frac{PF_2}{PH} = \frac{c}{a},$$

dove PH indica la distanza di P dalla retta d_2,
ha per equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Allo stesso modo, si potrebbe provare che si perviene all'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

pure ricercando il luogo dei punti per i quali è uguale a $\frac{c}{a}$

il rapporto delle distanze dal punto $F_1(-c, 0)$ *e dalla retta* $d_1 : x = -\frac{a^2}{c}$.

In definitiva, l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b)$
può essere pensata come luogo dei punti
per i quali è costante il rapporto delle distanze da un "fuoco" e da una "direttrice",
ed in tal caso
ha come "direttrici" le due rette $x = \pm\frac{a^2}{c}$
mentre il rapporto costante è uguale a $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ *).*

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SULL'ELLISSE

1) $\begin{matrix} a=5 & (\pm 5,0) \\ b=4 & (0,\pm 4) \end{matrix}$ $F_{1,2}(\pm 3,\,0)$; $2k=10$; $e=\frac{3}{5}$

2) $\begin{matrix} a=9 & (\pm 9,0) \\ b=15 & (0,\pm 15) \end{matrix}$ $F_{1,2}(0,\,\pm 12)$; $2k=30$; $e=\frac{4}{5}$

3) $\begin{matrix} a=13 & (\pm 13,0) \\ b=5 & (0,\pm 5) \end{matrix}$ $F_{1,2}(\pm 12,\,0)$; $2k=26$; $e=\frac{12}{13}$

4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; $\begin{matrix} a=5 & (\pm 5,0) \\ b=3 & (0,\pm 3) \end{matrix}$ $F_{1,2}(\pm 4,\,0)$; $2k=10$; $e=\frac{4}{5}$

5) $\frac{x^2}{\frac{25}{36}}+\frac{y^2}{\frac{4}{9}}=1$ $\begin{matrix} a=\frac{5}{6} & \left(\pm\frac{5}{6},0\right) \\ b=\frac{2}{3} & \left(0,\pm\frac{2}{3}\right) \end{matrix}$ $F_{1,2}\left(\pm\frac{1}{2},\,0\right)$; $2k=\frac{5}{3}$; $e=\frac{3}{5}$

6) $x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$ $\begin{matrix} a=1 & (\pm 1,0) \\ b=\frac{1}{2} & \left(0,\pm\frac{1}{2}\right) \end{matrix}$ $F_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\,0\right)$; $2k=2$; $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\frac{x^2}{\frac{1}{25}}+\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$ $\begin{matrix} a=\frac{1}{5} & \left(\pm\frac{1}{5},\,0\right) \\ b=\frac{1}{3} & \left(0,\,\pm\frac{1}{3}\right) \end{matrix}$ $F_{1,2}\left(0,\,\pm\frac{4}{15}\right)$; $2k=\frac{2}{3}$; $e=\frac{4}{5}$

8) $\frac{x^2}{10}+y^2=1$ $\begin{matrix} a=\sqrt{10} & (\pm\sqrt{10},0) \\ b=1 & (0,\pm 1) \end{matrix}$ $F_{1,2}(\pm 3,\,0)$; $2k=2\sqrt{10}$; $e=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

9) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 10) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ 11) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ 12) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$

13) $x^2+\frac{y^2}{\frac{16}{25}}=1$ *opp.* $x^2+\frac{25}{16}y^2=1$ *opp.* $16x^2+25y^2=16$ 14) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

15) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$ $F_{1,2}(0,\,\pm 6)$; $2k=20$

16) $\frac{x^2}{2}+25y^2=1$ *opp.* $x^2+50y^2=2$; $F_{1,2}\left(\pm\frac{7}{5},\,0\right)$; $2k=2\sqrt{2}$

17) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; $F_{1,2}(\pm 3,\,0)$; $2k=10$

18) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{289}=1$; $F_{1,2}(0,\,\pm 15)$; $2k=34$

19) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$; $F_{1,2}(0,\,\pm 4)$; $2k=20$

20) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 21) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 22) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{9}=1$

23) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 24) $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ 25) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}=1$

26) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$ 27) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{1681}=1$ 28) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ *opp.* $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{20}=1$ 29) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ *opp.* $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{8}=1$

30) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 31) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{625}{9}}=1$ 32) $\frac{x^2}{\frac{4}{3}}+y^2=1$ *opp.* $\frac{x^2}{\frac{3}{4}}+y^2=1$

33) $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{576}=1$ 34) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{400}=1$ 35) $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ 36) $\frac{x^2}{324/25}+\frac{y^2}{99/25}=1$ *opp.* $\frac{x^2}{99/25}+\frac{y^2}{324/25}=1$

37-38-39-40: *poiché il risultato di una radice quadrata è sempre* ≥ 0, *in tutti i casi l'equazione ottenuta andrà abbinata alla condizione* $y \geq 0$. *Le curve in questione saranno delle "semiellissi".*

37) $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1,\ con\ y \geq 0$ 38) $x^2 + \dfrac{y^2}{25} = 1,\ con\ y \geq 0$ 39) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1,\ con\ y \geq 0$ 40) $\dfrac{x^2}{\frac{49}{16}} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ con\ y \geq 0$

41) $Ellisse\ con\ k > 4$
$In\ tal\ caso,\ l'ellisse\ ha\ SEMPRE\ i\ fuochi\ sull'asse\ x$
$Circonferenza\ per\ nessun\ valore\ di\ k$

42) $Ellisse\ con\ k > \dfrac{2}{3}$
$Ellisse\ coi\ fuochi\ sull'asse\ x\ con\ k > 3$
$Ellisse\ coi\ fuochi\ sull'asse\ y\ con\ \dfrac{2}{3} < k < 3$
$Circonferenza\ con\ k = 3$

43) $Ellisse\ con\ k > 2$
$Ellisse\ coi\ fuochi\ sull'asse\ x\ con\ k > 3$
$Ellisse\ coi\ fuochi\ sull'asse\ y\ con\ 2 < k < 3$
$Circonferenza\ con\ k = 3$

44) $Ellisse\ con\ 1 < k < 7$
$Ellisse\ coi\ fuochi\ sull'asse\ x\ con\ 4 < k < 7$
$Ellisse\ coi\ fuochi\ sull'asse\ y\ con\ 1 < k < 4$
$Circonferenza\ con\ k = 4$

45) $y = 3x - 6$ 46) $3x - 5y - 25 = 0$ 47) $y = 4x\sqrt{2} + 18$

48) $y = -3x + 6,\ y = \dfrac{3}{7}x - \dfrac{30}{7}$ 49) $y = -x + 4,\ y = \dfrac{5}{11}x + \dfrac{28}{11}$ 50) $y = \dfrac{6}{5}x + \dfrac{13}{5},\ x = 2$

51) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ *oppure* $\dfrac{x^2}{\frac{225}{16}} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ 52) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{12} = 1$ *opp.* $\dfrac{x^2}{\frac{44}{9}} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 53) $\dfrac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 54) $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

TROVI LE RISOLUZIONI COMPLETE DEGLI ESERCIZI 55 … 72 ALLE PAGINE 100 … 105

55) $asse\ maggiore \approx km\ 2{,}99 \cdot 10^8;\ \ e \approx 0{,}0167$

56) Coi dati forniti, si trova $e \approx 0{,}055$

57) $d = \dfrac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

58) Vedi pag. 100

59) $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 60) $\sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)}$ 61) $area = 2\sqrt{2}$

62a)

$lato\ quadrato\ I) = \dfrac{20}{\sqrt{29}} = \dfrac{20}{29}\sqrt{29}$ $lato\ quadrato\ II) = \dfrac{40}{\sqrt{89}} = \dfrac{40}{89}\sqrt{89}$ $lato\ quadrato\ III) = \dfrac{20}{\sqrt{41}} = \dfrac{20}{41}\sqrt{41}$

62b)

$lato\ quadrato\ I) = \dfrac{2ab}{\sqrt{4a^2 + b^2}}$ $lato\ quadrato\ II) = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 + 4b^2}}$ $lato\ quadrato\ III) = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

63) $k = 2 \vee k = 2\sqrt{3}$

64) $b^2 = 1/3$

65) $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right); \left(-\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right); \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, -\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right); \left(-\dfrac{a}{\sqrt{2}}, -\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$

66) $(-1, 0);\ \left(\dfrac{11}{13}, \dfrac{8}{13}\sqrt{3}\right)$

67) $\left(\dfrac{7}{10}\sqrt{2}, -\dfrac{1}{5}\right)$

68) $\sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)}$

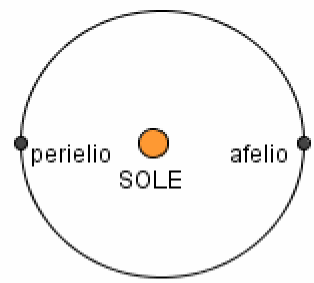
69) a) è un luogo puntiforme b) è il luogo vuoto

70, 71, 72) Vedi pag. 105

RISOLUZIONE DI ALCUNI FRA GLI ESERCIZI

55) Quando la Terra si trova in "afelio"
(il punto di massima distanza dal Sole)
tale distanza misura circa km $1,52 \cdot 10^8$.
La distanza minima ("perielio") è invece di km $1,47 \cdot 10^8$ circa.
L'orbita della Terra intorno al Sole è di forma ellittica, e il Sole ne occupa uno dei fuochi.
Sapresti, a partire da questi dati, determinare approssimativamente l'asse maggiore dell'ellisse?
E l'eccentricità? (Troverai che è davvero piccola piccola … determina il suo valore con 3 cifre significative)

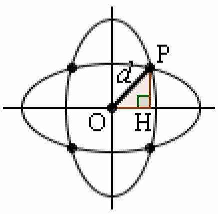
$$asse\ maggiore \approx km\ 1,52 \cdot 10^8 + km\ 1,47 \cdot 10^8 = km\ 2,99 \cdot 10^8$$
$$distanza\ \ focale \approx km\ 1,52 \cdot 10^8 - km\ 1,47 \cdot 10^8 = km\ 0,05 \cdot 10^8$$
$$e \approx \frac{0,05 \cdot 10^8}{2,99 \cdot 10^8} \approx 0,0167$$
L'orbita è "quasi circolare": eccentricità molto piccola



56) Anche l'orbita della Luna intorno alla Terra è ellittica; la Terra ne occupa uno dei fuochi.
Il perigeo è il punto di minima distanza della Luna dalla Terra: la distanza è di circa 363mila chilometri.
L'apogeo è il punto di massima distanza della Luna dalla Terra: distanza pari a 405mila chilometri circa.
E' maggiore l'eccentricità dell'orbita lunare intorno alla Terra o quella dell'orbita terrestre intorno al Sole?

$$asse\ maggiore \approx km\ 405000 + km\ 363000 = km\ 768000$$
$$distanza\ \ focale \approx km\ 405000 - km\ 363000 = km\ 42000$$
$$e = \approx \frac{42000}{768000} \approx 0,0547$$

57) Quanto distano dall'origine i punti di intersezione delle due ellissi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ e $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$?



$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \\ a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2 \end{cases} \quad x^2=\frac{\begin{vmatrix} a^2b^2 & a^2 \\ a^2b^2 & b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^2 & a^2 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}}=\frac{a^2b^4-a^4b^2}{b^4-a^4}=\frac{a^2b^2\cancel{\left(b^2-a^2\right)}}{\left(b^2+a^2\right)\cancel{\left(b^2-a^2\right)}}$$

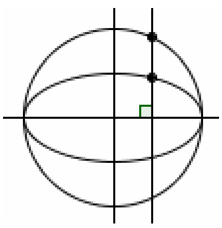
$(b \neq a;\ d'altronde,\ se\ \ fosse\ b=a\ si\ tratterebbe\ di\ cinconferenze!)$

$$x^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \rightarrow x=\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$x_P=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Per evidenti motivi di simmetria, si avrà pure $y_P=x_P=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *da cui* $\boxed{d=\frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

(il triangolo OHP ha gli angoli di 90°, 45°, 45°: in tali triangoli, si ha $ipotenusa=cateto\cdot\sqrt{2}$*)*

58) Dimostra che in un'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \left(a>b\right)$
i valori assoluti delle ordinate di due punti con la stessa ascissa, situati rispettivamente sull'ellisse e sulla circonferenza circoscritta all'ellisse, stanno fra loro come $b:a$.



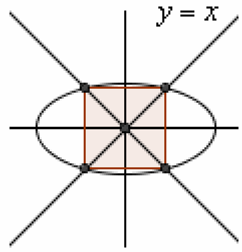
Ellisse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2};\quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2};\quad y^2=b^2\cdot\frac{a^2-x^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right);\quad y=\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)}$$
$$\boxed{y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}$$

Circonferenza di raggio a: $x^2+y^2=a^2;\quad y^2=a^2-x^2;\quad \boxed{y=\pm\sqrt{a^2-x^2}}$

Rapporto fra i valori assoluti delle ordinate di due punti con la stessa ascissa x: $\frac{\frac{b}{a}\cancel{\sqrt{a^2-x^2}}}{\cancel{\sqrt{a^2-x^2}}}=\boxed{\frac{b}{a}}$

59) Determina la misura del lato del quadrato inscritto nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=x\end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=1$$

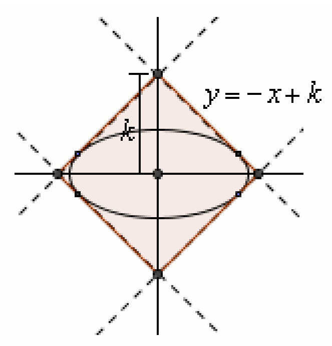
$$x^2=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{1}{\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$x=\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

da cui

$$\textit{lato quadrato inscritto}=\boxed{\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

60) Determina la misura del lato del quadrato circoscritto all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



Ricerca dell'equazione della retta,
inclinata di 45° "in discesa" e tangente all'ellisse nel 1° quadrante:

$$y=-x+k$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-x+k)^2}{b^2}=1$$

$$b^2x^2+a^2(-x+k)^2=a^2b^2$$

$$b^2x^2+a^2x^2-2a^2kx+a^2k^2=a^2b^2$$

$$\left(a^2+b^2\right)x^2-2a^2kx+a^2\left(k^2-b^2\right)=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=0$$

$$\left(a^2k\right)^2-a^2\left(a^2+b^2\right)\left(k^2-b^2\right)=0$$

$$a^{\cancel{4}^{2}}k^2-\cancel{a^2}\left(a^2k^2-a^2b^2+b^2k^2-b^4\right)=0$$

$$\cancel{a^2k^2}\;\cancel{-a^2k^2}+a^2b^2-b^2k^2+b^4=0$$

$$\cancel{b^2}k^2=a^2\cancel{b^2}+b^{\cancel{4}^{2}}$$

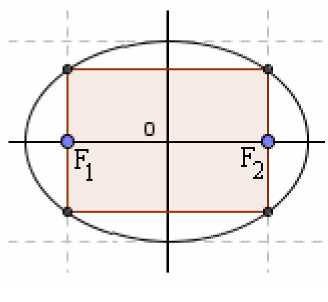
$$k^2=a^2+b^2$$

$$k=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\textit{lato quadrato circoscritto}=\boxed{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}}$$

(*in un triangolo con gli angoli di* 90°, 45°, 45°, *si ha* $\quad \textit{ipotenusa}=\textit{cateto}\cdot\sqrt{2}$)

61) Data l'ellisse $x^2+2y^2=2$,
determinare l'area del rettangolo inscritto, avente due lati passanti per i fuochi.



$$x^2+2y^2=2$$

$$\frac{x^2}{2}+y^2=1 \quad y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}$$

$$a^2=2,\ b^2=1,\ c^2=a^2-b^2=2-1=1 \rightarrow c=1$$

$$F(\pm 1,\ 0)$$

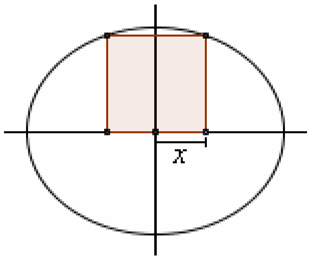
$$x=1\rightarrow y=\pm\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\textit{base}=2,\ \textit{altezza}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}=\sqrt{2},\quad \boxed{\textit{area}=2\sqrt{2}}$$

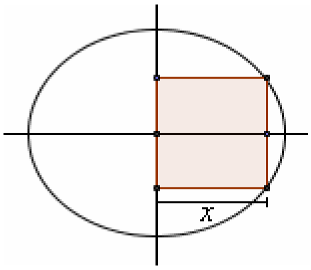
62a) Le figure I), II), III) mostrano l'ellisse

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

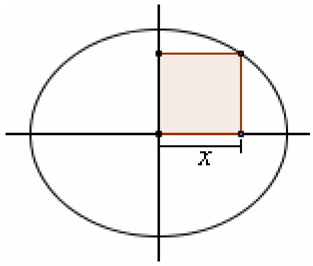
e un quadrato con due vertici su di essa (un solo vertice nell'ultimo caso)
e gli altri vertici sugli assi cartesiani.
Determinare il lato del quadrato in questione.



I)



II)



III)

$$y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$$
$$\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}=2x$$
$$4\sqrt{25-x^2}=10x$$
$$2\sqrt{25-x^2}=5x$$
$$100-4x^2=25x^2$$
$$29x^2=100$$
$$x^2=\frac{100}{29}$$
$$x=\frac{10}{\sqrt{29}}$$
$$\textit{lato quadrato I})=\frac{20}{\sqrt{29}}=\boxed{\frac{20}{29}\sqrt{29}}$$

$$y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$$
$$\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}=\frac{x}{2}$$
$$8\sqrt{25-x^2}=5x$$
$$64\left(25-x^2\right)=25x^2$$
$$1600-64x^2=25x^2$$
$$89x^2=1600$$
$$x^2=\frac{1600}{89}$$
$$x=\frac{40}{\sqrt{89}}$$
$$\textit{lato quadrato II})=\frac{40}{\sqrt{89}}=\boxed{\frac{40}{89}\sqrt{89}}$$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\\ y=x\end{cases}$$
$$\frac{x^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$$
$$16x^2+25x^2=400$$
$$41x^2=400$$
$$x^2=\frac{400}{41}$$
$$x=\frac{20}{\sqrt{41}}$$
$$\textit{lato quadrato III})=\frac{20}{\sqrt{41}}=\boxed{\frac{20}{41}\sqrt{41}}$$

62b) Generalizziamo: rispondi agli stessi quesiti I), II), III) dell'esercizio precedente
con riferimento all'ellisse di equazione

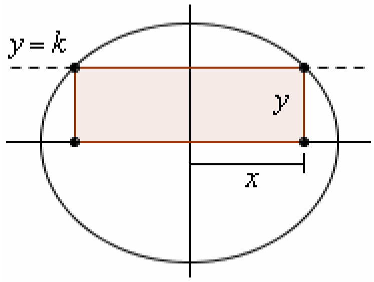
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$
$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=2x$$
$$b\sqrt{a^2-x^2}=2ax$$
$$a^2b^2-b^2x^2=4a^2x^2$$
$$\left(4a^2+b^2\right)x^2=a^2b^2$$
$$x^2=\frac{a^2b^2}{4a^2+b^2}$$
$$x=\frac{ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$$
$$\textit{lato quadrato I})=\boxed{\frac{2ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}}$$

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$
$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{x}{2}$$
$$2b\sqrt{a^2-x^2}=ax$$
$$4b^2\left(a^2-x^2\right)=a^2x^2$$
$$4a^2b^2-4b^2x^2=a^2x^2$$
$$\left(a^2+4b^2\right)x^2=4a^2b^2$$
$$x^2=\frac{4a^2b^2}{a^2+4b^2}$$
$$x=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+4b^2}}$$
$$\textit{lato quadrato II})=\boxed{\frac{2ab}{\sqrt{a^2+4b^2}}}$$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=x\end{cases}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$
$$b^2x^2+a^2x^2=a^2b^2$$
$$\left(a^2+b^2\right)x^2=a^2b^2$$
$$x^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$
$$x=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\textit{lato quadrato III})=\boxed{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

63) Interseca l'ellisse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ con una retta $y=k\ (k>0)$ in modo che il rettangolo in figura abbia area $10\sqrt{3}$

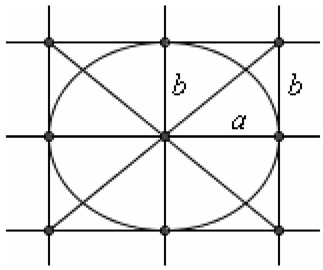


$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$
$$x=\frac{5}{4}\sqrt{16-y^2}$$
$$altezza\ \ rettangolo=k$$
$$base\ rettangolo=2\cdot\frac{5}{4}\sqrt{16-y^2}=\frac{5}{2}\sqrt{16-k^2}$$
$$Area\ \ rettangolo=\frac{5}{2}\sqrt{16-k^2}\cdot k$$
$$\frac{5}{2}\sqrt{16-k^2}\cdot k=10\sqrt{3};\quad \sqrt{16-k^2}\cdot k=4\sqrt{3};\quad 16k^2-k^4=48;\quad k^4-16k^2+48=0$$
$$\left(k^2-4\right)\left(k^2-12\right)=0;\quad k^2=4\ \vee\ k^2=12\ \rightarrow\ \boxed{k=2\ \vee\ k=\sqrt{12}=2\sqrt{3}}$$

64) Nell'ellisse $x^2+\frac{y^2}{b^2}=1$ determina b^2 in modo che sia unitario il lato del quadrato inscritto nell'ellisse.

$$\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=1\ \ (\textit{il lato del quadrato inscritto vale }\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \textit{vedi esercizio } 59)$$
$$a=1\ \rightarrow\ \frac{2b}{\sqrt{1+b^2}}=1;\quad 2b=\sqrt{1+b^2};\quad 4b^2=1+b^2;\quad 3b^2=1;\quad \boxed{b^2=\frac{1}{3}}$$

65) Nell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ determina i punti di contatto delle quattro tangenti parallele alle diagonali del rettangolo circoscritto all'ellisse.



Il coefficiente angolare della diagonale ascendente è $m=\frac{b}{a}$.

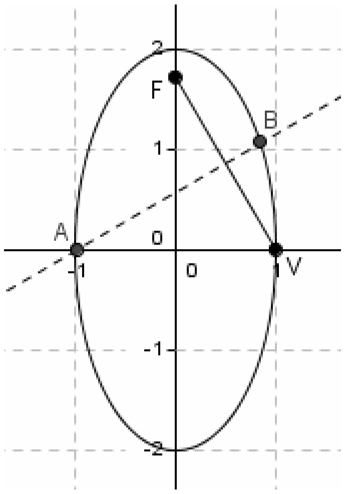
$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=\frac{b}{a}x+k\end{cases}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{b}{a}x+k\right)^2}{b^2}=1;\quad \frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{b^2}{a^2}x^2+2\frac{b}{a}kx+k^2\right)\cdot\frac{1}{b^2}=1;\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{2kx}{ab}+\frac{k^2}{b^2}=1;$$
$$b^2x^2+b^2x^2+2abkx+a^2k^2=a^2b^2;\quad \underline{2b^2x^2+2abkx+a^2k^2-a^2b^2=0}$$
$$\frac{\Delta}{4}=0$$
$$a^2b^2k^2-2b^2\left(a^2k^2-a^2b^2\right)=0;\quad \cancel{a^2b^2}k^2-2\cancel{a^2b^2}\left(k^2-b^2\right)=0;$$
$$k^2-2k^2+2b^2=0;\quad -k^2=-2b^2;\quad k^2=2b^2;\quad k=\pm b\sqrt{2}$$
$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=\frac{b}{a}x+b\sqrt{2}\end{cases}$$
$$\underline{2b^2x^2+2ab\cdot b\sqrt{2}x+a^2\cdot 2b^2-a^2b^2=0};\quad 2\cancel{b^2}x^2+2a\cancel{b^2}\sqrt{2}x+a^2\cancel{b^2}=0;\quad \left(x\sqrt{2}+a\right)^2=0$$
$$x=-\frac{a}{\sqrt{2}}\rightarrow y=\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)+b\sqrt{2}=-\frac{b}{\sqrt{2}}+b\sqrt{2}=...=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

Oltre al punto così trovato $\boxed{\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}$

gli altri 3 punti di tangenza sono evidentemente, per motivi di simmetria, $\boxed{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}$

66) Sull'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 = 4$, determinare i punti equidistanti dal fuoco superiore e dal vertice che si trova sul semiasse delle ascisse positive.

Il luogo dei punti del piano, equidistanti dagli estremi di un segmento, è l'asse di quel segmento!



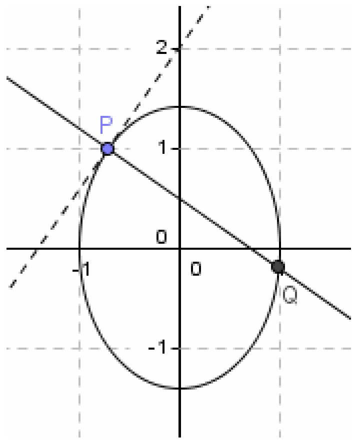
$$4x^2 + y^2 = 4 \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \mathrm{F}\left(0, \sqrt{3}\right) \quad \mathrm{V}(1,0)$$

$$\textit{asse di } \mathrm{FV}: \ (x-0)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = (x-1)^2 + (y-0)^2$$
$$\cancel{x^2} \cancel{+y^2} - 2y\sqrt{3} + 3 = \cancel{x^2} - 2x + 1 \cancel{+y^2}$$
$$-2y\sqrt{3} = -2x - 2$$
$$y\sqrt{3} = x + 1$$
$$y = \frac{x+1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+1}{\sqrt{3}} \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad 4x^2 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4 \quad 4x^2 + \frac{x^2+2x+1}{3} = 4 \quad 12x^2 + x^2 + 2x + 1 = 12 \quad 13x^2 + 2x - 11 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+143}}{13} = \ldots = \left\langle \begin{array}{l} -1 \rightarrow y = \dfrac{x+1}{\sqrt{3}} = \dfrac{-1+1}{\sqrt{3}} = 0 \\ \dfrac{11}{13} \rightarrow y = \dfrac{x+1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\frac{11}{13}+1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\frac{24}{13}}{\sqrt{3}} = \dfrac{24}{13\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{24\sqrt{3}}{39} = \dfrac{8}{13}\sqrt{3} \end{array} \right. \qquad \boxed{(-1,0);\ \left(\frac{11}{13}, \frac{8}{13}\sqrt{3}\right)}$$

67) Determina le coordinate del punto in cui la normale (perpendicolare alla tangente) all'ellisse $2x^2 + y^2 = 2$ nel suo punto P, avente ordinata 1 e appartenente al 2° quadrante, interseca ulteriormente l'ellisse.



$$2x^2 + y^2 = 2$$
$$y = 1 \rightarrow x^2 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

Tangente (*regola sdoppiamenti*):
$$2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + 1 \cdot y = 2; \quad -x\sqrt{2} + y = 2; \quad y = x\sqrt{2} + 2 \ \left(m = \sqrt{2}\right)$$
$$m_{normale} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

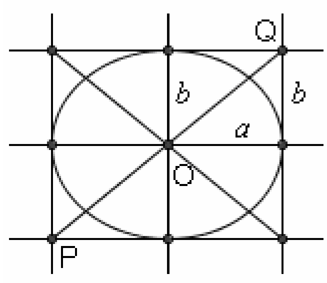
$$\textit{Normale}: \ y - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad y - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2} \qquad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}$$

Intersezione della normale trovata con l'ellisse:
$$2x^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}\right)^2 = 2 \qquad 2x^2 + \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{4}_{\,2}}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{4} = 2 \qquad \frac{8x^2 + 2x^2 - 2x\sqrt{2} + 1 - 8}{4} = 0$$

$$10x^2 - 2x\sqrt{2} - 7 = 0 \qquad x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+70}}{10} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{72}}{10} = \frac{\sqrt{2} \pm 6\sqrt{2}}{10} = \left\langle \begin{array}{l} -\dfrac{5\sqrt{2}}{10} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{7\sqrt{2}}{10} = \dfrac{7}{10}\sqrt{2} \end{array} \right.$$

$$x = \frac{7}{10}\sqrt{2} \rightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{10}\sqrt{2} + \frac{1}{2} = -\frac{7}{10} + \frac{1}{2} = \frac{-7+5}{10} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5} \qquad \boxed{\mathrm{Q}\left(\frac{7}{10}\sqrt{2}, -\frac{1}{5}\right)}$$

68) Qual è la lunghezza del segmento che un'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ stacca sulla diagonale del rettangolo circoscritto?



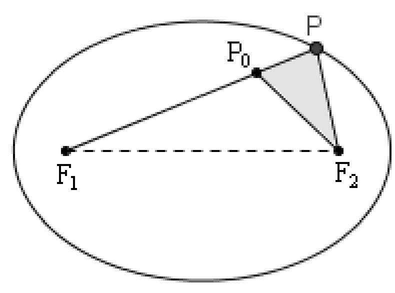
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=\frac{b}{a}x \end{cases} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{\frac{\cancel{b^2}}{a^2}x^2}{\cancel{b^2}}=1 \quad 2\frac{x^2}{a^2}=1 \quad x^2=\frac{a^2}{2} \quad \begin{cases} x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}} \\ y=\pm\frac{b}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{a}}{\sqrt{2}}=\pm\frac{b}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\mathrm{PQ}=2\cdot\mathrm{OQ}=2\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2}=2\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}}=2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{4\cdot\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$$

69) a) è un luogo puntiforme: l'unico punto $(x,\ y)$ che soddisfa all'equazione è infatti l'origine $(0,0)$.
b) è il luogo vuoto: la sua equazione non è infatti verificata da alcuna coppia $(x,\ y)$.

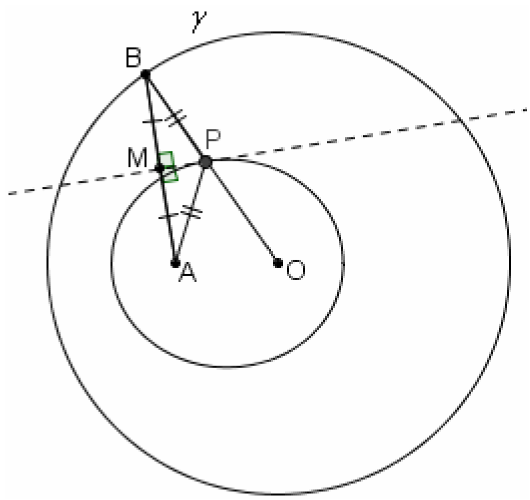
70) Data un'ellisse di costante (= somma costante) $2a$, giustifica rigorosamente la seguente affermazione: i punti $\mathrm{P_0}$ interni all'ellisse sono tali che $\mathrm{P_0F_1}+\mathrm{P_0F_2}<2a$; per quelli esterni si ha invece $\mathrm{P_0F_1}+\mathrm{P_0F_2}>2a$.

Sia $\mathrm{P_0}$ un punto interno all'ellisse. Congiungiamo $\mathrm{P_0}$ con $\mathrm{F_1}$ ed $\mathrm{F_2}$; prolunghiamo la congiungente $\mathrm{F_1P_0}$ fino ad incontrare l'ellisse in P.
Essendo, per la disuguaglianza triangolare su $\mathrm{PP_0F_2}$,
$$\mathrm{P_0F_2}<\mathrm{P_0P}+\mathrm{PF_2},$$
sarà
$$\mathrm{P_0F_1}+\mathrm{P_0F_2}<\mathrm{P_0F_1}+\mathrm{P_0P}+\mathrm{PF_2}=\mathrm{PF_1}+\mathrm{PF_2}=2a.$$
E in modo del tutto simile si prova la seconda parte dell'asserto.



71) Dimostra che, data una circonferenza γ di centro O e un punto A interno ad essa, il luogo dei punti del piano aventi la proprietà di essere equidistanti da γ e da A è un'ellisse. Dove si trovano i fuochi di questa ellisse?

Dalla figura:
$$\mathrm{PA}+\mathrm{PO}=\mathrm{PB}+\mathrm{PO}=r=costante$$
Ellisse di fuochi A, O



72) …

$a,\ b<a,\ c=\sqrt{a^2-b^2} \qquad \mathrm{P}(x,y) \quad \mathrm{F_2}=(c,\ 0) \quad x=\frac{a^2}{c} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{PF_2}}{\mathrm{PH}}=\frac{c}{a}}$

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}}{\left|x-\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{c}{a}; \qquad \frac{\sqrt{\left(x-\sqrt{a^2-b^2}\right)^2+(y-0)^2}}{\left|x-\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right|}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a};$$

$$\sqrt{x^2-2x\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2+y^2}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdot\left|x-\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right|;$$

$$\sqrt{x^2-2x\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2+y^2}=\left|\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x-a\right|; \qquad x^2-2x\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2+y^2=\left|\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x-a\right|^2$$

$$x^2\cancel{-2x\sqrt{a^2-b^2}}\cancel{+a^2}-b^2+y^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2\cancel{-2x\sqrt{a^2-b^2}}\cancel{+a^2}; \qquad \cancel{a^2x^2}-a^2b^2+a^2y^2=\cancel{a^2x^2}-b^2x^2;$$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2; \qquad \frac{\cancel{b^2}x^2}{a^2\cancel{b^2}}+\frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2}=\frac{\cancel{a^2b^2}^{\,1}}{\cancel{a^2b^2}}; \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ESERCIZI SULL'ELLISSE TRASLATA

1) (Esercizio svolto)
Scrivi l'equazione del LUOGO dei punti $\mathrm{P}(x,y)$ *del piano cartesiano per i quali la distanza dal punto* $\mathrm{A}(1,\,0)$ *è uguale a* $1/3$ *della distanza dalla retta* $r:\ x=5$.
Troverai un'ellisse in posizione NON canonica:
determinane il centro, i semiassi, i vertici, i fuochi, l'eccentricità.

$$\mathrm{P}(x,\,y) \quad \mathrm{A}(1,\,0) \quad r: x=5 \quad d(\mathrm{P},\mathrm{A})=\frac{1}{3}\cdot d(\mathrm{P},r)$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}=\frac{1}{3}|x-5|; \qquad 3\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x-5|;$$

$$9\left(x^2-2x+1+y^2\right)=x^2-10x+25; \qquad 9x^2-18x+9+9y^2=x^2-10x+25;$$

$$8x^2+9y^2-8x-16=0; \qquad 8x^2-8x+9y^2=16;$$

$$8\left(x^2-x\right)+9y^2=16; \qquad 8\left[\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\right]+9y^2=16;$$

$$8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2+9y^2=16; \qquad 8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+9y^2=18; \qquad \frac{{}^{4}\cancel{8}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\cancel{18}_{9}}+\frac{\cancel{9}y^2}{\cancel{18}_{2}}=1;$$

$$\boxed{\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{2}=1}$$

Si tratta di un'ellisse traslata di

- centro $\mathrm{C}(x_0,y_0)=\left(\frac{1}{2},\,0\right)$
- semiassi $a=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2},\ \ b=\sqrt{2}$
- vertici $(x_0\pm a,\ y_0)=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2},\ 0\right)=\left\langle\begin{matrix}(-1,\,0)\\(2,\,0)\end{matrix}\right.$ e $(x_0,\ y_0\pm b)=\left(\frac{1}{2},\ 0\pm\sqrt{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\ \pm\sqrt{2}\right)$
- semidistanza focale ottenibile (essendo $a>b$) dalla formula $c^2=a^2-b^2=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}\ \to\ c=\frac{1}{2}$
- fuochi $(x_0\pm c,\ 0)=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2},\ 0\right)=\left\langle\begin{matrix}(0,\,0)\\(1,\,0)\end{matrix}\right.$

Determina centro, semiassi, vertici, fuochi, costante ed eccentricità dell'ellisse di equazione:

2) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ 3) $\frac{(x+7)^2}{81}+\frac{y^2}{225}=1$ 4) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+10)^2}{16}=1$

5) $4\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y-3)^2=1$ 6) $4\left(x-\sqrt{2}\right)^2+9y^2=36$ 7) $(3x-6)^2+(5y+10)^2=36$

Porta le seguenti equazioni di ellissi traslate sotto la forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

così da determinarne il centro e i semiassi:

8) $x^2+2y^2-10x+12y+41=0$ 9) $4x^2+3y^2-24x-12y+36=0$ 10) $x^2+4y^2+10x+9=0$

11) $16x^2+25y^2+32x+150y=159$ 12) $16x^2+25y^2-32x-100y=284$ 13) $8x^2+9y^2+16x-18y-55=0$

14) $4x^2+36y^2-108y=63$ 15) $16x^2+9y^2=64x+36y+44$ 16) $x^2+3y^2+8x-30y=-88$

17) $16x^2+48y^2-8x=47$ 18) $16x^2+25y^2-100y=44$ 19) $x^2+2y^2+2x\sqrt{3}+1=0$

Scrivi l'equazione dell'ellisse "traslata" con le seguenti caratteristiche (C centro di simmetria, a semiasse orizzontale, b semiasse verticale, c semidistanza focale, 2k = somma costante, e = eccentricità)

20) $a=3$, $b=1$, centro di simmetria $C(2,-4)$ 21) Vertici $(-11,1)$; $(-3,1)$; $(-7,\,1-2\sqrt{3})$; $(-7,\,1+2\sqrt{3})$

22) $F_1(5,0),\ C(6,0),\ a=\sqrt{5}$ 23) $F_1(-4,2),\ F_2(2,2),\ 2k=10$ 24) $F_1(-1,5),\ F_2(7,5),\ e=0.8$

25) Centro in $C(-1,\,0)$, passaggio per $P\left(0,\,-\frac{24}{5}\right)$, $b=2\sqrt{6}$

26) Passaggio per i punti $\left(\frac{2}{3},\,\frac{2}{3}\right)$; $(-1,\,1)$; $\left(0,\,\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$; $\left(\sqrt{5}-1,0\right)$

27) Centro in $C(-4,2)$, un fuoco in $F(0,2)$, passaggio per $P(-1,3)$

28) Un fuoco in $F(1,0)$, due vertici opposti in $\left(\frac{1}{2},\,-1\right)$ e $\left(\frac{1}{2},\,1\right)$

29) Fuochi in $F_1(1,-3)$ ed $F_2(1,1)$, passante per $P\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$

30) *Da quali punti è formato il grafico delle curve seguenti?*
a) $x^2+y^2-2x+1=0$ b) $x^2+y^2-2x+3=0$ c) $x^2+y^2+4x-8y+20=0$

RISPOSTE

2) $C(2,1)\quad \begin{array}{ll} a=5 & (-3,1)\ (7,1) \\ b=3 & (2,-2)\ (2,4) \end{array}\quad F_1(-2,\,1),\,F_2(6,\,1);\ \ 2k=10;\ \ e=\frac{4}{5}$

3) $C(-7,0)\quad \begin{array}{ll} a=9 & (-16,0)\ (2,0) \\ b=15 & (-7,\pm 15) \end{array}\quad F_1(-7,\,-12),\,F_2(-7,\,12);\ \ 2k=30;\ \ e=\frac{4}{5}$

4) $C(1,-10)\quad \begin{array}{ll} a=5 & (-4,-10)\ (6,-10) \\ b=4 & (1,-14)\ (1,-6) \end{array}\quad F_1(-2,\,-10),\,F_2(4,\,-10);\ \ 2k=10;\ \ e=\frac{3}{5}$

5) $C\left(-\frac{5}{2},\,3\right)\quad \begin{array}{ll} a=\frac{1}{2} & (-3,3)\ (-2,3) \\ b=1 & \left(-\frac{5}{2},2\right)\ \left(-\frac{5}{2},4\right) \end{array}\quad F_1\left(-\frac{5}{2},\,3-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\,F_2\left(-\frac{5}{2},\,3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ \ 2k=2;\ \ e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

6) $C(\sqrt{2},\,0)\quad \begin{array}{ll} a=3 & (\sqrt{2}-3,0)\ (\sqrt{2}+3,0) \\ b=2 & (\sqrt{2},-2)\ (\sqrt{2},2) \end{array}\quad F_1(\sqrt{2}-\sqrt{5},\,0),\,F_2(\sqrt{2}+\sqrt{5},\,0);\ \ 2k=6;\ \ e=\frac{\sqrt{5}}{3}$

7) $C(2,-2)\quad \begin{array}{ll} a=2 & (0,-2)\ (4,-2) \\ b=\frac{6}{5} & \left(2,-\frac{16}{5}\right)\ \left(2,-\frac{4}{5}\right) \end{array}\quad F_1\left(\frac{2}{5},\,-2\right),\,F_2\left(\frac{18}{5},\,-2\right);\ \ 2k=4;\ \ e=\frac{4}{5}$

8) $\frac{(x-5)^2}{2}+(y+3)^2=1$ 9) $\frac{(x-3)^2}{3}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ 10) $\frac{(x+5)^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 11) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

12) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$ 13) $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{8}=1$ 14) $\frac{x^2}{36}+\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{4}=1$ 15) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

16) $\frac{(x+4)^2}{3}+(y-5)^2=1$ 17) $\frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}{3}+y^2=1$ 18) $\frac{x^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{\frac{144}{25}}=1$ 19) $\frac{(x+\sqrt{3})^2}{2}+y^2=1$

20) $\frac{(x-2)^2}{9}+(y+4)^2=1$ 21) $\frac{(x+7)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{12}=1$ 22) $\frac{(x-6)^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 23) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

24) $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{9}=1$ 25) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{y^2}{24}=1$ 26) $x^2+5y^2+2x=4$ 27) $\frac{(x+4)^2}{18}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$

28) $\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{5}{4}}+y^2=1$ 29) $(x-1)^2+\frac{(y+1)^2}{5}=1$

30) a) Dal solo punto $(1,\,0)$
b) E' il luogo vuoto
c) Dal solo punto $(-2,\,4)$

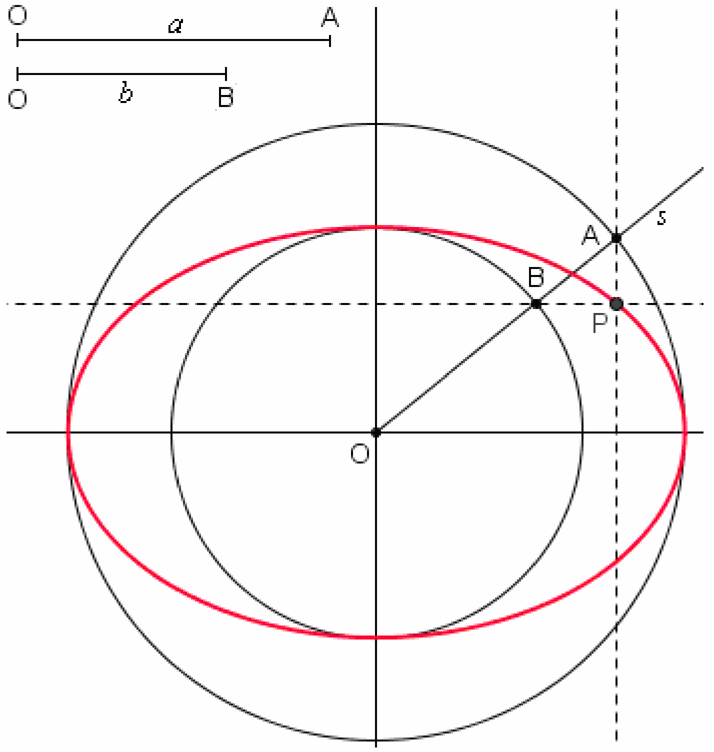
ESERCIZI MOLTO BELLI MA DIFFICILI (trovi le risoluzioni dei primi tre da pag. 110)

1) Disegnare un'ellisse utilizzando due circonferenze concentriche

Traccia la circonferenza di centro l'origine e raggio a, poi un'altra circonferenza di centro l'origine ma di raggio b diverso da a.
Se ora conduci dall'origine una semiretta s che intersechi la circonferenza di raggio a in A e quella di raggio b in B, e indichi con P l'intersezione fra la parallela all'asse y per A e la parallela all'asse x per B,
IL LUOGO DELLE POSIZIONI DI P SARÀ UN'ELLISSE!!!

Giustificare questa affermazione è molto semplice se si hanno nozioni di *goniometria*.

Ma senza coinvolgere la goniometria, ci si può ugualmente riuscire ricavando l'equazione del luogo **innanzitutto** in forma "**parametrica**", per poi passare **successivamente** alla forma "**cartesiana**".



Si calcoleranno le coordinate di A e di B attraverso l'intersezione fra la retta $y = mx$ e le due circonferenze, poi se ne dedurranno le coordinate di P (che conterranno il parametro m) e infine si eliminerà m fra le due equazioni $x = ...,\ y = ...$ ottenute.

Ci vuoi provare?

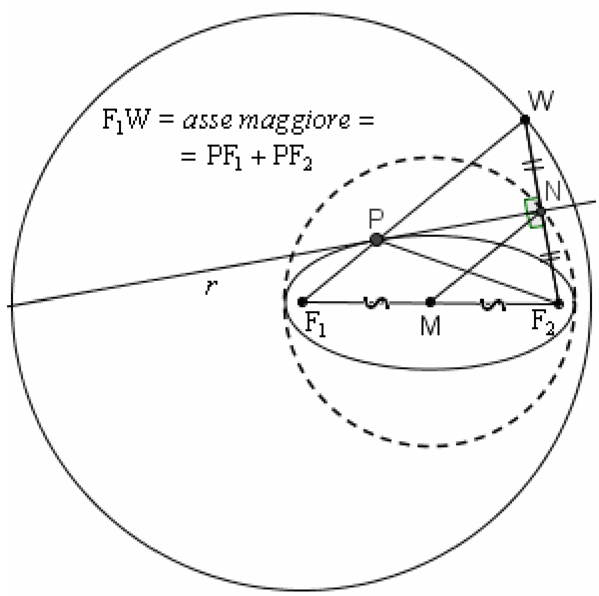
2a) Costruzione della tangente a un'ellisse in un suo punto
2b) Podaria di un'ellisse rispetto a un fuoco

Ecco **un metodo per tracciare la tangente ad un'ellisse in un suo punto P**.

I. Con centro in un fuoco F_1 si traccia la circonferenza avente *raggio uguale all'asse maggiore dell'ellisse* (quindi anche alla "somma costante" $PF_1 + PF_2$);
II. poi si congiunge F_1 con P e si prolunga tale congiungente fino ad incontrare la circonferenza in un punto W;
III. infine si traccia l'asse r di WF_2.

Tale asse passerà per P
(P è infatti equidistante dagli estremi di WF_2, perché $PW = F_1W - PF_1 = (PF_1 + PF_2) - PF_1 = PF_2$)
e sarà la tangente cercata, come si dimostra (**provaci**!) prendendo, sull'asse r, un altro punto P' distinto da P e facendo vedere che esso *non può* appartenere all'ellisse.

(*Per questa dimostrazione, basta la vecchia geometria "sintetica", ossia senza coordinate*)



Definizione - Si dice PODARIA (NOTA) **di una curva rispetto a un punto (detto *polo*) il luogo geometrico delle proiezioni di quel punto sulle rette tangenti alla curva**.

NOTA : "podària", con l'accento sulla prima "a": ossia "curva dei *piedi*, curva delle *proiezioni*"

A partire dalla figura, ti chiedo di giustificare, ancora con la geometria "sintetica", che:
"**In un'ellisse, la PODARIA DI UN FUOCO è la circonferenza avente per diametro l'asse maggiore**"

Indicazioni per la dimostrazione: detti M, N *i punti medi di* F_1F_2 *e di* WF_2, *considera la congiungente* MN ...

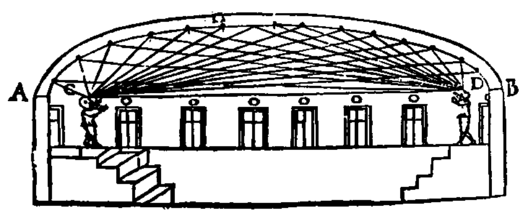
3) Proprietà focale dell'ellisse in relazione alla riflessione della luce

Una proprietà notevole dei fuochi di un'ellisse consiste nel fatto che la normale all'ellisse in un suo punto
(si dice "normale" la perpendicolare alla tangente)
divide per metà l'angolo formato dai segmenti che uniscono questo punto con i due fuochi.

Di conseguenza un raggio di luce che parta da uno dei fuochi e colpisca l'ellisse, verrà riflesso nell'altro fuoco.

Lo stesso vale per le onde sonore:
se si bisbiglia in un fuoco di una camera a volta ellittica (NOTA),
le onde sonore si rifletteranno sulla volta e andranno a concentrarsi tutte nell'altro fuoco,
dove potranno essere udite distintamente da una persona che occupi quella postazione.
Le altre persone nella stanza non sentiranno nulla! Ideale per spettegolare!!!

NOTA
… tale cioè che il soffitto
sia un pezzo di "ellissoide di rotazione",
ossia abbia la forma che si otterrebbe
ruotando un'ellisse intorno ad un suo asse,
in questo caso l'asse non contenente i fuochi.
Vedi figura qui a fianco,
tratta dal sito
della mostra virtuale
"Oltre il compasso".

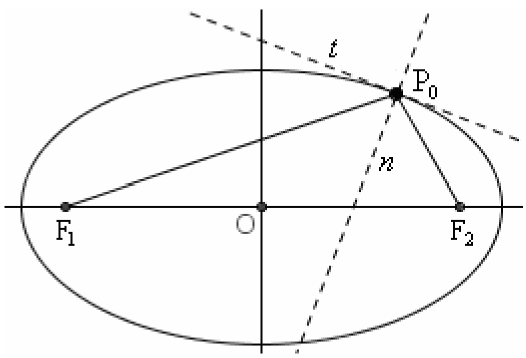


Vuoi provare a dimostrare questa proprietà?

Ai fini dimostrativi,
l'ellisse è collocata in un riferimento cartesiano,
in posizione "canonica".

Vedi figura qui a fianco:
t è la tangente all'ellisse in un suo punto P_0 ,
n è la normale in P_0.

Si tracciano le congiungenti P_0F_1 *e* P_0F_2
e, a prezzo di impegnativi calcoli,
si fa vedere che,
scrivendo l'equazione della bisettrice dell'angolo $F_1\hat{P}_0F_2$,
si ottiene l'equazione della normale in P_0.



4) Siano A, B due punti fissati, e $r > AB$ un segmento.
Dimostra che *il luogo dei centri C delle circonferenze che passano per B e sono tangenti alla circonferenza di centro A e raggio r, è un'ellisse avente per fuochi A e B.*

5) Dimostra che, data una circonferenza γ di centro O e un punto A interno ad essa,
il luogo dei punti del piano aventi la proprietà di essere equidistanti da γ *e da A è un'ellisse.*
Dove si trovano i fuochi di questa ellisse?

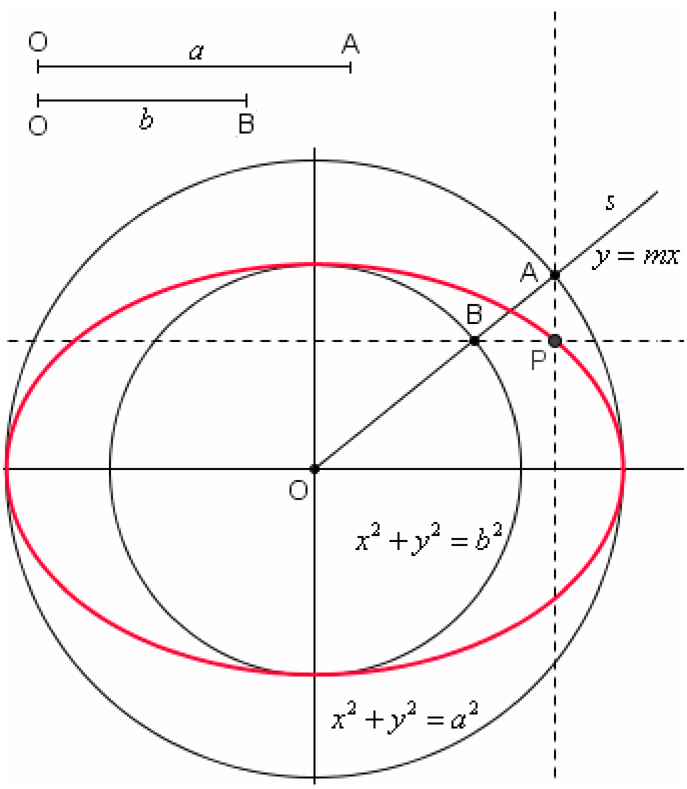
6) Data un'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, giustifica rigorosamente la seguente affermazione:
preso un punto $P_0(x_0, y_0)$

- ♪ *se esso è interno all'ellisse, allora* $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$ *;*
- ♫ *se invece è esterno, si ha* $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$.

7) Data un'ellisse di costante (= somma costante) $2a$, giustifica rigorosamente la seguente affermazione:
i punti P_0 *tali che* $P_0F_1+P_0F_2<2a$ *sono interni all'ellisse; quelli per cui* $P_0F_1+P_0F_2>2a$ *le sono esterni.*

RISOLUZIONI

1) Disegnare un'ellisse utilizzando due circonferenze concentriche



$$\mathrm{A}:\ \begin{cases} y = mx \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

$$x^2+m^2x^2=a^2;\quad (1+m^2)x^2=a^2$$

$$x^2=\frac{a^2}{1+m^2}$$

$$\begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{a^2}{1+m^2}}=\pm\dfrac{a}{\sqrt{1+m^2}} \\ y=mx=\pm\dfrac{ma}{\sqrt{1+m^2}} \end{cases}$$

e allo stesso modo

$$\mathrm{B}:\ \begin{cases} y = mx \\ x^2+y^2=b^2 \end{cases} \dots \begin{cases} x=\pm\dfrac{b}{\sqrt{1+m^2}} \\ y=\pm\dfrac{mb}{\sqrt{1+m^2}} \end{cases}$$

Dunque il punto P della figura (che è poi il generico punto della curva che ci interessa) ha coordinate date da:

$$x_P=x_A=\pm\frac{a}{\sqrt{1+m^2}};\quad y_P=y_B=\pm\frac{mb}{\sqrt{1+m^2}}$$

dove valgono o i due segni + contemporaneamente, oppure i due segni – contemporaneamente.

Le equazioni $\begin{cases} x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{1+m^2}} \\ y=\pm\dfrac{mb}{\sqrt{1+m^2}} \end{cases}$ sono le equazioni *parametriche* del luogo.

Passiamo ora all'equazione *cartesiana*, risolvendo rispetto al parametro m e sostituendo.
Innanzitutto, allo scopo di isolare il parametro,
conviene dividere membro a membro le due equazioni, ottenendo

$$\frac{y}{x}=\frac{mb}{a}\rightarrow m=\frac{ay}{bx}$$

Dopodiché potremo scrivere

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{1+\left(\dfrac{ay}{bx}\right)^2}}\qquad x^2=\frac{a^2}{1+\dfrac{a^2y^2}{b^2x^2}}\qquad x^2=\frac{a^2}{\dfrac{b^2x^2+a^2y^2}{b^2x^2}}\qquad x^2=\frac{a^2b^2x^2}{b^2x^2+a^2y^2}$$

Possiamo a questo punto semplificare per x^2
(osserviamo per l'occasione che i passaggi precedenti erano effettuabili solo supponendo $x \neq 0$;
vedremo in che modo l'ascissa nulla, per ora provvisoriamente esclusa
allo scopo di poter effettuare determinati passaggi algebrici, sia "recuperabile" alla fine),
ottenendo:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

che, divisa per a^2b^2, fornisce

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ **ellisse "canonica" di semiassi *a, b*.**

Avevamo escluso dalla nostra considerazione l'ascissa 0; possiamo ora osservare che
i punti P di ascissa 0 ottenibili con la costruzione descritta
(semiretta condotta dall'origine … intersezioni di questa con le due circonferenze … $x_P=x_A,\ y_P=y_B$)
sono i due punti $(0, \pm b)$, che risultano anch'essi soddisfare all'equazione ottenuta.

Dunque effettivamente la $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ è l'equazione del luogo in questione.

2a) Costruzione della tangente a un'ellisse in un suo punto

Ecco **un metodo per tracciare la tangente ad un'ellisse in un suo punto P**.

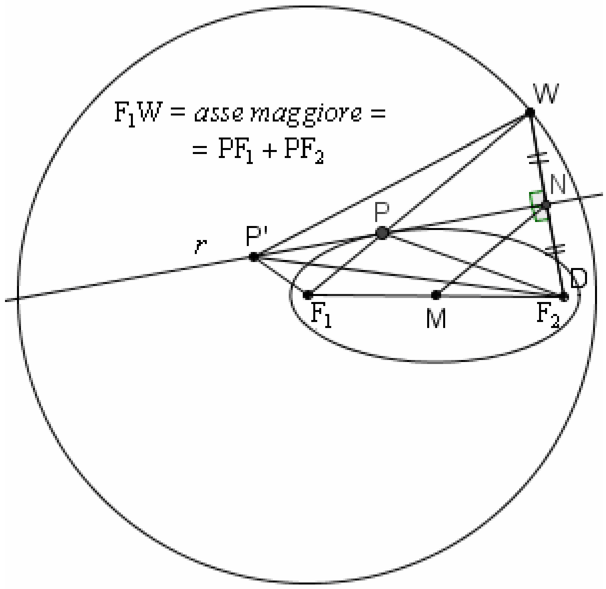
I. Con centro in un fuoco F_1 si traccia la circonferenza avente raggio uguale all'asse maggiore dell'ellisse (quindi anche alla "somma costante" PF_1+PF_2);
II. poi si congiunge F_1 con P e si prolunga tale congiungente fino ad incontrare la circonferenza in un punto W;
III. infine si traccia l'asse r di WF_2.

Tale asse passerà per P
(P è infatti equidistante dagli estremi di WF_2, perché $PW=F_1W-PF_1=(PF_1+PF_2)-PF_1=PF_2$)
e sarà la tangente cercata, come si dimostra (**provaci**!) prendendo, sull'asse,
un altro punto P' distinto da P e facendo vedere che esso *non può* appartenere all'ellisse.

Preso sull'asse r di WF_2 un punto P' distinto da P, avremo:
$P'F_1+P'F_2=P'F_1+P'W$
(infatti $P'F_2=P'W$ perché P' appartiene all'asse di WF_2, e i punti dell'asse di un segmento sono equidistanti dagli estremi del segmento stesso).

Ma $P'F_1+P'W>F_1W$
(per la "disuguaglianza triangolare" su $P'F_1W$: in un triangolo, ciascun lato è sempre minore della somma degli altri due),
quindi
$P'F_1+P'F_2>F_1W=PF_1+PF_2$.

Poiché la somma $P'F_1+P'F_2$ NON e' uguale alla costante PF_1+PF_2 dell'ellisse, P' non può appartenervi, c.v.d.



2b) Podaria di un'ellisse rispetto a un fuoco

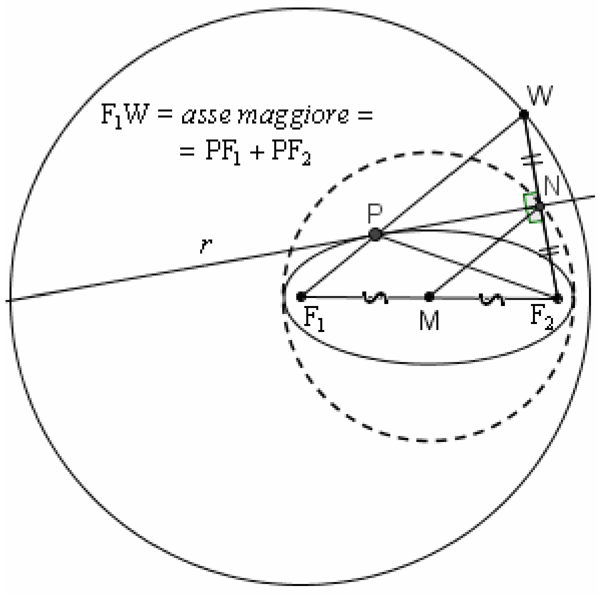
Si dice PODARIA di una curva rispetto a un punto (detto *polo*),
il luogo geometrico delle proiezioni di quel punto sulle rette tangenti alla curva.
Dimostra che
"**In un'ellisse, la PODARIA DI UN FUOCO è la circonferenza avente per diametro l'asse maggiore**"

Nella figura compaiono (vedi il precedente esercizio 2a) la tangente r ad un'ellisse in un suo punto P, costruita come asse del segmento WF_2, e la proiezione N del fuoco F_2 su tale tangente.

Detti M, N i punti medi dei segmenti F_1F_2 e WF_2 rispettivamente, avremo che il segmento MN, in quanto congiungente i punti medi di due lati del triangolo F_1F_2W, è uguale alla metà del terzo lato F_1W.

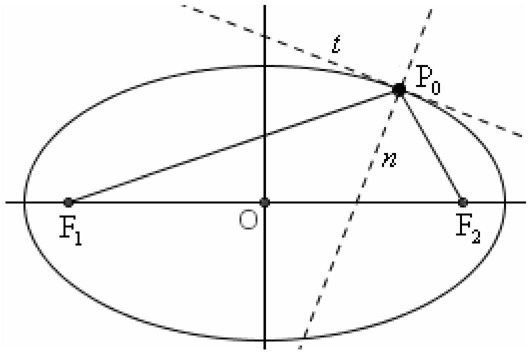
Ma F_1W ha lunghezza costante al variare di P: dunque anche MN, al variare di P, ha lunghezza costante.

E perciò il punto N, al variare di P, descrive una circonferenza di centro M e raggio uguale alla metà di F_1W, quindi diametro uguale a $F_1W=$ *asse maggiore dell'ellisse*.



3) Proprietà focale dell'ellisse in relazione alla riflessione della luce

Il nostro obiettivo è di far vedere che se si prende un qualsivoglia punto $P_0(x_0, y_0)$ dell'ellisse e si considerano le due congiungenti P_0F_1 e P_0F_2,
la normale n all'ellisse in P_0 coincide con la bisettrice dell'angolo $F_1\hat{P}_0F_2$.



Utilizzando la "regola degli sdoppiamenti",
scriviamo innanzitutto l'equazione della retta tangente all'ellisse in $P_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1$$

$$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2$$

$$y=\frac{a^2b^2-b^2x_0x}{a^2y_0}; \quad y=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x+\frac{b^2}{y_0}$$

Perciò, indicato con m_t il coefficiente angolare della retta *tangente*, avremo:

$$m_t=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

e di conseguenza, detto m_n il coefficiente angolare della *normale* all'ellisse in P_0, sarà

$$m_n=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}$$

Scriviamo ora l'equazione della normale n in P_0:

$$n: \quad y-y_0=m_n(x-x_0)$$

$$y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)$$

$$\boxed{y=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}x-\frac{a^2y_0}{b^2}+y_0}$$

Ora scriviamo le equazioni delle due rette P_0F_1 e P_0F_2;
successivamente potremo determinare l'equazione della bisettrice dell'angolo $F_1\hat{P}_0F_2$.

Retta P_0F_1, con $F_1(-c,0)$ e $P_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x+c}{x_0+c}=\frac{y}{y_0}$$

$$y_0(x+c)=y(x_0+c)$$

$$y_0x+cy_0=x_0y+cy$$

$$y_0x-x_0y-cy+cy_0=0$$

$$\boxed{y_0x-y(x_0+c)+cy_0=0}$$

Retta P_0F_2, con $P_0(x_0, y_0)$ e $F_2(c,0)$:

$$\frac{x-c}{x_0-c}=\frac{y}{y_0}$$

$$y_0(x-c)=y(x_0-c)$$

$$y_0x-cy_0=x_0y-cy$$

$$y_0x-x_0y+cy-cy_0=0$$

$$\boxed{y_0x-y(x_0-c)-cy_0=0}$$

Equazione della bisettrice dell'angolo $F_1\hat{P}_0F_2$ individuato da P_0F_1 e P_0F_2:

$$bisettrice=\left\{P(x,y)/\ d(P,\ P_0F_1)=d(P,\ P_0F_2)\right\}$$

$$\frac{|y_0x-y(x_0+c)+cy_0|}{\sqrt{y_0^2+(x_0+c)^2}}=\frac{|y_0x-y(x_0-c)-cy_0|}{\sqrt{y_0^2+(x_0-c)^2}}$$

dove possiamo osservare che i denominatori coincidono con le distanze P_0F_1 e P_0F_2 rispettivamente.
Sciogliendo il valore assoluto avremo

$$\frac{y_0x-y(x_0+c)+cy_0}{\sqrt{y_0^2+(x_0+c)^2}}=\pm\frac{y_0x-y(x_0-c)-cy_0}{\sqrt{y_0^2+(x_0-c)^2}}$$

e, fra le due rette bisettrici dei due angoli opposti al vertice formati dalle rette P_0F_1 e P_0F_2, andiamo a considerare quella ottenibile utilizzando il segno $-$.
Inoltre, per opportunità di calcolo, cambiamo di segno entrambi i numeratori. Dunque:

$$\frac{y(x_0+c)-y_0x-cy_0}{P_0F_1}=-\frac{y(x_0-c)-y_0x+cy_0}{P_0F_2}$$

$$P_0F_2\cdot y(x_0+c)-P_0F_2\cdot y_0x-P_0F_2\cdot cy_0=-P_0F_1\cdot y(x_0-c)+P_0F_1\cdot y_0x-P_0F_1\cdot cy_0$$

$$P_0F_2\cdot x_0y+P_0F_2\cdot cy-P_0F_2\cdot y_0x-P_0F_2\cdot cy_0=-P_0F_1\cdot x_0y+P_0F_1\cdot cy+P_0F_1\cdot y_0x-P_0F_1\cdot cy_0$$

$$x_0y(P_0F_2+P_0F_1)+cy(P_0F_2-P_0F_1)-y_0x(P_0F_2+P_0F_1)-cy_0(P_0F_2-P_0F_1)=0$$

Moltiplichiamo ora tutto per $P_0F_2+P_0F_1$ e otterremo, tenendo conto che

$$\left(P_0F_2+P_0F_1\right)^2=(2a)^2=4a^2 \quad \text{e} \quad P_0F_2{}^2-P_0F_1{}^2=-4cx_0 \ ,$$

l'equazione

$$4a^2x_0y-4c^2x_0y-4a^2y_0x+4c^2x_0y_0=0 \qquad x_0y(a^2-c^2)-a^2y_0x+c^2x_0y_0=0$$

$$x_0y(a^2-c^2)=a^2y_0x-c^2x_0y_0$$

Ricordando ora che

$$a^2-c^2=b^2$$

potremo scrivere:

$$b^2x_0y=a^2y_0x-c^2x_0y_0; \quad y=\frac{a^2y_0x-c^2x_0y_0}{b^2x_0}; \quad y=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}x-\frac{c^2}{b^2}y_0$$

Utilizziamo la relazione $c^2=a^2-b^2$ e avremo:

$$y=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}x-\frac{(a^2-b^2)y_0}{b^2}$$

$$\boxed{y=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}x-\frac{a^2y_0}{b^2}+y_0}$$

Ma l'ultima equazione scritta
(che è, ricordiamolo ancora, l'equazione della bisettrice dell'angolo formato dalle due rette P_0F_1 e P_0F_2)
risulta coincidere con l'equazione della normale all'ellisse in P_0 da noi determinata all'inizio!

L'asserto è perciò dimostrato.

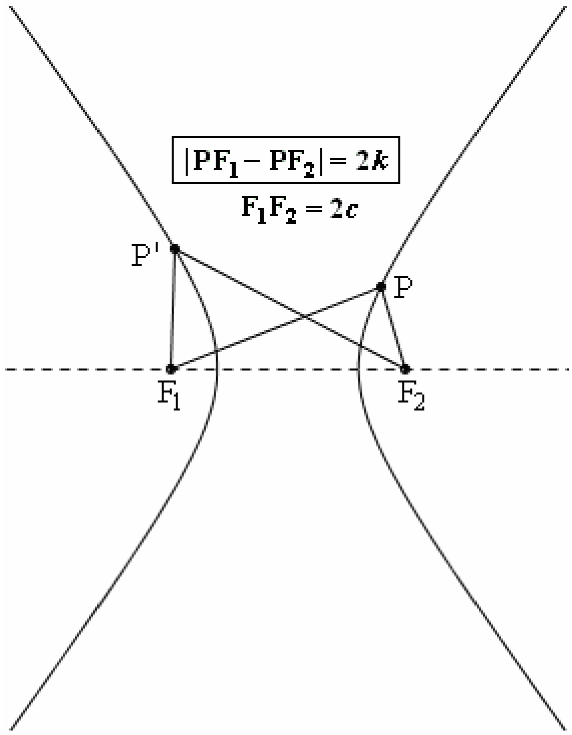
31. L'IPERBOLE NEL PIANO CARTESIANO

DEFINIZIONE DI IPERBOLE

Si dice "iperbole" il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi, detti "fuochi":

$$\left|\mathbf{PF_1} - \mathbf{PF_2}\right| = \textit{costante}$$

Indicheremo la differenza costante con $2k$, e la distanza fra i due fuochi (= distanza focale) con $\mathbf{2c}$.



Si osserva che la curva è distribuita su **due "rami" distinti**:

- il ramo costituito dai punti P per i quali $PF_1 - PF_2 = 2k$
- il ramo costituito dai punti P per i quali $PF_2 - PF_1 = 2k$

Con riferimento alla figura,
ricordando che in un triangolo la differenza fra due lati
è sempre minore del terzo lato, avremo

$$2k = \left|PF_1 - PF_2\right| < F_1F_2 = 2c\,.$$

- Se scegliessimo $2k > 2c$,
il luogo dei punti P per cui $\left|PF_1 - PF_2\right| = 2k$
sarebbe vuoto;
- se poi prendessimo $2k = 2c$,
il luogo degenererebbe in … dillo tu!

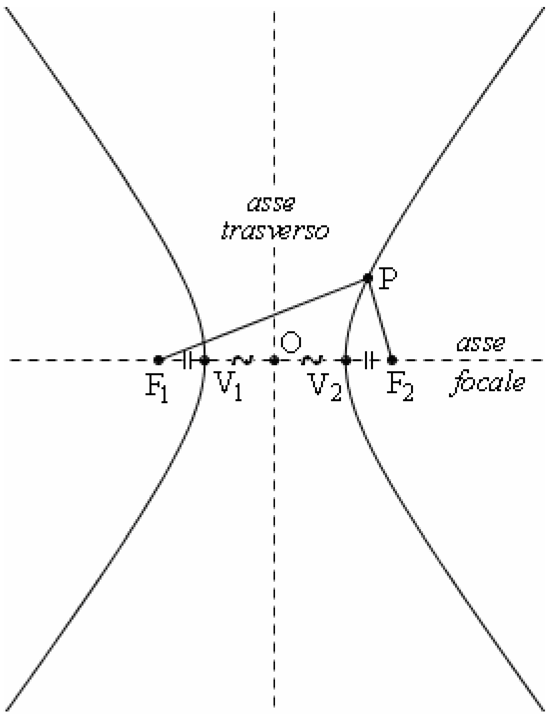
Insomma: **dovrà essere $\mathbf{2k < 2c}$ $(\boldsymbol{k < c})$
affinché il luogo non sia né vuoto, né degenere**.

Si intuisce, si constata da buoni disegni,
e si potrebbe facilmente dimostrare,
che un'iperbole è dotata di **due assi di simmetria**:

- la retta passante per i due fuochi (detta "asse focale")
- e l'asse del segmento che ha per estremi i due fuochi ("asse trasverso").

La curva possiede pure un **centro di simmetria**
(detto, per brevità, semplicemente "**il centro**" dell'iperbole):
esso è l'intersezione O fra l'asse focale e l'asse trasverso,
ossia il punto medio del segmento che ha per estremi i fuochi.

Si dicono "**vertici**" dell'iperbole,
i punti di intersezione della curva con l'asse focale.



E' facile dimostrare che, in un'iperbole,
la distanza tra i vertici è uguale alla "costante dell'iperbole"
(ossia alla differenza costante di cui parla la definizione,
quella che abbiamo indicato con $2k$).

Con riferimento alla figura qui a fianco, infatti,
poiché per ogni punto P *del ramo destro dell'iperbole si ha*

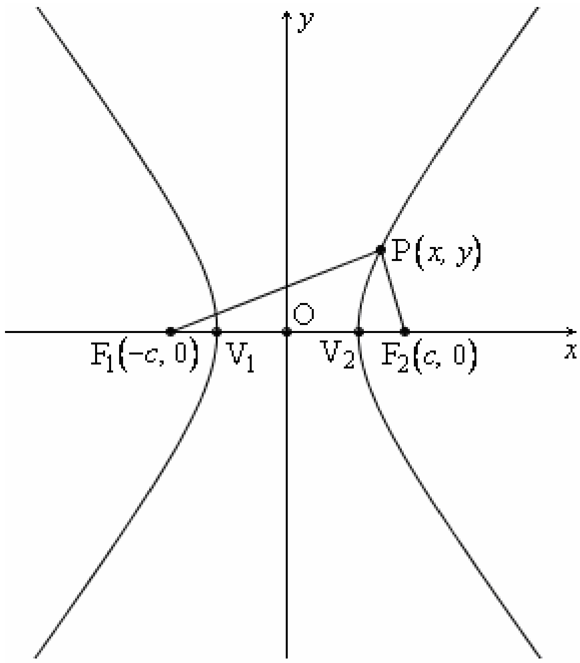
$$PF_1 - PF_2 = 2k$$

ed essendo V_2 *un punto del ramo destro dell'iperbole,*
sarà pure $V_2F_1 - V_2F_2 = 2k$

quindi $V_1V_2 \cancel{+V_1F_1} \cancel{-V_2F_2} = 2k$

dove nel semplificare abbiamo tenuto conto che è
$V_1F_1 = V_2F_2$ *per motivi di simmetria.*

L'EQUAZIONE DELL'IPERBOLE



Per semplicità, supporremo inizialmente che
gli assi del riferimento cartesiano coincidano
con gli assi di simmetria dell'iperbole.
In queste condizioni,
si **parlerà di "iperbole riferita ai suoi assi"**,
o anche di "iperbole in posizione canonica"
(brevemente: "**iperbole canonica**").

Se l'iperbole è in posizione canonica,
il centro di simmetria dell'iperbole coinciderà con l'origine
e i fuochi staranno o sull'asse *x*, o sull'asse *y*.
In ciascuno dei due casi,
l'origine sarà il punto medio del segmento F_1F_2.

Supponiamo dapprima che i fuochi stiano sull'asse *x*.
In questo caso,
al posto di indicare la "differenza costante" con $2k$,
la indicheremo con $2a$
(questa scelta è dettata da motivi di opportunità
che lo studente comprenderà a posteriori).

Avremo dunque:

$F_1(-c,0);\ F_2(c,0)\ \ P(x,y)$

$|PF_1 - PF_2| = 2a$

Questa equazione equivale a $PF_1 - PF_2 = \pm 2a$

ossia $PF_1 - PF_2 = 2a \ \vee\ PF_1 - PF_2 = -2a \ \ (PF_2 - PF_1 = 2a)$.

Perciò se $P(x,y)$ appartiene alla curva si avrà $\boxed{PF_1 - PF_2 = \pm 2a}$ da cui seguono le uguaglianze

(*) $$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$

$$\cancel{x^2} + 2cx \cancel{+c^2} \cancel{+y^2} = 4a^2 \cancel{+x^2} - 2cx \cancel{+c^2} \cancel{+y^2} \pm 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$

$$\pm a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} = cx - a^2$$

$$a^2x^2 \cancel{-2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 \cancel{-2a^2cx} + a^4$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Essendo ora $2k < 2c \ \ (k < c)$ sarà anche $a = k < c$, quindi $a^2 < c^2$, e dunque $a^2 - c^2 < 0$.
Converrà perciò cambiare i segni di tutti i termini, ottenendo

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

Poiché si ha $c^2 - a^2 > 0$, potremo porre $c^2 - a^2 = b^2$, e la nostra equazione diventerà
$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Dividendo ora per a^2b^2 otterremo:

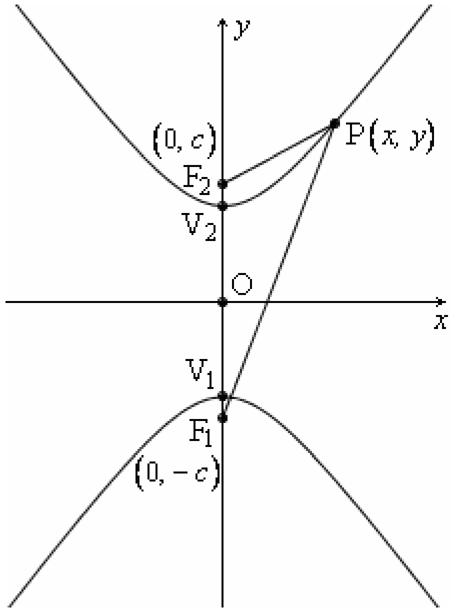
(**) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \ (b^2 = c^2 - a^2)$$

Abbiamo fin qui fatto vedere che, se un punto $P(x,y)$ appartiene all'iperbole di fuochi $F_1(-c,0);\ F_2(c,0)$
e costante $2a$, allora le coordinate (x,y) di P verificheranno l'equazione (**).

Si può poi dimostrare che vale anche il *viceversa*, ossia che, se un punto (x,y) è tale che le sue coordinate
verifichino la (**), allora (x,y) appartiene all'iperbole di fuochi $F_1(-c,0);\ F_2(c,0)$ e costante $2a$.

Resta così stabilito che
l'iperbole di fuochi $F_1(-c,0);\ F_2(c,0)$ e costante $2a$ ha equazione

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \ (b^2 = c^2 - a^2)}$$



E se i fuochi stessero sull'asse y?

In questo caso,
al posto di indicare la "differenza costante" con $2k$,
la indicheremo con $2b$ e, fatti i calcoli, otterremo

$$b^2x^2 + (b^2 - c^2)y^2 = b^2(b^2 - c^2)$$

Essendo ora $2k < 2c$ $(k < c)$ sarà anche

$$b = k < c, \quad b^2 < c^2, \quad b^2 - c^2 < 0$$

Cambieremo perciò i segni di tutti i termini:

$$-b^2x^2 + (c^2 - b^2)y^2 = b^2(c^2 - b^2)$$

Grazie alla positività di $c^2 - b^2$,
potremo porre $c^2 - b^2 = a^2$, ottenendo

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2; \quad b^2x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2$$

Dividendo infine per a^2b^2 l'equazione assumerà la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (c^2 - b^2 = a^2)$$

Ricapitoliamo:

Considerata un'iperbole canonica coi FUOCHI SULL'ASSE *x*, se si indica con $2c$ la sua distanza focale e con $2a$ la sua costante, la sua equazione è $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = c^2 - a^2)$	Considerata un'iperbole canonica coi FUOCHI SULL'ASSE *y*, se si indica con $2c$ la sua distanza focale e con $2b$ la sua costante, la sua equazione è $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a^2 = c^2 - b^2)$

Si capisce a questo punto che la scelta di indicare la costante dell'iperbole
(= la differenza costante di cui parla la definizione)

- con $2a$ anziché con $2k$ quando i fuochi stanno sull'asse x,
- con $2b$ anziché con $2k$ quando i fuochi stanno sull'asse y,

è motivata dal fatto che, in questo modo, si ottengono, nei due casi, due equazioni con ugual primo membro.

Occhio però:

- quando i fuochi stanno sull'asse x, il secondo membro è +1,
- mentre quando i fuochi stanno sull'asse y, il secondo membro è –1.

In definitiva, un'iperbole canonica ha sempre equazione della forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ e precisamente:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **se i fuochi sono in orizzontale (in questo caso, la costante è $2a$)**

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ **se i fuochi sono in verticale (in questo caso, la costante è $2b$)**

Ora ci domandiamo:

- **data un'equazione della forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, essa rappresenterà sempre un'iperbole coi fuochi in orizzontale, qualunque siano i valori dei due parametri *a*, *b* ?**
  La risposta è affermativa.
  Infatti: posto $c^2 = a^2 + b^2$, se andiamo a ricavare l'equazione dell'iperbole di fuochi $(\pm c, 0)$ e costante $2a$,
  otterremo proprio $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- **E data un'equazione della forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, essa rappresenterà sempre un'iperbole coi fuochi in verticale, qualunque siano i valori dei due parametri *a*, *b* ?**
  La risposta è affermativa.
  Infatti: posto $c^2 = a^2 + b^2$, se andiamo a ricavare l'equazione dell'iperbole di fuochi $(0, \pm c)$ e costante $2b$,
  otterremo proprio $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

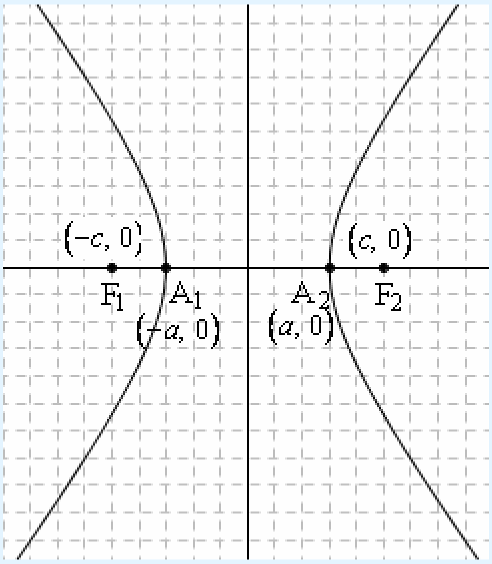
RIASSUNTO DEL RIASSUNTO SULL'IPERBOLE NEL PIANO CARTESIANO

Caso dei fuochi in orizzontale:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$con\ \ b^2 = c^2 - a^2 \ \rightarrow \ c^2 = a^2 + b^2$$

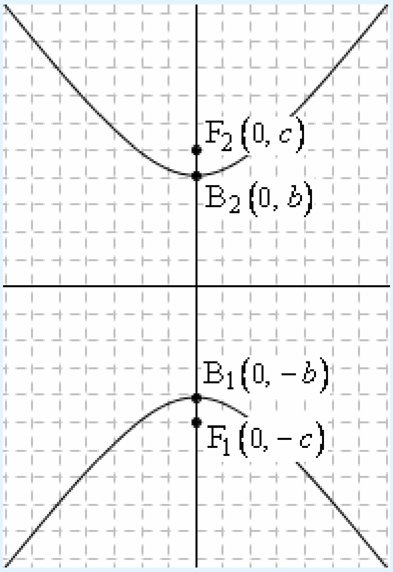


Caso dei fuochi in verticale:

$$|PF_1 - PF_2| = 2b$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

$$con\ \ a^2 = c^2 - b^2 \ \rightarrow \ c^2 = a^2 + b^2$$



- **Se è data un'equazione della forma** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$,
  noi sappiamo che essa rappresenta un'iperbole "in posizione canonica",
  nel senso che gli assi di simmetria della curva coincidono con gli assi cartesiani.

  Pertanto, se prendiamo l'equazione data e la poniamo a sistema
  prima con l'equazione dell'asse x **(** $y = 0$ **)**
  e poi con l'equazione dell'asse y **(** $x = 0$ **),**
  otterremo che uno degli assi cartesiani viene intersecato dalla curva, l'altro no.

  L'asse che viene intersecato dalla curva, ne è l'asse focale;
  i punti di intersezione trovati sono i vertici dell'iperbole.

  E' poi sempre utilissimo ricordare che la costante dell'iperbole (NOTA)
  è sempre uguale alla distanza tra i due vertici.

  NOTA:
  Per "costante dell'iperbole" intendiamo la differenza costante di cui parla la definizione,
  quella che avevamo in generale indicato con $2k$, e che per l'iperbole canonica abbiamo preferito indicare con $2a$ nel caso i fuochi fossero in orizzontale, con $2b$ per fuochi in verticale

  Sia quando l'equazione è $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, **sia quando è** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, **vale la relazione** $c^2 = a^2 + b^2$
  che permette di ricavare la semidistanza focale c **(e quindi le coordinate dei fuochi),**
  a partire dai due parametri a, b.

- Inversamente, **quando un problema mi parla di un' iperbole "canonica"**,
  devo pensare ad un'iperbole "riferita ai suoi assi", cioè ad un'iperbole collocata
  in un sistema di riferimento i cui assi cartesiani coincidano con gli assi di simmetria dell'iperbole.

  So che **l'equazione sarà della forma** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$,

  e precisamente: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se i fuochi sono in orizzontale, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ se i fuochi sono in verticale.

  Si tratterà di determinare i valori delle due costanti a, b **(o direttamente:** a^2, b^2 **),**
  sfruttando due opportune condizioni che il problema mi fornirà.

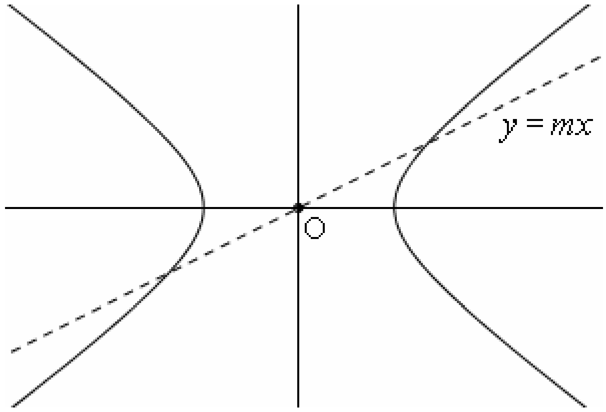
GLI "ASINTOTI" DI UNA CURVA

Avrai notato che, quando ci si allontana dai fuochi,
l'iperbole tende ad attenuare la sua curvatura, assumendo un andamento quasi rettilineo.
In effetti si può dimostrare che esistono due rette, dette "gli asintoti" dell'iperbole,
alle quali la curva si avvicina sempre più, man mano che ci si allontana dai fuochi.
Per darti un'idea preliminare, seppure sommaria, di cosa si intenda, in Matematica, per "asintoto", ti dirò che

**si parla di "asintoto" ogniqualvolta si è in presenza di una retta,
alla quale una curva si avvicina "indefinitamente", si avvicina "di tanto quanto noi vogliamo",
quando il punto sulla curva viene fatto "allontanare indefinitamente", viene fatto "tendere all'infinito".**

L'IPERBOLE POSSIEDE DUE ASINTOTI !

E' possibile dimostrare che un'iperbole è una curva dotata di due asintoti.
A tale scopo, pensiamo l'iperbole collocata in un riferimento cartesiano,
con gli assi scelti in modo da coincidere con gli assi di simmetria dell'iperbole (posizione canonica).
Supponiamo inoltre che i fuochi stiano sull'asse x.



L'equazione della curva sarà allora $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
e il grafico si presenterà come nella figura qui a fianco.
Nella stessa figura è rappresentata anche
una retta per l'origine, di equazione $y=mx$.
Poniamo a sistema tale equazione
con l'equazione dell'iperbole: avremo

(1) $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=mx \end{cases}$

L'equazione risolvente del sistema è

(2) $\left(b^2-a^2m^2\right)x^2=a^2b^2$

che diventa

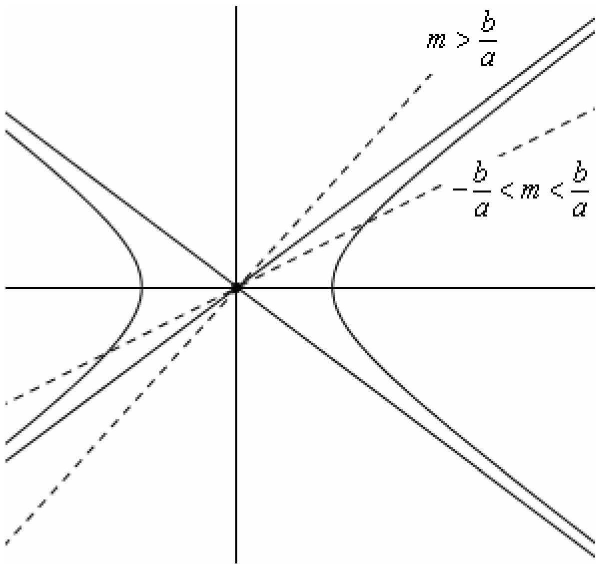
(3) $x^2=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2m^2}$ sotto la condizione $b^2-a^2m^2\neq 0$ ossia $m\neq\pm\frac{b}{a}$.

Quando $m=\pm\frac{b}{a}$
l'equazione (2) non può essere portata sotto la forma (3), e risulta impossibile (= priva di soluzioni);
… ma l'equazione (2) è impossibile pure se il secondo membro della (3) è negativo.

Ora, si ha $\frac{a^2b^2}{b^2-a^2m^2}<0$ se e solo se $b^2-a^2m^2<0$ $\left(a^2m^2-b^2>0\right)$ ossia $m<-\frac{b}{a}\vee m>\frac{b}{a}$.

In definitiva:
data l'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,
una retta $y=mx$

- NON la interseca se è $m\leq-\frac{b}{a}\vee m\geq\frac{b}{a}$;
- invece la interseca quando $-\frac{b}{a}<m<\frac{b}{a}$.



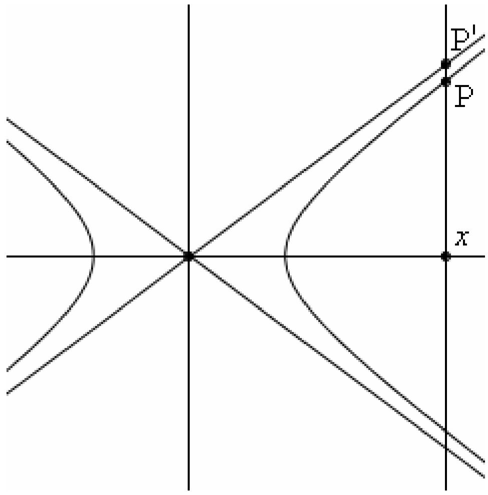
Possiamo anche dire che l'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
è tutta contenuta all'interno
della coppia di angoli opposti al vertice
che hanno per lati le due rette $y=-\frac{b}{a}x$ e $y=\frac{b}{a}x$
e sono bisecati dall'asse x.

Le due rette $y=\pm\frac{b}{a}x$ (a tratto continuo nella figura)

sono, fra le rette per l'origine, "le prime a non intersecare l'iperbole" .
Dimostreremo ora che esse fanno da "asintoti obliqui" per l'iperbole,
nel senso sopra specificato: un punto sulla curva "molto lontano" è "vicinissimo" alla retta.

Infatti: esplicitiamo l'equazione della nostra iperbole rispetto a *y*:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2;$$
$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2;$$
$$y^2=\frac{b^2x^2-a^2b^2}{a^2}\ ;\ \ y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$



Noi considereremo innanzitutto quella parte della nostra iperbole, che cade nel primo quadrante, cioè quella parte di iperbole che è individuata dal sistema $\begin{cases} y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \\ x>0 \end{cases}$

e faremo vedere che ammette come asintoto obliquo la retta

$$y=\frac{b}{a}x.$$

Detto P il punto di ascissa $x>0$ della curva $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$,

e detto P' il punto, avente la stessa ascissa *x*, della retta $y=\frac{b}{a}x$,

ci proponiamo di far vedere che la differenza $y_{\mathrm{P}'}-y_{\mathrm{P}}$ fra le rispettive ordinate
(corrispondente, nella figura, alla lunghezza del segmento PP'), tende a 0 quando *x* tende all'infinito.

$$y_{\mathrm{P}'}-y_{\mathrm{P}}=\mathrm{PP}'=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=$$
$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{x^2-(x^2-a^2)}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

Si ha perciò $y_{\mathrm{P}'}-y_{\mathrm{P}}=\mathrm{PP}'=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$; ma ora, se pensiamo di "far tendere *x* a $+\infty$ "
(vale a dire, se pensiamo di assegnare a *x* valori positivi grandi, *molto* grandi, *arbitrariamente* grandi),
il denominatore di questa frazione si farà grandissimo, mentre il numeratore resta costante,
e quindi il valore della frazione diventerà piccolissimo.

Si esprime questo fatto scrivendo $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{PP}'=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=0$.

Considerazioni di simmetria ci portano ora a stabilire che ciò che avviene nel 1° quadrante con la retta $y=\frac{b}{a}x$,

avverrà anche nel 3° con la medesima retta, e avverrà pure nel 2° e nel 4°, con la retta $y=-\frac{b}{a}x$.

Abbiamo così provato che le due rette $y=\pm\frac{b}{a}x$ fanno da asintoti obliqui bilaterali

(cioè: sia con $x\to+\infty$ che con $x\to-\infty$) per l'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Si potrebbe analogamente far vedere che, anche nel caso dei fuochi in verticale (equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$),

le equazioni dei due asintoti sono sempre $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Ricapitolando:

tanto l'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ quanto la $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$
ammettono come asintoti obliqui bilaterali (cioè: sia "verso destra" che "verso sinistra")
le due rette $y=\pm\frac{b}{a}x$

ECCENTRICITA' DI UN'IPERBOLE

Nell'ellisse, l'eccentricità era un numero, compreso fra 0 e 1,
tanto più grande (= più vicino a 1) quanto più l'ellisse si discostava dalla forma circolare.

Nel caso dell'iperbole, l'eccentricità è invece
un numero maggiore di 1, che è tanto più grande quanto più la "forbice" degli asintoti è divaricata.

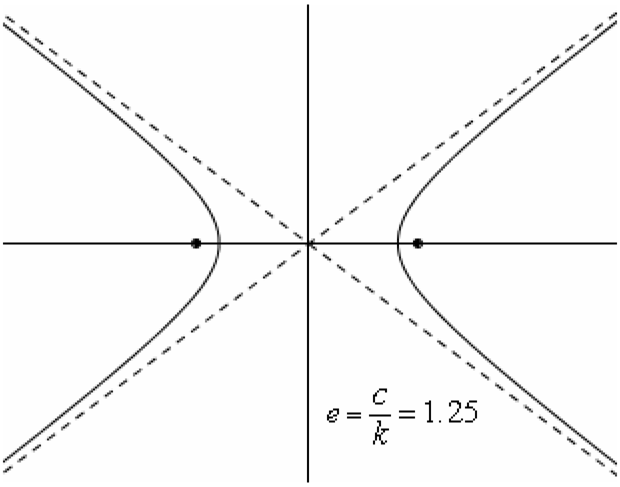
Si pone, riguardo all'iperbole, la seguente definizione:

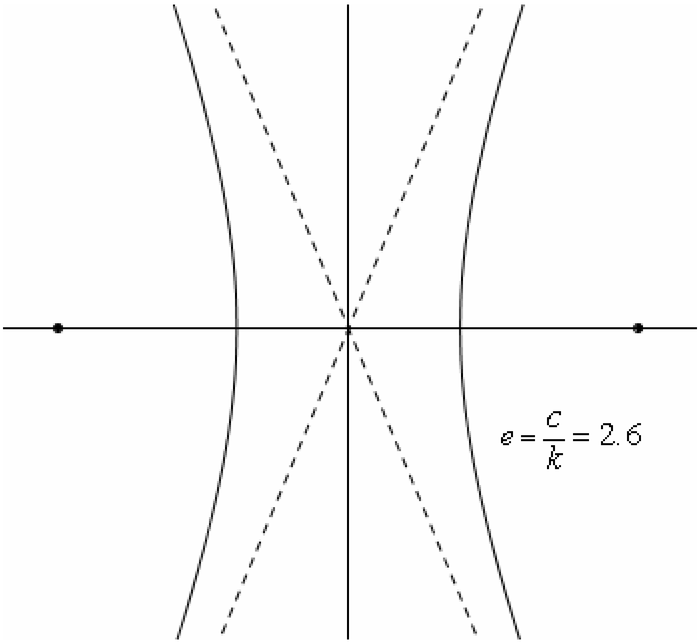
$$e = \frac{semidistanza\ \ focale}{semicostante\ dell'iperbole} = \frac{semidistanza\ \ focale}{semidistanza\ \ fra\ i\ vertici} = \frac{c}{k}$$

ed **essendo il numeratore maggiore del denominatore** (NOTA)**, sarà certamente** $e > 1$.

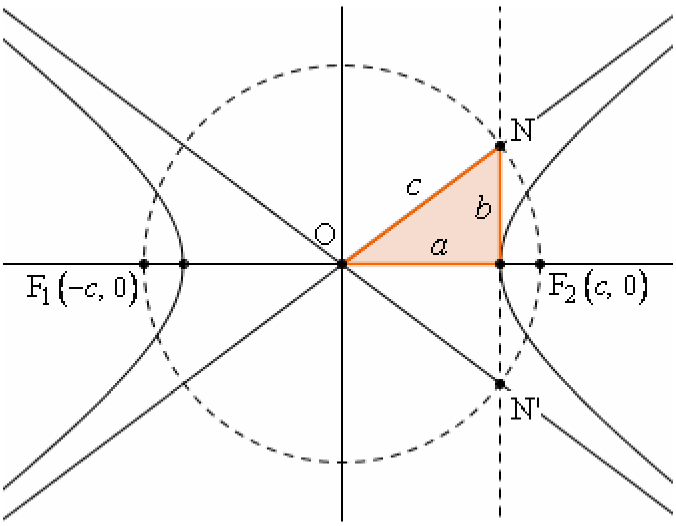
NOTA: Come sappiamo, la "costante dell'iperbole", ossia la differenza costante di cui parla la definizione, è minore della distanza focale: $2k < 2c \rightarrow k < c$.

Con riferimento ad un'iperbole canonica, avremo $e = \begin{cases} \dfrac{c}{a} & se\ i\ \ fuochi\ sono\ in\ orizzontale \\ \dfrac{c}{b} & se\ i\ \ fuochi\ sono\ in\ verticale \end{cases}$





UNA VISUALIZZAZIONE DELLA RELAZIONE FRA *a, b, c* ;
UN METODO PER DETERMINARE GEOMETRICAMENTE L'INCLINAZIONE DEGLI ASINTOTI



Consideriamo il caso in cui i fuochi siano in orizzontale; un'analoga costruzione si potrebbe effettuare coi fuochi in verticale.

Ricordiamo che $c^2 = a^2 + b^2$.
Ne consegue che intersecando la circonferenza di centro l'origine e raggio $OF_1 = OF_2 = c$ con la perpendicolare all'asse x condotta per il vertice $(a,0)$, si ottengono due punti N, N' la cui distanza dall'asse x è un segmento di lunghezza b.
Se a questo punto si tracciano le due rette ON, ON', esse avranno perciò coefficienti angolari b/a e $-b/a$ rispettivamente: saranno dunque gli asintoti dell'iperbole.

ESEMPI DI ESERCIZI SULL'IPERBOLE CANONICA

- ESEMPIO 1 - *Studia e disegna le iperboli canoniche seguenti*: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$

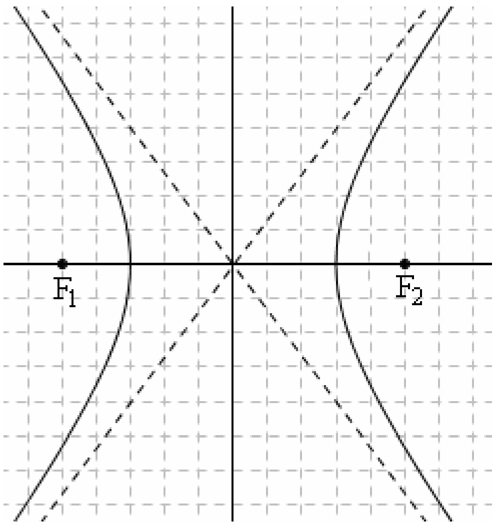
$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

$a=3,\ b=4,\ c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25}=5$

I fuochi sono in orizzontale perché il 2° membro è $+1$.
Fuochi: $(\pm 5, 0)$. Vertici: $(\pm 3, 0)$.

Asintoti: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4}{3}x$.

Eccentricità: $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$



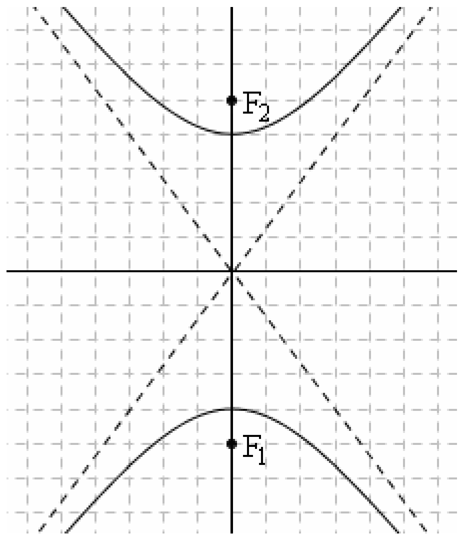
$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$$

$a=3,\ b=4,\ c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25}=5$

I fuochi sono in verticale perché il 2° membro è -1.
Fuochi: $(0, \pm 5)$. Vertici: $(0, \pm 4)$.

Asintoti: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4}{3}x$.

Eccentricità: $e=\frac{c}{b}=\frac{5}{4}$



ESEMPIO 2 - *Considera l'iperbole canonica di fuochi* $F_{1,2}=(\pm 13, 0)$ *e vertici* $V_{1,2}=(\pm 12, 0)$.
Scrivi l'equazione della curva, e determinane gli asintoti e l'eccentricità. Disegno.

I fuochi sono in orizzontale, quindi equazione è della forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Abbiamo $c=13$ e $a=12$.

Ricordando che $c^2=a^2+b^2$, si ricava $b^2=25 \to b=5$. L'equazione è perciò $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$.

Gli asintoti hanno equazioni: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{5}{12}x$. L'eccentricità vale $e=\frac{c}{a}=\frac{13}{12}$.

ESEMPIO 3 - *Studia e disegna l'iperbole canonica, avente i fuochi sull'asse y, semidistanza focale* 2,
e passante per $W(1,1)$.

L'equazione, poiché i fuochi sono in verticale, è della forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$.

La condizione di appartenenza del punto W fornisce $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=-1$; si ha poi $a^2+b^2=c^2=4$.

Ponendo a sistema le due condizioni si trova: $a^2=1+\sqrt{5}$; $b^2=3-\sqrt{5}$,

per cui l'equazione è $\frac{x^2}{1+\sqrt{5}}-\frac{y^2}{3-\sqrt{5}}=-1$.

Asintoti: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}x=\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\,x=\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot x\approx\pm 0{,}49x$

Eccentricità: $e=\frac{c}{b}=\frac{2}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\frac{2}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}\cdot\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}=\sqrt{3+\sqrt{5}}\approx 2{,}29$

ESEMPIO 4 - *Scrivi l'equazione dell'iperbole canonica coi fuochi sull'asse x, tangente alla retta di equazione* $3x-4y=2$ *e passante per il punto* $\mathrm{A}\left(4,\sqrt{6}\right)$.

L'equazione, poiché i fuochi sono sull'asse *x*, sarà della forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Occorre ora porre 2 condizioni per determinare i valori dei 2 parametri *a*, *b*.

La 1ª condizione può essere il passaggio per il punto $\mathrm{A}\left(4,\sqrt{6}\right)$, che ci fornisce $\frac{16}{a^2}-\frac{6}{b^2}=1$.

La 2ª condizione è la tangenza rispetto alla retta $3x-4y=2$.

Dovremo mettere a sistema l'equazione dell'iperbole con l'equazione della retta, per poi, nell'equazione risolvente del sistema stesso, porre $\Delta=0$.

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\3x-4y=2\end{cases}\qquad\begin{cases}y=\frac{3x-2}{4}\\\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{3x-2}{4}\right)^2}{b^2}=1\qquad\frac{x^2}{a^2}-\frac{9x^2-12x+4}{16b^2}=1\qquad 16b^2x^2-9a^2x^2+12a^2x-4a^2=16a^2b^2$$

$$\left(16b^2-9a^2\right)x^2+12a^2x-4a^2\left(1+4b^2\right)=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=0\quad 36a^4+4a^2\left(1+4b^2\right)\left(16b^2-9a^2\right)=0$$

Semplificando per $4a^2$: $9a^2+\left(1+4b^2\right)\left(16b^2-9a^2\right)=0$

$$\cancel{9a^2}+16b^2\cancel{-9a^2}+64b^4-36a^2b^2=0\qquad 4+16b^2-9a^2=0\qquad 9a^2-16b^2=4$$

Dunque

$$\begin{cases}\frac{16}{a^2}-\frac{6}{b^2}=1\\9a^2-16b^2=4\end{cases};\qquad\begin{cases}16b^2-6a^2=a^2b^2\\9a^2-16b^2=4\end{cases};\qquad\begin{cases}16b^2-6a^2=a^2b^2\\a^2=\frac{16b^2+4}{9}\end{cases}$$

$$16b^2-6\cdot\frac{16b^2+4}{9}=\frac{16b^2+4}{9}\cdot b^2$$

$$144b^2-96b^2-24=16b^4+4b^2$$

$$16b^4-44b^2+24=0$$

$$4b^4-11b^2+6=0$$

$$4b^4-8b^2-3b^2+6=0$$

$$4b^2\left(b^2-2\right)-3\left(b^2-2\right)=0$$

$$\left(b^2-2\right)\left(4b^2-3\right)=0\qquad b^2=\left\langle\begin{array}{l}2\\\frac{3}{4}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}b^2=2\\a^2=\frac{16b^2+4}{9}=\frac{32+4}{9}=\frac{36}{9}=4\end{cases}\quad\vee\quad\begin{cases}b^2=\frac{3}{4}\\a^2=\frac{16\cdot\frac{3}{4}+4}{9}=\frac{12+4}{9}=\frac{16}{9}\end{cases}$$

Ci sono pertanto *due* distinte iperboli che risolvono questo problema:

- una ha equazione $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$
- e l'altra ha equazione $\frac{x^2}{\frac{16}{9}}-\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$ o anche $\frac{9}{16}x^2-\frac{4}{3}y^2=1$ o $27x^2-64y^2=48$.

ESEMPIO 5 - *Considera la curva di equazione* $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}$.
Determinane le caratteristiche, disegnala,
e scrivi l'equazione della retta che è ad essa tangente nel punto di ascissa -3.

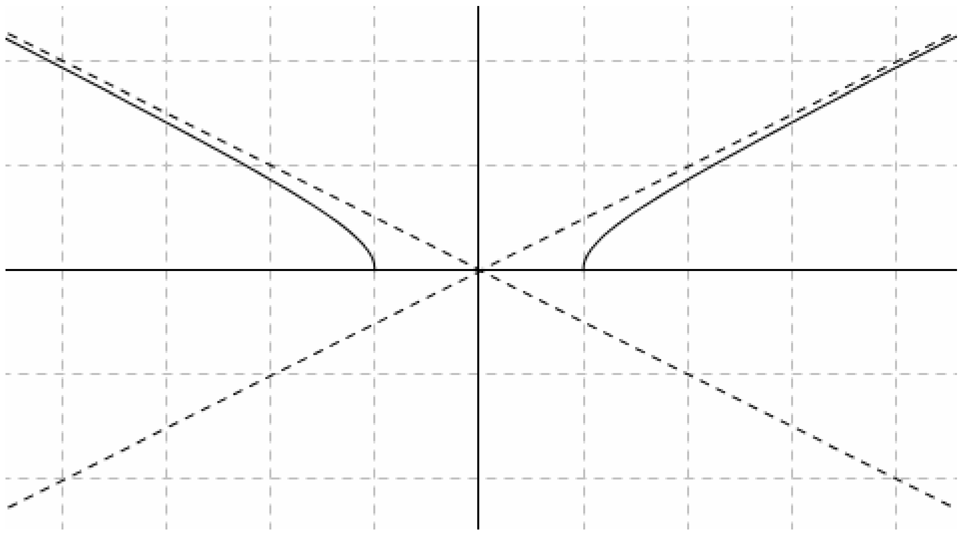
$$y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}$$
$$2y=\sqrt{x^2-1}$$
$$4y^2=x^2-1 \quad \left(\boxed{y\ge 0}\right)$$
$$4y^2-x^2=-1; \qquad x^2-4y^2=1, \qquad x^2-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$$

Si tratta perciò della metà superiore ($y\ge 0$) di un'iperbole coi fuochi sull'asse *x*.
I vertici di questa iperbole hanno coordinate $V_{1,2}=(\pm a,\ 0)=(\pm 1,\ 0)$,
i fuochi $F_{1,2}=(\pm c,\ 0)=\left(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)=\left(\pm\sqrt{1+\frac{1}{4}},\ 0\right)=\left(\pm\sqrt{\frac{5}{4}},\ 0\right)=\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$;

gli asintoti hanno equazioni $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\frac{1}{2}}{1}x=\pm\frac{1}{2}x$,

l'eccentricità è $\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

La figura è la seguente:



Il punto di ascissa -3 ha ordinata $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}=\frac{\sqrt{(-3)^2-1}}{2}=\frac{\sqrt{9-1}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}=\sqrt{2}$
ed è dunque $\left(-3,\sqrt{2}\right)$.
Trattandosi di un punto che appartiene alla curva, l'equazione della retta tangente si può scrivere applicando la comoda "<u>REGOLA DEGLI SDOPPIAMENTI</u>", la quale afferma che l'equazione della retta tangente a una curva di 2° grado γ nel suo punto (x_0, y_0) si può ottenere effettuando, nell'equazione $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, le sostituzioni

$$x^2\to x_0x \qquad y^2\to y_0y \qquad xy\to\frac{y_0x+x_0y}{2} \qquad x\to\frac{x_0+x}{2} \qquad y\to\frac{y_0+y}{2}.$$

Nel nostro caso l'equazione è $x^2-4y^2=1$ ed è $(x_0, y_0)=\left(-3,\sqrt{2}\right)$, per cui si avrà
$t:\ -3x-4\cdot\sqrt{2}y=1$ o anche $t:\ 3x+4y\sqrt{2}+1=0$.

IPERBOLE TRASLATA

Se consideriamo un'iperbole, che sia collocata nel piano cartesiano in modo da essere **traslata** rispetto alla posizione canonica, questa iperbole avrà il suo centro di simmetria in un punto $P_0(x_0, y_0)$ anziché nell'origine, ma avrà pur sempre gli assi di simmetria, uno orizzontale e l'altro verticale.

L'equazione di un'iperbole "traslata", di centro (x_0, y_0), è

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1}$$ (+1 se i fuochi sono in orizzontale, −1 se sono in verticale).

- E' chiaro che **l'iperbole traslata "eredita" tutte le caratteristiche dell'iperbole canonica**. In particolare:
  - **la costante dell'iperbole** (= la differenza costante di cui parla la definizione, la quale, è sempre importante ricordarlo, coincide anche con la distanza tra i due vertici) **è** **$2a$ se i fuochi sono in orizzontale, $2b$ se i fuochi sono in verticale**
  - Vale la relazione $\boxed{c^2=a^2+b^2}$, essendo c la semidistanza focale;
  - I **coefficienti angolari degli asintoti** sono $\boxed{\pm\frac{b}{a}}$.

    Occhio, però: **anche gli asintoti sono traslati**! Essi non si incrociano più nell'origine, bensì nel punto (x_0, y_0) che fa da centro di simmetria per la curva.

    Le equazioni degli asintoti sono perciò $\boxed{y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)}$

ESEMPIO - Scrivi l'equazione dell'iperbole traslata di fuochi $F_1(-1,1);\ F_2(-1,7)$ e costante 2. Disegna la curva.

$c=3,\ b=1 \rightarrow a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Il centro ha coordinate $(-1, 4)$ e perciò l'equazione è $\frac{(x+1)^2}{8}-(y-4)^2=-1$.

Gli asintoti hanno coeff. ang. $\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\approx\pm 0{,}35$ ed equazioni $y-4=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}(x+1)$

DIETRO-FRONT: DALL'EQUAZIONE ALLA CURVA

- Prendendo l'equazione dell'iperbole traslata di centro (x_0, y_0) e liberandola dai denominatori, si ottiene un'equazione dalla forma: $\boxed{mx^2+ny^2+px+qy+r=0}$ con ***m* ed *n* DISCORDI**.
- Viceversa, un'equazione che si presenta sotto la forma $mx^2+ny^2+px+qy+r=0$ con m, n DISCORDI, può essere SEMPRE ricondotta, col "**metodo del completamento dei quadrati**", ad una delle tre forme

  $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=+1;\quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1;\quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=0$$

  e quindi rappresenta SEMPRE:
  - un'iperbole traslata (coi fuochi che potranno essere in orizzontale, o in verticale);
  - oppure, qualora il secondo membro risulti essere 0, una coppia di rette.

  In quest'ultimo caso si pensa ad una **iperbole degenere nei suoi asintoti.**

  NOTA
  Ricorderai che un'equazione della stessa forma $mx^2+ny^2+px+qy+r=0$, ma con m, n CONCORDI, poteva rappresentare, a seconda dei casi, un'ellisse, oppure un luogo puntiforme, oppure il luogo vuoto.

ESEMPIO - *Studiare la curva di equazione* $x^2-4y^2+24y-32=0$

L'equazione è di 2° grado in x, y, e manca del "termine rettangolare";
i coefficienti di x^2, y^2 sono discordi;
essa rappresenterà allora un'iperbole traslata, eventualmente degenere nei suoi asintoti.
Avremo:

$x^2-4(y^2-6y)-32=0;\quad x^2-4(y^2-6y+9-9)-32=0;\quad x^2-4(y-3)^2+36-32=0;$

$x^2-4(y-3)^2=-4$ e finalmente $\frac{x^2}{4}-(y-3)^2=-1$: iperbole di centro $C(0,3)$.

Il secondo membro è -1, quindi i fuochi sono in verticale.
$a^2=4,\ b^2=1 \rightarrow c^2=a^2+b^2=5$.
La costante dell'iperbole è $2b=2$.
I fuochi hanno coordinate $(0, 3-\sqrt{5});\ (0, 3+\sqrt{5})$ e i vertici sono $(0, 2); (0, 4)$.

ESEMPI DI ESERCIZI SULL'IPERBOLE TRASLATA

1) *Scrivi l'equazione del LUOGO dei punti* $\mathrm{P}(x,\ y)$ *del piano cartesiano per i quali è costante, e unitaria, la differenza delle distanze dai due punti* $\mathrm{A}(-2,\ 5)$ *e* $\mathrm{B}(4,\ 5)$.
Si tratta evidentemente di una iperbole; determina il centro, i vertici, gli asintoti, l'eccentricità della curva.

1° MODO

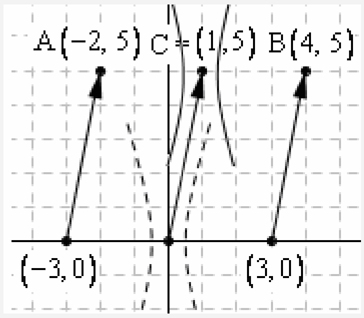
I due fuochi sono in orizzontale, hanno distanza 6, sono simmetrici rispetto al punto $(1,\ 5)$;
possiamo allora pensare di ottenere la nostra iperbole traslando a destra di 1 e in alto di 5
l'iperbole di fuochi orizzontali $(\pm c, 0) = (\pm 3, 0)$ e costante $2k = 2a = 1$.

Avremo dunque $c = 3\ (c^2 = 9)$, $a = \frac{1}{2}\left(a^2 = \frac{1}{4}\right)$ da cui subito $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - \frac{1}{4} = \frac{35}{4}$.

L'equazione dell'iperbole canonica da cui ricaveremo per traslazione la "nostra" è dunque $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{35}{4}} = 1$.

L'iperbole richiesta è in definitiva

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{(y-5)^2}{\frac{35}{4}} = 1}$$



Il suo centro è $\boxed{(1,\ 5)}$;

i vertici dell'iperbole canonica corrispondente sono $\left(\pm\frac{1}{2},\ 0\right)$

quindi i vertici della "nostra" saranno $\left(\pm\frac{1}{2} + 1,\ 5\right)$ ossia $\boxed{\left(\frac{1}{2},\ 5\right)}$ e $\boxed{\left(\frac{3}{2},\ 5\right)}$.

Gli asintoti dell'iperbole canonica corrispondente sono $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{\sqrt{35}/2}{1/2}x = \pm x\sqrt{35}$

quindi gli asintoti della "nostra" iperbole saranno $\boxed{y - 5 = \pm\sqrt{35}(x-1)}$

L'eccentricità, per entrambe le iperboli, è $\boxed{e = \frac{c}{a} = \frac{3}{1/2} = 6}$

2° MODO

Possiamo pensare di trasferirci, provvisoriamente,
nel riferimento cartesiano $\mathrm{O'}XY$ rispetto alla quale la "nostra" iperbole è in posizione canonica,
scriverne l'equazione e infine ritornare al sistema di riferimento $\mathrm{O}xy$ di partenza.

In $\mathrm{O'}XY$ le coordinate dei fuochi sono

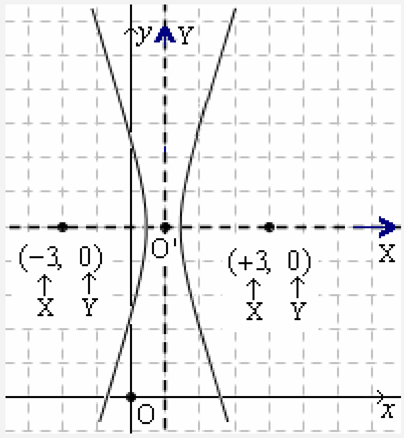
$$\underset{\mathrm{X}}{\underset{\uparrow}{(-3,}}\ \underset{\mathrm{Y}}{\underset{\uparrow}{0)}}\ \text{ e }\ \underset{\mathrm{X}}{\underset{\uparrow}{(+3,}}\ \underset{\mathrm{Y}}{\underset{\uparrow}{0)}}$$

per cui è $c = 3$ e l'equazione, tenuto conto che

$$2k = 1 = 2a \ \rightarrow\ a = \frac{1}{2},\ a^2 = \frac{1}{4}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \ \rightarrow\ b^2 = c^2 - a^2 = 9 - \frac{1}{4} = \frac{35}{4},$$

sarà $\boxed{\frac{X^2}{\frac{1}{4}} - \frac{Y^2}{\frac{35}{4}} = 1}$



Ora, le equazioni del cambiamento di riferimento sono $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 5 \end{cases}$

per cui avremo in definitiva $\boxed{\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{(y-5)^2}{\frac{35}{4}} = 1}$

3° MODO

Più laborioso sarebbe stato procedere scrivendo direttamente l'equazione del luogo geometrico …

$\mathrm{P}(x,\, y)\quad \mathrm{A}(-2,\, 5)\quad \mathrm{B}(4,\, 5)$

$$\left|\sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}\right|=1$$

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=\pm 1$$

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}=\pm 1+\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$$

$$(x+2)^2+\cancel{(y-5)^2}=1+(x-4)^2+\cancel{(y-5)^2}\pm 2\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$$

$$\cancel{x^2}+4x+4=1+\cancel{x^2}-8x+16\pm 2\sqrt{x^2-8x+16+y^2-10y+25}$$

$$\pm 2\sqrt{x^2-8x+y^2-10y+41}=13-12x$$

$$4\left(x^2-8x+y^2-10y+41\right)=(13-12x)^2$$

$$4x^2-32x+4y^2-40y+164=169-312x+144x^2$$

$$140x^2-280x-4y^2+40y+5=0$$

$$140\left(x^2-2x\right)-4\left(y^2-10y\right)+5=0$$

$$140\left(x^2-2x+1\right)-140-4\left(y^2-10y+25\right)+100+5=0$$

$$140(x-1)^2-4(y-5)^2-35=0$$

$$140(x-1)^2-4(y-5)^2=35$$

$$\frac{\overset{4}{\cancel{140}}(x-1)^2}{\cancel{35}}-\frac{4(y-5)^2}{35}=1$$

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{(y-5)^2}{\frac{35}{4}}=1}$$

2) *Se si sottopone l'iperbole* γ *di equazione* $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$
alla traslazione di vettore $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}$ *, essendo* $\vec{i},\ \vec{j}$ *i versori degli assi cartesiani, qual è l'equazione della curva così ottenuta?*

La traslazione considerata ha equazioni $\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y-2 \end{cases}$ e, come è noto,

per scrivere l'equazione della curva immagine occorre
1) invertire le equazioni della trasformazione
2) sostituire nell'equazione della curva
3) sopprimere gli apici.

Perciò:

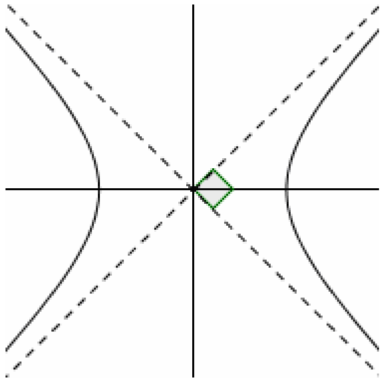
$$\begin{cases} x=x'-3 \\ y=y'+2 \end{cases}\qquad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1\ \to\ \frac{(x'-3)^2}{4}-\frac{(y'+2)^2}{3}=1\ \to\ \underbrace{\boxed{\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{3}=1}}_{y',\ immagine\ di\ \gamma}$$

D'altronde, si poteva giungere all'equazione nel riquadro anche più rapidamente,
se si teneva presente che una traslazione di vettore $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}$
è una traslazione a destra di 3 unità e in basso di 2 unità, per cui
(effetto "bastian contrario": ce ne siamo occupati quando abbiamo parlato di "manipolazioni di grafici")
si può ottenere semplicemente sostituendo, nell'equazione della curva,
$x-3$ al posto di x e $y+2$ al posto di y.

Ancora: la traslazione in esame porta l'origine $\mathrm{O}(0,0)$, che è il centro dell'iperbole γ, nel punto $(3,-2)$, che sarà il centro dell'iperbole immagine γ' … da cui *immediatamente* l'equazione di quest'ultima.

IPERBOLE EQUILATERA

Un'iperbole si dice "equilatera" quando i suoi asintoti sono perpendicolari fra loro.
Dato che un'iperbole è individuata dalla sua costante $2k$ e dalla sua distanza focale $2c$, la perpendicolarità degli asintoti dipenderà dal verificarsi di un'opportuna relazione fra k e c.
Ci domandiamo quale sia tale relazione.



Per rispondere, potremmo studiare la nostra iperbole pensandola collocata in un riferimento cartesiano, rispetto al quale la sua posizione sia "canonica".
Supponiamo inoltre, per maggiore consuetudine, che i fuochi siano in orizzontale.

In tal caso l'equazione è $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Ma noi sappiamo che gli asintoti hanno equazioni $y=\pm\frac{b}{a}x$;

pertanto essi saranno perpendicolari quando il coefficiente angolare $\frac{b}{a}$

sarà tale da determinare un angolo di 45° con l'asse x: $\frac{b}{a}=1,\ b=a$.

Abbiamo così scoperto che nel caso di un'iperbole canonica, la condizione affinché sia equilatera è espressa da $b=a$ (è evidente che lo stesso vale pure per l'iperbole traslata).
Essendo poi $c^2=a^2+b^2$, si ha che tale condizione $b=a$ equivale alla condizione $c^2=2a^2$ ossia $c=a\sqrt{2}$.
Questi risultati si estendono anche al caso dei fuochi in verticale, essendo anche qui $\pm\frac{b}{a}$ i coefficienti angolari degli asintoti.

Un'iperbole canonica $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$ è "equilatera" (cioè: ha gli asintoti perpendicolari)
se e solo se $b=a$ o, equivalentemente, $c=a\sqrt{2}\ \left(=b\sqrt{2}\right)$;
in altre parole, quando la sua equazione si presenta sotto la forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=\pm1 \quad \left(x^2-y^2=\pm a^2\right)$

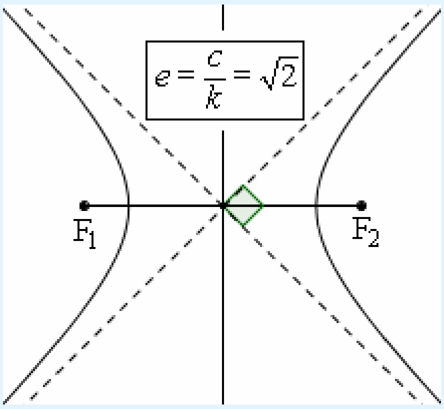
Sappiamo che la costante dell'iperbole, ossia la differenza costante $2k$ di cui parla la definizione, vale $2a$ per l'iperbole canonica coi fuochi in orizzontale, $2b$ per l'iperbole canonica coi fuochi in verticale.
Allora la condizione $b=a$, equivalente a $c=a\sqrt{2}$, equivale pure a $c=k\sqrt{2}$.
E questa condizione prescinde dal fatto di pensare o meno la curva nell'ambito di un riferimento cartesiano.

In definitiva, abbiamo scoperto che

un'iperbole, considerata indipendentemente dal fatto di essere inserita o meno in un riferimento cartesiano, è equilatera se e solo se fra la sua semidistanza focale c e la sua "semicostante" k sussiste la relazione

$\boxed{c=k\sqrt{2}}$ **; il che si verifica se e solo se risulta** $\boxed{e=\frac{c}{k}=\sqrt{2}}$

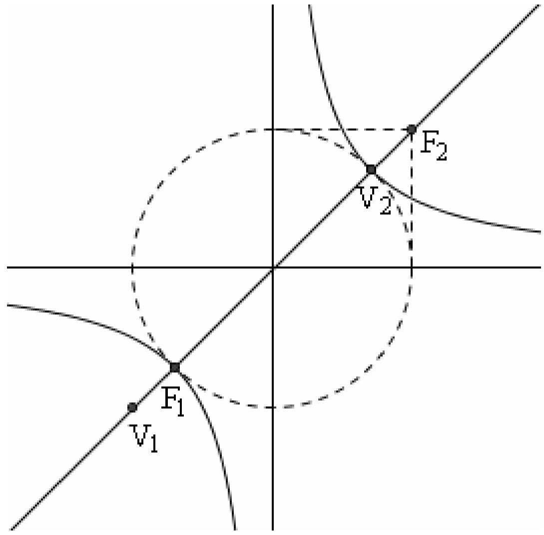
Insomma, la perpendicolarità degli asintoti si ha quando il valore dell'eccentricità è $\sqrt{2}$.



IPERBOLE EQUILATERA RIFERITA AI SUOI ASINTOTI

Dunque un'iperbole si dice "equilatera"
se e solo se i suoi asintoti sono perpendicolari,
il che avviene se e solo se fra la semicostante k dell'iperbole
e la sua semidistanza focale c sussiste la relazione $c = k\sqrt{2}$.

**Se gli asintoti sono perpendicolari fra loro,
potremmo approfittarne per scegliere gli asintoti stessi
come assi del riferimento cartesiano,
nel quale studiare l'iperbole.**



Che equazione assumerebbe la curva in questo caso?

E' molto facile rispondere.

I fuochi e i vertici starebbero
sulla bisettrice del primo e terzo quadrante,
oppure, in alternativa,
sulla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

- Supponiamo dapprima che i fuochi stiano sulla $y = x$.
  Allora, affinché si possa indicare sempre con c la semidistanza focale, assegneremo ai fuochi coordinate
  $\left(\frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{c}{\sqrt{2}}\right)$
  Traducendo in coordinate la condizione
  $$\left|\mathrm{PF}_1 - \mathrm{PF}_2\right| = 2k = 2 \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{c}{\cancel{\sqrt{2}}} = c\sqrt{2},$$
  otterremo, fatti i vari calcoli, l'equazione
  $$xy = \frac{c^2}{4}.$$
  Ponendo a questo punto $\frac{c^2}{4} = p$, l'equazione assumerà la forma
  $$xy = p \quad (p > 0).$$

- Se invece i fuochi stanno sulla $y = -x$, avremo
  $$\mathrm{F}_{1,2} = \left(\pm\frac{c}{\sqrt{2}}, \mp\frac{c}{\sqrt{2}}\right)$$
  e, fatti i calcoli, perverremo all'equazione
  $$xy = -\frac{c^2}{4};$$
  dopodiché, posto ancora $\frac{c^2}{4} = p$, otterremo
  $$xy = -p \quad (p > 0)$$

In definitiva:

L'equazione di un'iperbole equilatera (= con asintoti perpendicolari), riferita ai suoi asintoti, ossia inserita in un riferimento cartesiano i cui assi coincidano con gli asintoti dell'iperbole stessa, è della forma
$$\boldsymbol{xy = h}$$
- Nel caso $h > 0$, la curva è contenuta nel 1° e 3° quadrante;
- Nel caso $h < 0$, la curva è contenuta nel 2° e 4° quadrante.

Osservando che $\boldsymbol{xy = h}$ può essere scritta come $\boldsymbol{y = \frac{h}{x}}$,

**si vede che la curva risulta essere il grafico della
FUNZIONE DELLA PROPORZIONALITA' INVERSA.**

ESERCIZIO: E' data la curva di equazione: $y = -\frac{6}{x}$.

a) Disegnala b) Trovane vertici e fuochi.

LA FUNZIONE OMOGRAFICA

Viene così chiamata una funzione della forma $\boxed{y=\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ **,**

purché il suo grafico non si riduca a una retta; purché, quindi:

- sia $\boxed{c \neq 0}$;
- sia $\boxed{ad-bc \neq 0}$; infatti, se la quantità $ad-bc$ è nulla, allora (vedi NOTA) il grafico degenera nuovamente in una retta (precisamente, in una retta "col buco").

NOTA

Supponiamo che nella funzione $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (già stiamo supponendo $c \neq 0$) si abbia $ad-bc=0$.

Allora è $ad=bc$.

Ma il verificarsi della condizione $ad=bc$ implica la possibilità di semplificare la funzione. Infatti:

- Se d è diverso da zero, allora vale la proporzione $a:c=b:d$
  e perciò esiste una costante λ tale che $a=\lambda c \wedge b=\lambda d$.
  Di conseguenza la frazione $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ è semplificabile:
  $$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\lambda cx+\lambda d}{cx+d}=\frac{\lambda(cx+d)}{cx+d}=\lambda \quad \left(\text{con la condizione } cx+d \neq 0, \text{ cioè } x \neq -\frac{d}{c}\right).$$
  La funzione considerata rappresenta una "retta con buco".
- Se $d=0$, dovrà essere $bc=0$ e quindi, essendo $c \neq 0$, ne risulterà $b=0$: dunque la frazione assumerà la forma $\dfrac{ax}{cx}$ cioè si avrà $y=\dfrac{ax}{cx}=\dfrac{a}{c}$ (*con la condizione* $x \neq 0$). Retta con buco.

Il dominio (= l'insieme dei valori di *x* per cui esiste il corrispondente valore di *y*) di una funzione omografica NON è tutto $\mathbb{R}$:

infatti, per la presenza del denominatore $cx+d$, la *y* è calcolabile soltanto se è $cx+d \neq 0$ $\left(x \neq -\dfrac{d}{c}\right)$.

Quando prendiamo *x* molto vicino al valore $-\dfrac{d}{c}$, il denominatore della frazione è molto vicino a zero,

mentre il numeratore assume un valore molto vicino ad $a \cdot \left(-\dfrac{d}{c}\right)+b=\dfrac{-ad+bc}{c}=-\dfrac{ad-bc}{c} \neq 0$.

Ma una frazione in cui il denominatore è piccolissimo rispetto al numeratore, ha un valore grandissimo:

ad esempio, $\dfrac{3}{0,000001}=1000000$.

Possiamo sintetizzare tutto il discorso nella scrittura $\boxed{\lim\limits_{x \to -\frac{d}{c}} \dfrac{ax+b}{cx+d}=\infty}$.

Pertanto **la retta** $\boxed{x=-\dfrac{d}{c}}$ **fa da "asintoto verticale" per la funzione.**

E' interessante anche il comportamento della *y* quando *x* si fa, in valore assoluto, grandissimo (tende a infinito):

è infatti $\boxed{\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{ax+b}{cx+d}=\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(a+\frac{b}{x}\right)}{\cancel{x}\left(c+\frac{d}{x}\right)}=\dfrac{a}{c}}$

(i fattori *x* si semplificano; le frazioni *b/x* e *d/x* tendono a 0 quando *x* tende a ∞)

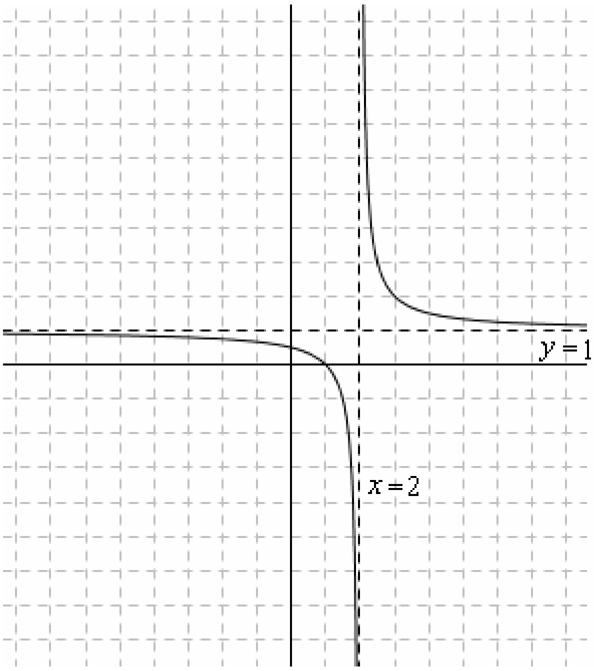
Quindi, quando *x* tende a $+\infty$, oppure a $-\infty$, la *y* corrispondente tende al valore $\dfrac{a}{c}$:

ciò significa che **la retta** $\boxed{y=\dfrac{a}{c}}$ **fa da "asintoto orizzontale" per la funzione.**

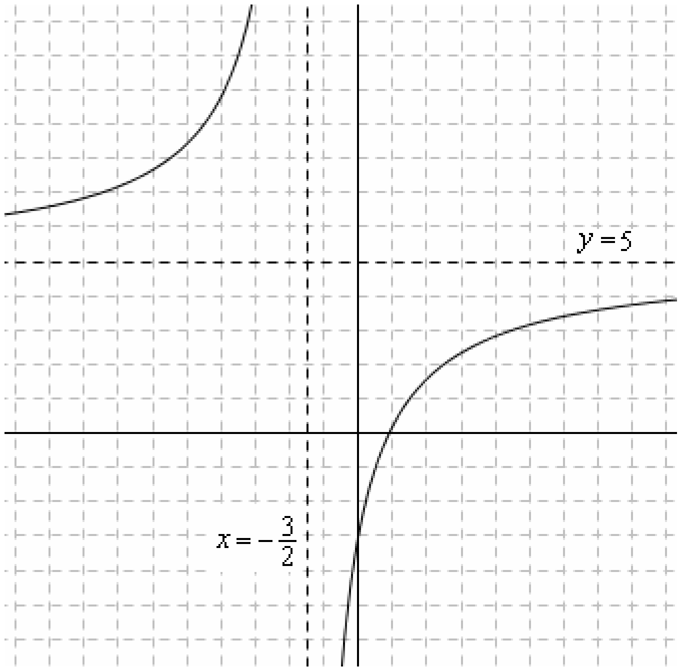
Riassumendo, la funzione omografica $\boxed{y=\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ ha sempre **due asintoti:**

- uno **verticale**, di equazione $\boxed{x=-\dfrac{d}{c}}$
- l'altro **orizzontale**, di equazione $\boxed{y=\dfrac{a}{c}}$

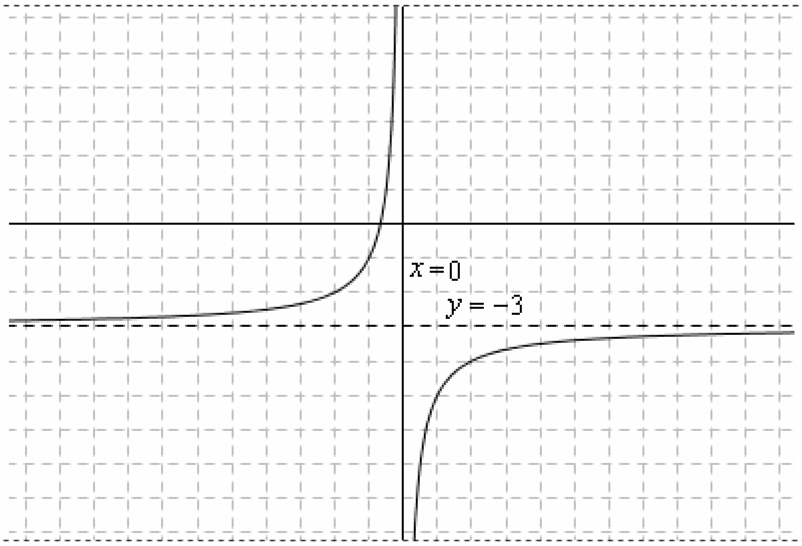
$y=\dfrac{x-1}{x-2}$



$y=\dfrac{10x-9}{2x+3}$



$y=\dfrac{-3x-2}{x}$



Le figure di questa pagina mostrano che il grafico di una funzione omografica presenta **un'evidente somiglianza con quello dell' "iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti"** $\boldsymbol{y=\dfrac{h}{x}}$.

In effetti, si può dimostrare che

ogni funzione omografica è interpretabile come un'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti, TRASLATA.

I vertici di questa iperbole si potranno facilmente determinare intersecando la curva con una bisettrice degli asintoti; i fuochi, ricordando che la loro distanza dal centro è uguale alla distanza dal centro dei vertici, moltiplicata per $\sqrt{2}$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA:
“OGNI FUNZIONE OMOGRAFICA È INTERPRETABILE COME UN’IPERBOLE EQUILATERA RIFERITA AI PROPRI ASINTOTI, TRASLATA”

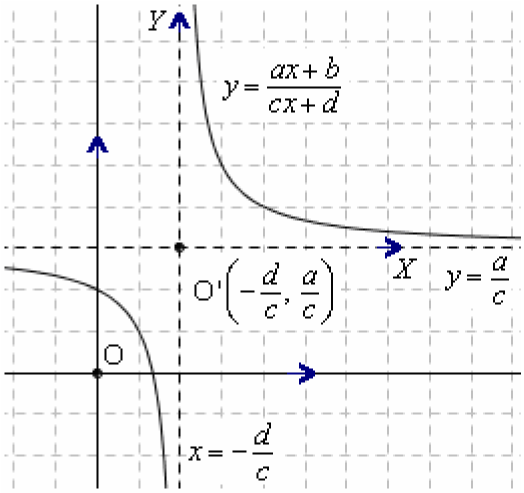
Consideriamo una funzione omografica $\boxed{y=\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Vogliamo far vedere che il suo grafico è ottenibile per traslazione a partire da una curva della forma $y=\dfrac{h}{x}$.

POSSIAMO PROCEDERE IN DUE MODI

- 1° MODO: MEDIANTE UNA TRASLAZIONE DEL RIFERIMENTO

Poniamoci nel riferimento cartesiano $XO'Y$,
traslato rispetto a quello iniziale,
avente l’origine nel punto $O'\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$.



Che equazione assumerà la nostra curva
in tale nuovo riferimento?

Le equazioni del cambiamento di riferimento sono:

$$\begin{cases} X=x+\dfrac{d}{c} \\ Y=y-\dfrac{a}{c}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=X-\dfrac{d}{c} \\ y=Y+\dfrac{a}{c}\end{cases}.$$

Dunque avremo:

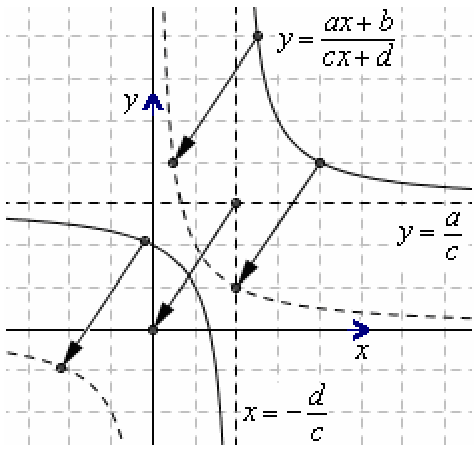
$$Y+\frac{a}{c}=\frac{a(X-d/c)+b}{c(X-d/c)+d};\quad Y=\frac{aX-ad/c+b}{cX\cancel{-d}\cancel{+d}}-\frac{a}{c};$$

$$Y=\frac{\cancel{aX}-ad/c+b\cancel{-aX}}{cX};\quad \boxed{Y=-\frac{\dfrac{ad-bc}{c^2}}{X}}$$

Quindi, in effetti, “vista” in un opportuno riferimento, traslato rispetto a quello iniziale,
la nostra curva risulta essere un’iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti
(equazione della forma: *ordinata = costante / ascissa*)

- 2° MODO: MEDIANTE UNA TRASLAZIONE DELLA CURVA

Sottoponiamo la curva $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$
alla traslazione di vettore $\vec{v}$ di componenti $\left(\dfrac{d}{c},-\dfrac{a}{c}\right)$.



Tale vettore di traslazione è stato, ovviamente, scelto in modo
che il punto di intersezione fra i due asintoti della funzione
omografica considerata, venga trasportato nell’origine.
Che equazione assumerà la curva dopo la traslazione?
Sappiamo che per traslare una curva di equazione $F(x,y)=0$,
basta considerare le componenti v_1, v_2 del vettore di traslazione
e sostituire, nell’equazione della curva,
$x-v_1$ al posto di *x* e $y-v_2$ al posto di *y*.

Ora, presa l’equazione $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, se andiamo a sostituire $x-\dfrac{d}{c}$ al posto di *x*, e $y+\dfrac{a}{c}$ al posto di *y*,

otterremo, dopo qualche passaggio, $\boxed{y=-\dfrac{\dfrac{ad-bc}{c^2}}{x}}$.

Di conseguenza, un’opportuna traslazione porta la curva a coincidere
con un’iperbole equilatera riferita ai propri asintoti (equazione della forma: *ordinata = costante / ascissa*).
Se ora noi immaginiamo di prendere questa iperbole e sottoporla alla traslazione di vettore opposto,
otterremo proprio la nostra curva iniziale; e ciò dimostra, appunto, che la curva da noi considerata
è un’iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, e poi traslata.

UNA PROVA FINALE SULL'ELLISSE E SULL'IPERBOLE

1) Scrivi l'equazione dell'ellisse canonica tale che la retta $5x+12y-60=0$ attraversi l'asse *x* in un suo fuoco e l'asse *y* in un suo vertice.

2) Scrivi l'equazione dell'ellisse canonica passante per $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e tale che il rettangolo ad essa circoscritto abbia area 8.

3) Scrivi le equazioni degli asintoti e determina l'eccentricità dell'iperbole di equazione $4x^2-y^2-16x+17=0$.

4) Scrivi l'equazione dell'iperbole canonica coi fuochi sull'asse *x*, avente asintoti di equazioni $y=\pm 2x$ e tale che l'area del triangolo individuato dagli asintoti e dalla tangente in un vertice valga 8.

5) Traccia il grafico della funzione
$$y=\frac{2x}{x+|x-1|}$$

6) Scrivi l'equazione del luogo dei punti per i quali la distanza dal punto $\mathrm{K}(-1,0)$ è la metà della distanza dalla retta $x=-4$, verificando che si tratta di un'ellisse con eccentricità ½ .

7) Verifica che la distanza di un fuoco dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, da un asintoto, vale *b*.

8) Verifica che il lato del quadrato coi lati paralleli agli assi e i quattro vertici sull'iperbole
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
vale
$$\frac{2ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$$
(supponi $b>a$, altrimenti il quadrato in questione non esisterebbe)

9) Calcola l'area del triangolo che la retta tangente alla curva $xy=-6$ nel suo punto di ascissa 2, determina con gli assi cartesiani.

9') Generalizzazione:
calcola l'area del triangolo che la retta tangente alla curva $xy=k$ nel suo generico punto di coordinate $(t,...)$ determina con gli assi cartesiani: troverai un valore costante, indipendente da *t*.

10) Giustifica la seguente affermazione:
"Dati su di un piano un punto fissato A e una circonferenza fissata γ, alla quale A sia esterno, il luogo dei centri P delle circonferenze passanti per A e tangenti a γ è un'iperbole".

SOLUZIONI

1) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$

2) $9x^2+4y^2=12$ oppure $x^2+4y^2=4$

3) $y=\pm 2x\mp 4$; $e=\sqrt{5}/2$

4) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$

6) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

9) $S=12$ 9') $S=2|k|$

10) Detto C il centro della circonferenza γ, T il punto di tangenza, si ha:
Se $\mathrm{PC}>\mathrm{PA}$: $\mathrm{PC}-\mathrm{PA}=(\mathrm{PT}+\mathrm{TC})-\mathrm{PA}=\mathrm{PT}+\mathrm{TC}-\mathrm{PT}=\mathrm{TC}=r=COSTANTE$
Se $\mathrm{PA}>\mathrm{PC}$: $\mathrm{PA}-\mathrm{PC}=\mathrm{PA}-(\mathrm{PT}-\mathrm{CT})=\mathrm{PT}-\mathrm{PT}+\mathrm{CT}=\mathrm{CT}=r=COSTANTE$

32. ESERCIZI SULL'IPERBOLE

A partire dall'equazione di un'iperbole

- ♪ *stabilisci quanto valgono*
  - I. *le coordinate dei vertici e dei fuochi*
  - II. *la costante (differenza costante delle distanze di un punto dai fuochi)* $2k$
  - III. *le equazioni degli asintoti*
  - IV. *l'eccentricità*
- ♫ *disegna la curva*

1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 3) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$ 4) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$

5) $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 6) $\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{4}y^2=1$ 7) $\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{9}y^2=\frac{1}{25}$ 8) $x^2-2y^2+2=0$

9) $x^2-y^2=1$ 10) $y^2-x^2=1$ 11) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ 12) $y^2=x^2+25$

13) $xy=1$ 14) $xy=-6$ 15) $xy=12$

Scrivi l'equazione di un'iperbole conoscendone i fuochi e la costante (= differenza costante) 2k.

16) $\mathrm{F}_{1,2}(\pm 4,\, 0);\ 2k=6$ 17) $\mathrm{F}_{1,2}(0,\, \pm 2);\ 2k=2$

Scrivi l'equazione di un'iperbole conoscendone i vertici e i fuochi. Determinarne la costante e gli asintoti.

18) $\mathrm{V}_{1,2}(\pm 5,\, 0);\ \mathrm{F}_{1,2}(\pm 13,\, 0)$ 19) $\mathrm{V}_{1,2}(0,\, \pm 2\sqrt{3});\ \mathrm{F}_{1,2}(0,\, \pm 4)$

Scrivi l'equazione di un'iperbole conoscendone i vertici e gli asintoti.

20) $\mathrm{V}_{1,2}(\pm 2,\, 0);\ y=\pm 3x$ 21) $\mathrm{V}_{1,2}(\pm 2\sqrt{2},\, 0);\ y=\pm\frac{1}{4}x$ 22) $\mathrm{V}_{1,2}(0, \pm 3);\ y=\pm\frac{3}{10}x$

Scrivi l'equazione di un'iperbole conoscendone i fuochi e gli asintoti.

23) $\mathrm{F}_{1,2}(\pm 25,\, 0);\ y=\pm\frac{24}{7}x$ 24) $\mathrm{F}_{1,2}(\pm 5,\, 0);\ y=\pm 2x\sqrt{6}$ 25) $\mathrm{F}_{1,2}\left(0,\, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right);\ y=\pm 2x$

Scrivi l'equazione di un'iperbole conoscendone i vertici e sapendo che passa per un punto P assegnato.

26) $\mathrm{V}_{1,2}(\pm 1,\, 0);\ \mathrm{P}\left(\frac{5}{4},\, -\frac{3}{4}\right)$ 27) $\mathrm{V}_{1,2}(\pm 4,\, 0);\ \mathrm{P}\left(5,\, \frac{9}{4}\right)$ 28) $\mathrm{V}_{1,2}(0,\, \pm 4);\ \mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\, 2\sqrt{5}\right)$

Scrivi l'equazione di un'iperbole conoscendone i fuochi e sapendo che passa per un punto P assegnato.

29) $\mathrm{F}_{1,2}(\pm 2,\, 0);\ \mathrm{P}(-2,\, 3)$ 30) $\mathrm{F}_{1,2}(0,\, \pm 2\sqrt{2});\ \mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\, \frac{5}{2}\right)$ 31) $\mathrm{F}_{1,2}(\pm 5,\, 0);\ \mathrm{P}\left(\sqrt{10},\, \frac{4}{3}\right)$

Scrivi l'equazione di un'iperbole canonica coi fuochi sull'asse x sapendo che:

32) ha come asintoti le rette $y=\pm 2x$ e passa per il punto $\mathrm{P}(2,\, 2\sqrt{3})$

33) ha come asintoti le rette $y=\pm\frac{1}{2}x$ e passa per il punto $\mathrm{P}(-2\sqrt{5},\, 1)$

34) ha eccentricità $e=\sqrt{2}$ e passa per $\mathrm{P}(10,\, 6)$ 35) ha eccentricità $e=4/3$ e passa per $\mathrm{P}(6,\, \sqrt{21})$

36) passa per la seguente coppia di punti: $(6,\, 4);\ (3\sqrt{2},\, 2)$

37) passa per la seguente coppia di punti: $(\sqrt{3},\, \sqrt{6});\ (-2,\, 3)$

38) passa per la seguente coppia di punti: $\left(-\frac{5}{4},\, -\frac{3}{4}\right);\ \left(\frac{13}{12},\, \frac{5}{12}\right)$

39) ha come asintoti le rette $y=\pm 2x$ e ha eccentricità $\sqrt{5}$

40) ha come asintoti le rette $y=\pm x\sqrt{2}$ e ha eccentricità $\sqrt{3}$

Scrivi l'equazione di un'iperbole canonica coi fuochi sull'asse y sapendo che:

41) ha come asintoti le rette $y = \pm x\sqrt{2}$ e passa per il punto $\mathrm{P}(1, 2)$

42) ha come asintoti le rette $y = \pm\frac{3}{4}x$ e passa per il punto $\mathrm{P}\left(8, 3\sqrt{5}\right)$

43) ha eccentricità $e = 2$ e passa per $\mathrm{P}\left(\sqrt{6}, \sqrt{3}\right)$

44) ha eccentricità $e = 5/4$ e passa per $\mathrm{P}\left(2, \frac{10}{3}\right)$

45) passa per la seguente coppia di punti: $(3, 4)$; $\left(2\sqrt{3}, 2\sqrt{5}\right)$

46) passa per la seguente coppia di punti: $(8, 10)$; $\left(3, 3\sqrt{5}\right)$

47) ha come asintoti le rette $y = \pm\frac{4}{3}x$ e ha eccentricità $\frac{5}{4}$

48) ha come asintoti le rette $y = \pm x\sqrt{2}$ e ha eccentricità $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Riscrivi le seguenti equazioni, in modo che il secondo membro sia $+1$ o -1; disegna la curva:

49) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ 50) $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$ 51) $y = \sqrt{3x^2 + 1}$ 52) $y = \frac{1}{2}\sqrt{9x^2 + 1}$, *con* $y \geq 0$

Considera la curva associata all'equazione data, e determina i valori del parametro per i quali

I) *rappresenta un'iperbole*
II) *rappresenta un'iperbole coi fuochi sull'asse x*
III) *rappresenta un'iperbole coi fuochi sull'asse y*

53) $\frac{x^2}{p-3} + \frac{y^2}{2p-1} = 1$ 54) $\frac{x^2}{4-p} + \frac{y^2}{p-1} = 1$ 55) $\frac{x^2}{p^2-9} + \frac{y^2}{p} = 1$

Scrivi l'equazione della retta tangente ad un'iperbole in un suo punto.

56) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ $\mathrm{P}\left(-5, \frac{9}{4}\right)$ 57) $x^2 - y^2 = 1$ $\mathrm{P}\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$ 58) $xy = 6$ $\mathrm{P}(2, 3)$ 59) $xy = 6$ $\mathrm{P}(-1, -6)$

Scrivi le equazioni delle rette tangenti ad un'iperbole assegnata condotte da un dato punto esterno.

60) $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ (3,2) 61) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ (2,1) 62) $x^2 - y^2 = 9$ (9,9)

Scrivi l'equazione di un'iperbole canonica, coi fuochi sull'asse x,
di cui si conoscono una retta tangente, e una seconda condizione.

63) Tangenza con la retta $t: x - y = 2$; passaggio per $\mathrm{P}(6, -4)$

64) Tangenza con la retta $\mathrm{t}: y = x - 2$; asintoti $y = \pm\frac{1}{3}x$

65) Tangenza con la retta $t: y = 2x - \sqrt{2}$; distanza fra i vertici uguale a 2

66) Tangenza con la retta $t: y = 2x - 1$; eccentricità uguale a 2

67) Tangenza con la retta $t: y = \frac{5x - 16}{3}$ nel punto di coordinate (5, 3)

Scrivi l'equazione di un'iperbole canonica, coi fuochi sull'asse y,
di cui si conoscono una retta tangente, e una seconda condizione.

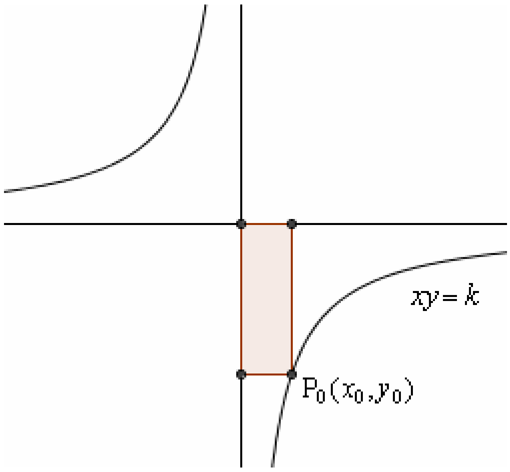
68) Tangenza con la retta $t: y = x + 1$; passaggio per $\mathrm{P}\left(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{5}\right)$

69) Tangenza con la retta $t: 3x - 5y - 4 = 0$; asintoti $y = \pm x$

70) Tangenza con la retta $t: y = 2x + 2$; distanza fra i fuochi uguale a 6

71) Tangenza con la retta $t: 2x + 3y = 1$ nel punto $(-1, 1)$

72)
Considera l'iperbole di equazione $xy = -6$
e dimostra che l'area del rettangolo
che le perpendicolari agli assi cartesiani
per un suo punto qualsiasi $P_0(x_0, y_0)$
formano con gli assi cartesiani stessi
si mantiene costante,
dovunque si prenda, sull'iperbole, il punto P_0.



72')
Considera, in generale, un'iperbole di equazione $xy = k$
e dimostra che le perpendicolari agli assi cartesiani
per un suo punto qualsiasi $P_0(x_0, y_0)$
formano con gli assi cartesiani stessi
si mantiene costante,
dovunque si prenda, sull'iperbole, il punto P_0.

73)
Considera l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e dimostra che
il prodotto delle distanze di un suo punto qualsiasi $P_0(x_0, y_0)$ dai due asintoti si mantiene costante
(troverai che questo prodotto costante vale $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$).

73')
Secondo te, l'esercizio precedente dimostra che in *QUALSIASI* iperbole, anche al di fuori di un riferimento cartesiano, è costante il prodotto delle distanze di un punto della curva dai suoi asintoti?

74)
Considera l'iperbole di equaz. $xy = -6$, scrivi l'equazione della retta ad essa tangente nel suo punto di ascissa 2 e dimostra che tale tangente individua, insieme agli asintoti, un triangolo di area 12.
Verifica che lo stesso avviene per il punto dell'iperbole che ha ascissa -6.

74')
Considera l'iperbole di equazione $xy = -6$ e dimostra che la tangente ad essa in un suo punto (x_0, y_0) individua, insieme agli asintoti, un triangolo la cui area si mantiene costantemente uguale a 12.

74'')
Considera l'iperbole di equazione $xy = k$ e dimostra che la tangente ad essa in un suo punto (x_0, y_0) individua, insieme agli asintoti, un triangolo la cui area si mantiene costantemente uguale a $2|k|$.

75)
Considera l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e dimostra che
la tangente ad essa in un suo punto individua, insieme agli asintoti,
un triangolo la cui area si mantiene costante, verificando che tale area costante vale ab.

76)
Considera l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
e dimostra che, tracciate per un suo punto qualunque le parallele agli asintoti
fino ad incontrare gli asintoti stessi, l'area del quadrilatero così ottenuto si mantiene costante
(*Calcoli laboriosi, ma impostandoli nel migliore dei modi …*
Ti converrà decisamente tracciare una figura indicativa! Troverai che questa costante vale $\frac{ab}{2}$).

77)
Data un'iperbole canonica coi fuochi sull'asse *x*,
stabilisci quanto misura il lato di un quadrato che abbia i vertici sull'iperbole stessa.
In certi casi però tale quadrato … non esiste. Quando?

78)

Considera l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$

e dimostra che sulla tangente ad essa nel suo punto A di ascissa -6, appartenente al 2° quadrante,
gli asintoti staccano un segmento il cui punto medio è proprio A.
Verifica che lo stesso avviene anche per il punto B, situato nel 1° quadrante e avente ordinata 2.

78')

Considera l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

e dimostra che sulla tangente ad essa in un suo punto $\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$
gli asintoti staccano un segmento il cui punto medio è proprio P_0.

79)

Dimostra che, data una circonferenza γ di centro A e un punto B ad essa esterno,
il luogo dei punti equidistanti da γ e da B è un ramo di iperbole.
Quanto vale la costante (= differenza costante) di questa iperbole? Dove sono i suoi fuochi?

80)

Dimostra che, date due circonferenze γ e γ' di centri O e O' e raggi r ed r' una esterna all'altra,
il luogo dei centri C delle circonferenze che sono tangenti sia a γ che a γ' è un'iperbole.
Dove sono i fuochi di questa iperbole?
Quanto vale la sua costante (= differenza costante delle distanze di un punto qualsiasi dai fuochi)?

81)

L'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ha, com'è noto,

fuochi di coordinate $\mathrm{F}_1=(-c, 0)=\left(-\sqrt{a^2+b^2}, 0\right)$; $\mathrm{F}_2=(c, 0)=\left(\sqrt{a^2+b^2}, 0\right)$

ed eccentricità $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

Dimostra ora che, dati tre numeri positivi $a, b, c=\sqrt{a^2+b^2}$,

e considerati il punto $\mathrm{F}_2(c, 0)$ e la retta $d_2: x=\frac{a^2}{c}$,

anche il luogo dei punti P tali che si abbia $\frac{\mathrm{PF}_2}{\mathrm{PH}}=\frac{c}{a}$, dove PH indica la distanza di P dalla retta d_2,

ha per equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Allo stesso modo, si potrebbe provare che si perviene all'equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

pure ricercando il luogo dei punti per i quali è uguale a $\frac{c}{a}$

il rapporto delle distanze dal punto $\mathrm{F}_1(-c, 0)$ *e dalla retta* $d_1: x=-\frac{a^2}{c}$.

In definitiva, da tutto ciò emerge che l'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *può essere pensata come luogo dei punti per i quali è costante il rapporto delle distanze da un "fuoco" e da una "direttrice", ed in tal caso ha come "direttrici" le due rette* $x=\pm\frac{a^2}{c}$ *mentre il rapporto costante è uguale a* $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ *).*

82)

Stabilisci da quali punti è formato il grafico delle curve seguenti:

a) $9x^2-y^2=0$ b) $9x^2+y^2=0$ c) $9xy=0$ d) $9x^2+y^2+1=0$ e) $|y|=|x|$ f) $(9x-y)^2=0$

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SULL'IPERBOLE

1) $V_{1,2}(\pm 3,0)\ \ F_{1,2}(\pm 5,\,0);\ \ 2k=6;\ \ y=\pm\frac{4}{3}x;\ \ e=\frac{5}{3}$

2) $V_{1,2}(\pm 4,0)\ \ F_{1,2}(\pm 5,\,0);\ \ 2k=8;\ \ y=\pm\frac{3}{4}x;\ \ e=\frac{5}{4}$

3) $V_{1,2}(0,\,\pm 3)\ \ F_{1,2}(0,\,\pm 5);\ \ 2k=6;\ \ y=\pm\frac{3}{4}x;\ \ e=\frac{5}{3}$

4) $V_{1,2}(0,\,\pm 4)\ \ F_{1,2}(0,\,\pm 5);\ \ 2k=8;\ \ y=\pm\frac{4}{3}x;\ \ e=\frac{5}{4}$

5) $V_{1,2}(\pm 1,\,0)\ \ F_{1,2}(\pm\sqrt{5},\,0);\ \ 2k=2;\ \ y=\pm 2x;\ \ e=\sqrt{5}$

6) $V_{1,2}\left(\pm\frac{3}{2},\,0\right)\ \ F_{1,2}\left(\pm\frac{5}{2},\,0\right);\ \ 2k=3;\ \ y=\pm\frac{4}{3}x;\ \ e=\frac{5}{3}$

7) $V_{1,2}\left(\pm\frac{4}{5},\,0\right)\ \ F_{1,2}(\pm 1,\,0);\ \ 2k=\frac{8}{5};\ \ y=\pm\frac{3}{4}x;\ \ e=\frac{5}{4}$

8) $V_{1,2}(0,\,\pm 1)\ \ F_{1,2}(0,\,\pm\sqrt{3});\ \ 2k=2;\ \ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x;\ \ e=\sqrt{3}$

9) $V_{1,2}(\pm 1,\,0)\ \ F_{1,2}(\pm\sqrt{2},\,0);\ \ 2k=2;\ \ y=\pm x;\ \ e=\sqrt{2}$

10) $V_{1,2}(0,\,\pm 1)\ \ F_{1,2}(0,\,\pm\sqrt{2});\ \ 2k=2;\ \ y=\pm x;\ \ e=\sqrt{2}$

11) $V_{1,2}(\pm 2,\,0)\ \ F_{1,2}(\pm 2\sqrt{2},\,0);\ \ 2k=4;\ \ y=\pm x;\ \ e=\sqrt{2}$

12) $V_{1,2}(0,\,\pm 5)\ \ F_{1,2}(0,\,\pm 5\sqrt{2});\ \ 2k=10;\ \ y=\pm x;\ \ e=\sqrt{2}$

13) $V_1(-1,\,-1),\ V_2(1,\,1);\ F_1(-\sqrt{2},\,-\sqrt{2}),\ F_2(\sqrt{2},\,\sqrt{2});\ \ 2k=2\sqrt{2};\ \ \textit{asintoti}\ y=0,\ x=0;\ \ e=\sqrt{2}$

14) $V_1(-\sqrt{6},\,\sqrt{6}),\ V_2(\sqrt{6},\,-\sqrt{6});\ F_1(-2\sqrt{3},\,2\sqrt{3}),\ F_2(2\sqrt{3},\,-2\sqrt{3});\ \ 2k=4\sqrt{3};\ \ \textit{asintoti}\ y=0,\ x=0;\ \ e=\sqrt{2}$

15) $V_1(-2\sqrt{3},\,-2\sqrt{3}),\ V_2(2\sqrt{3},\,2\sqrt{3});\ F_1(-2\sqrt{6},\,-2\sqrt{6}),\ F_2(2\sqrt{6},\,2\sqrt{6});\ \ 2k=4\sqrt{6};\ \ \textit{asintoti}\ y=0,\ x=0;\ \ e=\sqrt{2}$

16) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ 17) $\frac{x^2}{3}-y^2=-1$

18) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1;\ \ 2k=10;\ \ y=\pm\frac{12}{5}x$ 19) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=-1;\ \ 2k=4\sqrt{3};\ \ y=\pm x\sqrt{3}$

20) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$ 21) $\frac{x^2}{8}-2y^2=1$ 22) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{9}=-1$

23) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{576}=1$ 24) $x^2-\frac{y^2}{24}=1$ 25) $4x^2-y^2=-1$

26) $x^2-y^2=1$ 27) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 28) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$

29) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 30) $x^2-y^2=-4$ 31) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

32) $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 33) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 34) $x^2-y^2=64$ 35) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$

36) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$ 37) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 38) $x^2-y^2=1$ 39) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ 40) $\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1$

41) $x^2-\frac{y^2}{2}=-1$ 42) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$ 43) $\frac{x^2}{3}-y^2=-1$ 44) $\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{4}=-1$

45) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=-1$ 46) $x^2-y^2=-36$ 47) $x^2-\frac{y^2}{\frac{16}{9}}=-1$ 48) $x^2-\frac{y^2}{2}=-1$

Poiché il risultato di una radice quadrata è sempre ≥ 0,
in tutti i casi l'equazione ottenuta andrà abbinata alla condizione $y \ge 0$.
Ciascuna delle curve in questione sarà la metà di una iperbole (un solo ramo oppure due "metà di un ramo")

49) $x^2 - y^2 = 1,\ con\ y \ge 0$ 50) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1,\ con\ y \ge 0$ 51) $3x^2 - y^2 = -1,\ con\ y \ge 0$ 52) $9x^2 - 4y^2 = -1,\ y \ge 0$

53) *Iperbole con* $\frac{1}{2} < p < 3$
In tal caso, l'iperbole ha sempre i fuochi sull'asse y

54) *Iperbole con* $p < 1 \vee p > 4$
L'iperbole ha i fuochi sull'asse x se $p < 1$, *sull'asse y se* $p > 4$

55) *Iperbole con* $p < -3 \vee 0 < p < 3$. *L'iperbole ha i fuochi sull'asse x se* $p < -3$, *sull'asse y se* $0 < p < 3$

56) $5x + 4y + 16 = 0$ 57) $5x - 3y = 4$ 58) $3x + 2y = 12$ 59) $6x + y + 12 = 0$

60) $y = x - 1,\quad y = \frac{5}{7}x - \frac{1}{7}$ 61) $y = x - 1,\quad x = 2$ 62) Soltanto una tangente: $y = \frac{5}{4}x - \frac{9}{4}$

63) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$ 64) $2x^2 - 18y^2 = 9$ 65) $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 66) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 67) $x^2 - y^2 = 16$

68) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = -1$ 69) $x^2 - y^2 = -1$ 70) $x^2 - \frac{y^2}{8} = -1$ 71) $2x^2 - 3y^2 = -1$

72) La base del rettangolo vale $|x_0|$ e l'altezza $|y_0|$, per cui l'area vale $|x_0| \cdot |y_0| = |x_0 y_0| = |-6| = 6 = costante.$

72') La base del rettangolo vale $|x_0|$ e l'altezza vale $|y_0|$, per cui l'area vale $|x_0| \cdot |y_0| = |x_0 y_0| = |k| = costante.$

73) Gli asintoti, com'è noto, hanno equazioni $y = \pm\frac{b}{a}x$ ossia, in forma implicita, $\pm bx - ay = 0$.

Le distanze del punto $P_0(x_0, y_0)$ dai due asintoti valgono $\frac{|\pm bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ e il loro prodotto è

$$\frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{|-bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|b^2 x_0{}^2 - a^2 y_0{}^2|}{a^2+b^2}.$$

Poiché però $P_0(x_0, y_0)$ appartiene all'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, si ha $\frac{x_0{}^2}{a^2} - \frac{y_0{}^2}{b^2} = 1$

quindi $b^2 x_0{}^2 - a^2 y_0{}^2 = a^2 b^2$ e perciò il prodotto delle distanze è uguale a $\frac{|a^2 b^2|}{a^2+b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}$.

73') Sì, perché presi su di un piano un riferimento cartesiano e una qualsivoglia iperbole, basta eventualmente sottoporre la curva ad un'opportuna traslazione e rotazione per portarla in posizione canonica coi fuochi sull'asse *x*; oppure, presa un'iperbole, basta, sul suo piano, scegliere un riferimento cartesiano nel quale l'iperbole sia in posizione canonica, coi fuochi sull'asse *x*.

77) *lato quadrato* $= \frac{2ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ (*se* $b > a$; *altrimenti il quadrato "inscritto" non esiste*)

79) I punti P equidistanti da γ e da B sono tali che $PA - PB = r = costante$ (r = *raggio di* γ)
La costante è dunque uguale al raggio di γ, i fuochi sono in A e in B.

80) I centri C delle circonferenze tangenti sia a γ che a γ' sono tali che
$CO - CO' = r - r'$ (*se* $r > r'$), $CO' - CO = r' - r$ (*se* $r' > r$)
Dunque i fuochi dell'iperbole sono O e O' e la costante è $|r - r'|$.

82) a) equivale a $(3x + y)(3x - y) = 0$ e dunque alla coppia di equazioni $3x + y = 0 \vee 3x - y = 0$. Il suo grafico è perciò formato da due rette incidenti: si tratta di una "iperbole degenere nei suoi asintoti".
b) è una conica degenere "di tipo ellittico", che si riduce a un punto solo (l'origine).
c) ha come grafico la coppia di rette $x = 0,\ y = 0$ (iperbole degenere nei suoi asintoti)
d) è il luogo vuoto
e) ha come grafico la coppia di rette $y = \pm x$ (iperbole degenere nei suoi asintoti).
f) si può pensare costituita dalla retta $9x - y = 0$ "contata due volte",
o, in altre parole, dalla coppia di rette sovrapposte $r_1: 9x - y = 0,\ r_2: 9x - y = 0$.
Questa conica è comunque considerata "di tipo parabolico" perché $\Delta = 0$ (vedi pag. 147)

ESERCIZI SULLA FUNZIONE OMOGRAFICA

Disegna la seguente funzione omografica, dopo averne determinato il centro.

1) $y=\dfrac{x-5}{x-2}$ 2) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ 3) $y=\dfrac{2x+7}{6x+3}$ 4) $y=-\dfrac{x}{x-4}$

5) $y=\dfrac{6x}{2x-4}$ 6) $y=\dfrac{4-x}{3-x}$ 7) $y=\dfrac{x}{2x+6}$ 8) $xy-x+y+3=0$

Disegna la seguente funzione omografica,
scrivendo anche le equazioni dei suoi asintoti e assi di simmetria,
e determinando inoltre le coordinate dei vertici e dei fuochi.

9) $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ 10) $y=\dfrac{2x}{x-3}$

11) $y=\dfrac{x}{2x-8}$ 12) $y=\dfrac{3-x}{x}$

13) $y=\dfrac{6}{5x-1}$ 14) $xy-4x-5y+20=0$

15) Determina i parametri a,b,c,d in modo che la funzione omografica $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$
abbia come asintoti le rette $x=-3,\ y=2$ e passi per il punto $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.
(si capisce che i 4 parametri a,b,c,d non sono determinati in modo unico,
bensì "a meno di una costante di proporzionalità"…)

16) Determina i parametri a,b,c,d in modo che la funzione omografica $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$
abbia per asintoto verticale la retta $x=1$ e intersechi gli assi cartesiani nei due punti $(0,-4)$ e $(4,0)$.

17) Scrivi l'equazione della funzione omografica passante per i tre punti $(1,3),(2,2),(-1,-1)$
e scrivi poi l'equazione della retta ad essa tangente nel punto $(1,3)$

Attenzione: se si vuole applicare la "regola degli sdoppiamenti",
occorre sempre preliminarmente portare l'equazione sotto la forma
$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$
… Altrimenti la regola "non funziona"!

18) Determina l'equazione di una funzione omografica che
abbia per centro il punto $(0,3)$ e sia tangente alla retta $y=6x-3$ nel punto $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

19) Determina l'equazione di una funzione omografica che abbia come asintoto orizzontale la retta $y=1$,
che intersechi l'asse delle y nel punto di ordinata -2, e l'asse delle x nel punto di ascissa 6.
Scrivi l'equazione della retta tangente alla curva nel suo punto di ascissa -6.

20) Determina l'equazione di una funzione omografica che abbia un vertice in $(1,5)$ e il centro di ascissa -1.
E' richiesta anche l'equazione della retta tangente nel vertice di cui sopra.

21) Scrivi l'equazione della funzione omografica i cui fuochi sono i punti di coordinate $F_1(2,-1)$ e $F_2(-2,-5)$

22) Scrivi l'equazione della funzione omografia tale che uno dei suoi vertici sia il punto $V_1(2,3)$
e che l'altro vertice, posto nel 3° quadrante, abbia distanza 5 dall'origine del sistema di rif. cartesiano.

Stabilisci per quali valori del parametro k
la seguente equazione NON rappresenta una funzione omografica
e dì, in questi casi, quale luogo geometrico esprime.

23) $y=\dfrac{(k+1)x+3}{kx+4}$ 24) $y=\dfrac{kx-6}{x+2}$ 25) $y=\dfrac{x+2}{kx+k+2}$ 26) $y=\dfrac{x-k}{kx-5x-14}$

RISPOSTE

1) $C(2,1)$ 2) $C(-1,2)$ 3) $C\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ 4) $C(4,-1)$ 5) $C(2,3)$ 6) $C(3,1)$ 7) $C\left(-3,\frac{1}{2}\right)$ 8) $C(-1,1)$

9) $\textit{asintoti}: x=-1,\ y=1;\ \ \textit{assi}: y=x+2,\ y=-x$
$V_1\left(-1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right)\quad V_2\left(-1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\right)$
$F_1\left(-1-\sqrt{6},1+\sqrt{6}\right)\quad F_2\left(-1+\sqrt{6},1-\sqrt{6}\right)$

10) $\textit{asintoti}: x=3,\ y=2;\ \ \textit{assi}: y=x-1,\ y=-x+5$
$V_1\left(3-\sqrt{6},\ 2-\sqrt{6}\right)\quad V_2\left(3+\sqrt{6},\ 2+\sqrt{6}\right)$
$F_1\left(3-2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3}\right)\quad F_2\left(3+2\sqrt{3},\ 2+2\sqrt{3}\right)$

11) $\textit{asintoti}: x=4,\ y=\frac{1}{2};\ \ \textit{assi}: y=x-\frac{7}{2},\ y=-x+\frac{9}{2}$
$V_1\left(4-\sqrt{2},\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)\quad V_2\left(4+\sqrt{2},\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)$
$F_1\left(2,-\frac{3}{2}\right)\quad F_2\left(6,\frac{5}{2}\right)$

12) $\textit{asintoti}: x=0,\ y=-1;\ \ \textit{assi}: y=x-1,\ y=-x-1$
$V_1\left(-\sqrt{3},\ -1-\sqrt{3}\right)\quad V_2\left(\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3}\right)$
$F_1\left(-\sqrt{6},\ -1-\sqrt{6}\right)\quad F_2\left(\sqrt{6},\ -1+\sqrt{6}\right)$

13) $\textit{asintoti}: x=\frac{1}{5},\ y=0;\ \ \textit{assi}: y=x-\frac{1}{5},\ y=-x+\frac{1}{5}$
$V_1\left(\frac{1}{5}-\frac{\sqrt{30}}{5},-\frac{\sqrt{30}}{5}\right)\quad V_2\left(\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{30}}{5},\frac{\sqrt{30}}{5}\right)$
$F_1\left(\frac{1}{5}-\frac{2\sqrt{15}}{5},-\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)\quad F_2\left(\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{15}}{5},\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$

14) $xy-4x-5y+20=0$
$(x-5)(y-4)=0$
E' una iperbole "degenere nei suoi asintoti", ossia che si riduce alla coppia di rette $x=5,\ y=4$

15) Si capisce che i 4 parametri a,b,c,d non sono determinati in modo unico, bensì "a meno di una costante di proporzionalità".
Difatti, se ad es. il valore di tutti e 4 venisse raddoppiato, la frazione a 2° membro resterebbe uguale a prima!

Si può impostare il sistema $\begin{cases}-\frac{d}{c}=-3\\ \frac{a}{c}=2\\ \frac{b}{d}=\frac{1}{2}\end{cases}$ che, avendo 4 incognite ma solo 3 equazioni,

è indeterminato con 1 grado di libertà (3 delle incognite potranno essere espresse in funzione della restante).

Si ha $\begin{cases}d=3c\\ a=2c\\ b=\frac{1}{2}d=\frac{3}{2}c\end{cases}$ dunque risolvono il sistema le quaterne della forma $\begin{cases}a=2c\\ b=\frac{3}{2}c\\ c\ \textit{qualsiasi}\ (\textit{purché} \neq 0)\\ d=3c\end{cases}$;

fra di esse, la quaterna $\begin{cases}c=2\\ a=4\\ b=3\\ d=6\end{cases}$. La funzione omografica richiesta si può scrivere, ad es., come $y=\frac{4x+3}{2x+6}$.

16) $y=\frac{4-x}{x-1}$ 17) $y=\frac{x+2}{x};\ y=-2x+5$ 18) $y=\frac{6x-3}{2x}$ 19) $y=\frac{x-6}{x+3};\ y=x+10$

20) $y=\frac{3x+7}{x+1};\ x+y=6$ 21) $y=\frac{-3x+2}{x};$ 22) $y=\frac{9}{x+1}$

23) Occorre individuare i valori di k per i quali

- si annulla il coefficiente di x a denominatore
- risulta $\frac{k+1}{k}=\frac{3}{4}$

Si ottiene così: $k=0$ (retta $y=\frac{x+3}{4}$); $k=-4$ (retta $y=\frac{3}{4}$, privata del punto $\left(1,\frac{3}{4}\right)$)

24) $k=-3$ (retta $y=-3$, privata del punto $(-2,-3)$)

25) $k=0$ (retta $y=\frac{x+2}{2}$); $k=2$ (retta $y=\frac{1}{2}$, privata del punto $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$)

26) $k=5$ (retta $y=\frac{5-x}{14}$); $k=-2$ (retta $y=-\frac{1}{7}$, senza il punto $\left(-2,-\frac{1}{7}\right)$); $k=7$ (retta $y=\frac{1}{2}$, senza $\left(7,\frac{1}{2}\right)$)

ESERCIZI SULL'IPERBOLE CANONICA "TRASLATA"

Determina centro, vertici, e asintoti dell'iperbole di equazione:

1) $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{16}=1$ 2) $\frac{(y-2)^2}{3}-x^2=1$ 3) $\frac{(x-3)^2}{25}=9(y+1)^2-4$

4) $9(x-5)^2-1=(y+2)^2$ 5) $(y-1)^2-(x+1)^2=2$ 6) $(2x-1)^2=3+y^2$

Porta le seguenti equazioni di iperboli traslate sotto la forma $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$

così da determinarne il centro, i vertici e gli asintoti:

7) $4x^2-8x-9y^2+36y-68=0$ 8) $9x^2+18x-16y^2+96y-139=0$ 9) $x^2-4y^2-10x+29=0$

10) $9x^2-y^2+6y=18$ 11) $x^2-36y^2=5-4x$ 12) $2x^2-4y^2-8x-32y-55=0$

Scrivi l'equazione dell'iperbole "traslata" con le seguenti caratteristiche
(C *centro di simmetria,* $F_{1,2}$ *fuochi,* $V_{1,2}$ *vertici, c semidist. focale, 2k= differenza costante, e = eccentricità*)

13) $F_1(4,1), F_2(10,1);\ 2k=4$ 14) $V_1(2,0), V_2(2,8);\ F_1(2,-1), F_2(2,9)$

15) $C(-1,4)$; *un asintoto è* $y=x+5$; *passaggio per* $(4,1)$

16) *Asintoti* $y=x+5,\ y=-x+3$; *passaggio per* $(-4,9)$

17) $V_{1,2}(\pm 3,5)$; *asintoti* $2x-3y+15=0,\ 2x+3y-15=0$

18) $F_1(3-\sqrt{5},-2), F_2(3+\sqrt{5},-2)$; *asintoti* $y=2x-8,\ y=-2x+4$

19) $V_1(0,4); V_2(0,6)$; *passaggio per* $(8,2)$

20) $F_1(-4,-1), F_2(2,-1)$; *passaggio per* $(-6,-5)$

21) $C(-1,-1);\ e=\frac{3}{2}$; *passaggio per* $(9,8)$

22) $C(-1,-1)$; *passaggio per* $(-4,0)$ *e per* $(3, 2\sqrt{2}-1)$ 23) $e=\frac{\sqrt{13}}{3};\ V_1(0,1), V_2(0,4)$

24) $C(1,1)$; *un asintoto è* $3x-4y+1=0$; *ciascun fuoco ha distanza 2 dal vertice più vicino*

Riconosci le caratteristiche delle figure associate alle seguenti equazioni:

25) $x^2-y^2+4x=-4$ 26) $9x^2-y^2-6x+6y-8=0$ 27) $3x^2+(y-1)^2=0$

28) $x^2+y^2-2x+2y+2=0$ 29) $(2x-1)^2=(y+2)^2$ 30) $(2x-1)^2=-(y+2)^2$

31) $x^2+2xy+y^2-x-y=0$ 32) $x^2-2xy+y^2=0$ 33) $x^2+2xy+y^2-4(x+y-1)=0$

RISPOSTE

1)
$C(-2,1)$
$V_{1,2}=(-2\pm 3,1)=\left\langle\begin{array}{l}(-5,1)\\(1,1)\end{array}\right.$
$y-1=\pm\frac{4}{3}(x+2)$

2)
$x^2-\frac{(y-2)^2}{3}=-1$
$C(0,2)$
$V_{1,2}=(0,2\pm\sqrt{3})$
$y-2=\pm x\sqrt{3}$

3)
$\frac{(x-3)^2}{100}-\frac{(y+1)^2}{4/9}=-1$
$C(3,-1)$ $V_{1,2}=\left(3,-1\pm\frac{2}{3}\right)$
$y+1=\pm\frac{1}{15}(x-3)$

4)
$\frac{(x-5)^2}{1/9}-(y+2)^2=1$
$C(5,-2)$
$V_{1,2}=\left(5\pm\frac{1}{3},-2\right)$
$y+2=\pm 3(x-5)$

5)
$\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{(y-1)^2}{2}=-1$
$C(-1,1)$
$V_{1,2}=(-1,1\pm\sqrt{2})$
$y-1=\pm(x+1)$

6)
$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{3/4}-\frac{y^2}{3}=1$
$C\left(\frac{1}{2},0\right)$ $V_{1,2}=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$
$y=\pm 2\left(x-\frac{1}{2}\right)$

7)
$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$
$C(1,\ 2)$
$V_{1,2}=(1\pm 3,\ 2)$
$y-2=\pm\frac{2}{3}(x-1)$

8)
$\frac{(x+1)^2}{\frac{4}{9}}-\frac{(y-3)^2}{\frac{1}{4}}=1$
$C(-1,\ 3)$
$V_{1,2}=\left(-1\pm\frac{2}{3},\ 3\right)$
$y-3=\pm\frac{3}{4}(x+1)$

9)
$\frac{(x-5)^2}{4}-y^2=-1$
$C(5,\ 0)$
$V_{1,2}=(5,\ \pm 1)$
$y=\pm\frac{1}{2}(x-5)$

10)
$x^2-\frac{(y-3)^2}{9}=1$
$C(0,\ 3)$
$V_{1,2}=(\pm 1,\ 3)$
$y-3=\pm 3x$

11)
$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$
$C(-2,\ 0)$
$V_{1,2}=(-2\pm 3,\ 0)$
$y=\pm\frac{1}{6}(x+2)$

12)
$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{2}}-\frac{(y+4)^2}{\frac{1}{4}}=-1$
$C(2,\ -4)$
$V_{1,2}=\left(2,\ -4\pm\frac{1}{2}\right)$
$y+4=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$

13) $\frac{(x-7)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{5}=1$

14) $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-4)^2}{16}=-1$

15) $(x+1)^2-(y-4)^2=16$

16) $(x+1)^2-(y-4)^2=-16$

17) $\frac{x^2}{9}-\frac{(y-5)^2}{4}=1$

18) $(x-3)^2-\frac{(y+2)^2}{4}=1$

19) $\frac{x^2}{8}-(y-5)^2=-1$

20) $\frac{(x+1)^2}{5}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$

21) $\frac{(x+1)^2}{\frac{5}{4}}-(y+1)^2=-1$

22) $(x+1)^2-(y+1)^2=8$

23) $x^2-\frac{\left(y-\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}=-1$

24)
$\frac{(x-1)^2}{64}-\frac{(y-1)^2}{36}=1$
oppure
$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=-1$

25) Iperbole degenere nei suoi due asintoti $x+y+2=0,\ x-y+2=0$

26) Iperbole degenere nei suoi due asintoti $3x+y-4=0,\ 3x-y+2=0$

27) Conica di tipo ellittico, degenere nel solo punto $(0,1)$

28) $(x-1)^2+(y+1)^2=0$: conica di tipo ellittico, degenere nel punto $(1,-1)$

29) Iperbole degenere nei suoi due asintoti $2x-y-3=0,\ 2x+y+1=0$

30) Conica di tipo ellittico, degenere nel solo punto $\left(\frac{1}{2},-2\right)$

31) $(x+y)(x+y-1)=0$: iperbole degenere nei suoi asintoti $x+y=0,\ x+y-1=0$

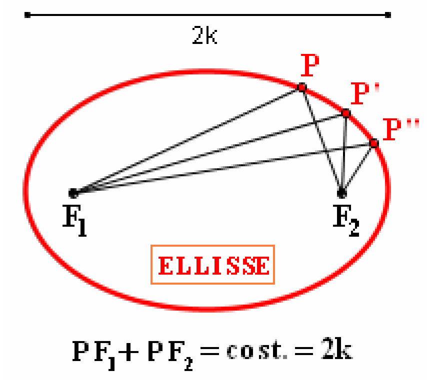
32) E'una conica degenere di tipo parabolico, che consiste nella retta $x-y=0$ "contata 2 volte"

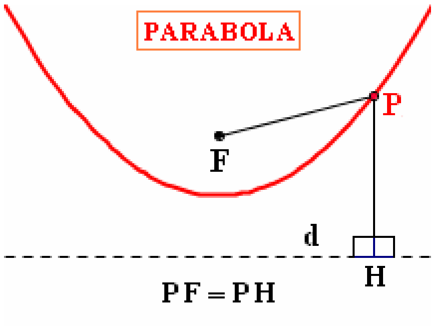
33) $(x+y-2)^2=0$:
è una conica degenere di tipo parabolico, che consiste nella retta $x+y-2=0$ "contata 2 volte"

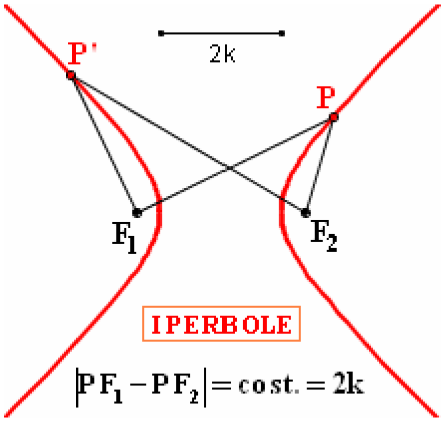
33. LE CONICHE, IN GENERALE, NEL PIANO CARTESIANO

Si dicono "*coniche*" tre particolari *curve*
- o meglio: *tipologie* di curve -
chiamate, rispettivamente, *ellisse, parabola e iperbole*.

Eccone le definizioni.



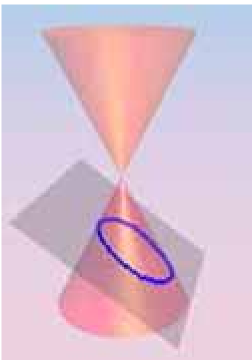




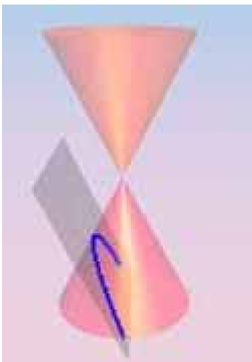
Si dice "ellisse" il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi, detti "fuochi"	**Si dice "parabola" il luogo dei punti del piano, equidistanti da un punto fisso F (detto "fuoco") e da una retta fissa d (detta "direttrice")**	**Si dice "iperbole" il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi, detti "fuochi"**

Ma cosa possono avere in comune
tre curve apparentemente così diverse fra loro?
E perché mai vengono chiamate "*coniche*"?

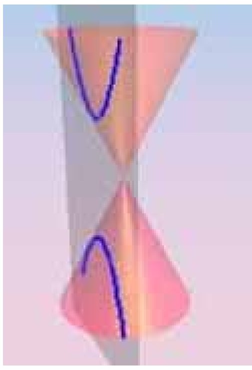
Bene:
sezionando con un piano una doppia superficie conica
(illimitata da entrambe le parti)
si può ottenere,
a seconda dell'inclinazione del piano secante rispetto all'asse del cono**:**



una curva chiusa…



oppure una curva aperta, ad un solo ramo …



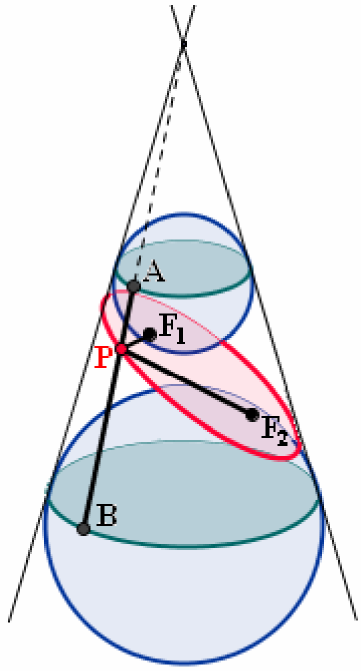
oppure una curva aperta, a due rami

Figure tratte dal sito btc.montana.edu/ceres/ *(Montana State University)*

Si può ora dimostrare che queste tre tipologie di curve, definite "tridimensionalmente", corrispondono proprio alle tre definizioni di "ellisse", "parabola" e "iperbole" viste all'inizio,
definizioni le quali erano basate esclusivamente su considerazioni di "geometria piana" !!!

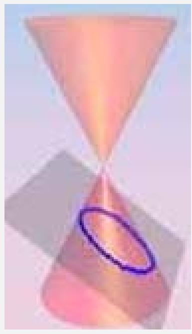
Ad esempio, per quanto riguarda l'ellisse,
vale il seguente teorema (Dandelin, 1822):

Quando l'intersezione fra una superficie conica e un piano
è una linea chiusa,
questa linea può essere pensata
come il luogo dei punti P del piano secante per i quali si ha
$PF_1 + PF_2 = costante$,
dove:
F_1, F_2 sono i punti di contatto fra il piano secante e le due sfere della figura
(ciascuna delle quali è tangente al piano secante e alla superficie conica)
mentre la costante è la distanza, misurata lungo la superficie conica,
fra le due circonferenze lungo le quali le sfere toccano la superficie conica.



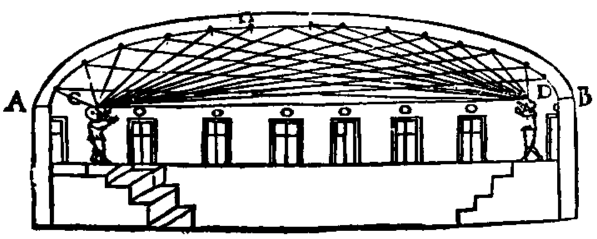
DIMOSTRAZIONE
(*senza approfondire i dettagli …*)

P, il generico punto della linea di cui ci stiamo
occupando, è tale che $PF_1 = PA$ e $PF_2 = PB$
(tangenti alla sfera da uno stesso punto esterno!), per cui
$PF_1 + PF_2 = PA + PB = AB = costante$
(costante perché AB ha sempre la stessa lunghezza:
la distanza, misurata lungo la superficie conica,
fra le due circonferenze, è sempre la medesima,
dovunque venga misurata).



Le coniche abbondano di sorprendenti e meravigliose PROPRIETA'

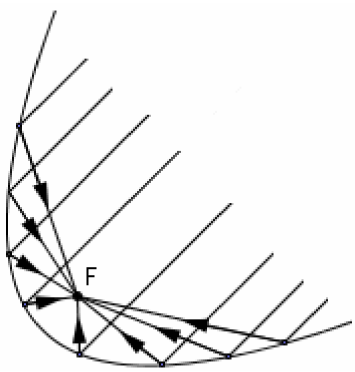
Citiamone una riguardante l'**ellisse**: si può dimostrare che
se un raggio - ad esempio di luce - uscente da un fuoco impatta sulla curva,
il raggio riflesso passerà per l'altro fuoco!



La volta di questa camera è un ellissoide di rotazione.
Se una persona bisbiglia piano piano
con la bocca in corrispondenza di uno dei fuochi,
un amico con l'orecchio nell'altro fuoco
potrà udire chiaramente ogni sua parola,
mentre tutti gli altri presenti nella stanza
non sentiranno nulla.

Una variante consiste
nel piazzare due fiammiferi nei due fuochi:
fregando uno di essi per accenderlo, ecco che
si accenderà istantaneamente pure quell'altro.

Anche la **parabola** gode di una proprietà notevole per quanto riguarda la riflessione.
Un raggio che viaggi parallelamente all'asse di simmetria della parabola,
quando impatta sulla curva, viene riflesso nel fuoco.



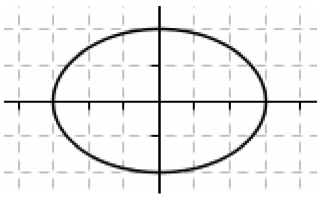
Questo fatto ha un'applicazione notevolissima in tecnologia:
le antenne paraboliche sono infatti caratterizzate
da una forma a paraboloide di rotazione;
le onde elettromagnetiche
provenienti da lontano
vengono concentrate nel fuoco,
dove è collocato il dispositivo di ricezione.

Le coniche sono le curve “associate a relazioni algebriche di secondo grado”.

E’ possibile dimostrare che un’equazione della forma $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$,
ossia **un’equazione di secondo grado in due variabili**, **rappresenta sempre, nel piano cartesiano, una conica (eventualmente degenere)**,
e precisamente:

- una conica di tipo **ellittico** se $b^2-4ac<0$
- una conica di tipo **parabolico** se $b^2-4ac=0$
- una conica di tipo **iperbolico** se $b^2-4ac>0$

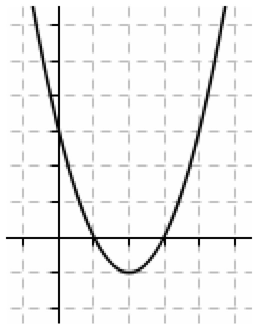
Esempi:



$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Ellisse,
con centro di simmetria nell’origine
e fuochi sull’asse delle x.

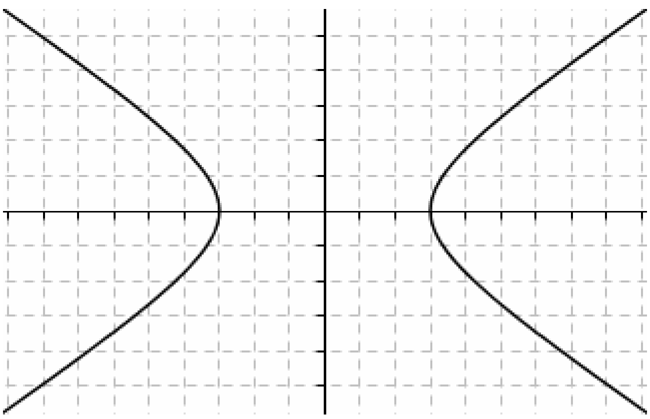
Forma implicita dell'equazione:
$4x^2+9y^2-36=0$
$a=4,\ b=0,\ c=9,\ d=0,\ e=0,\ f=-36$
$b^2-4ac=-144<0 \rightarrow$ *tipo ellittico*



$$y=x^2-4x+3$$

Parabola, con asse di simmetria parallelo all’asse y.

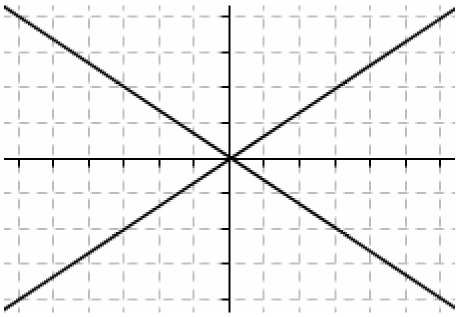
Forma implicita dell'equazione:
$x^2-4x-y+3=0$
$a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=-4,\ e=-1,\ f=3$
$b^2-4ac=0 \rightarrow$ *tipo parabolico*



$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

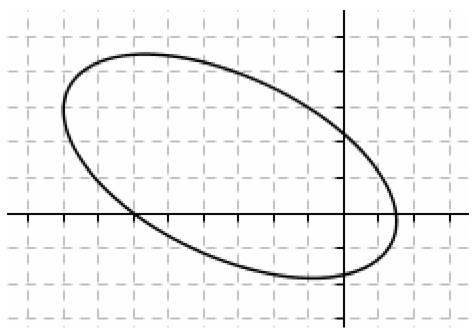
Iperbole,
con centro di simmetria nell’origine
e fuochi sull’asse delle x.

Forma implicita dell'equazione:
$4x^2-9y^2-36=0$
$a=4,\ b=0,\ c=-9,\ d=0,\ e=0,\ f=-36$
$b^2-4ac=144>0 \rightarrow$ *tipo iperbolico*



$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0 \qquad \left(4x^2-9y^2=0\right)$$

Iperbole degenere in una coppia di rette



$$\frac{x^2}{9}+\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{y}{8}=1$$

$$\left(8x^2+12xy+18y^2+36x-9y-72=0\right)$$

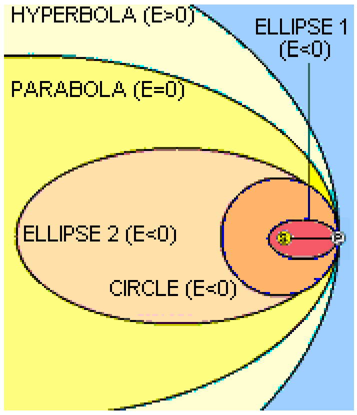
Ellisse
“traslata
e ruotata”

Le coniche hanno un'importanza straordinaria nel mondo fisico.

Ogniqualvolta un corpo celeste orbita intorno ad un altro
(la Luna intorno alla Terra,
i Pianeti intorno al Sole,
le Comete intorno al Sole …)
la traiettoria dell'orbita sarà sempre una conica !!!

Di norma si tratta di un'ellisse
(ad es., le orbite dei pianeti intorno al sole sono delle ellissi,
di cui il sole occupa sempre uno dei fuochi),
ma nel caso di una cometa potrebbe trattarsi
(se la cometa non è "periodica") anche di un ramo di iperbole:
la cometa passa in prossimità del sole una sola volta,
poi si allontana verso gli spazi stellari
e non si avvicinerà mai più.

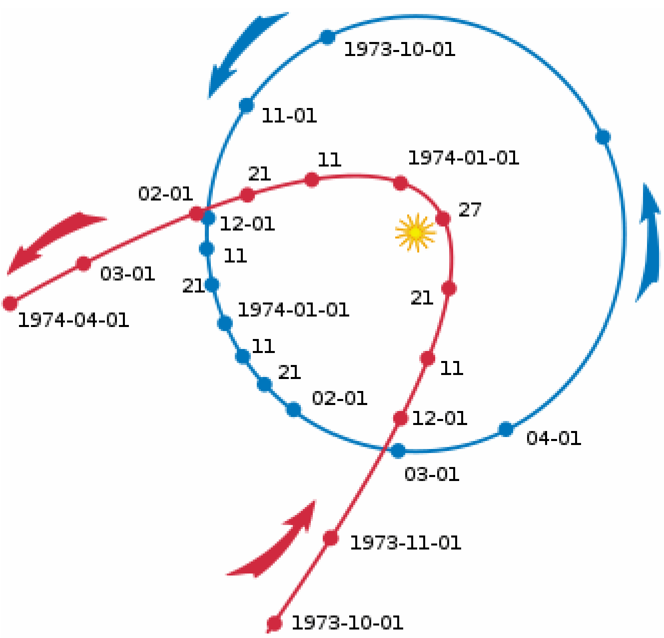
Il tipo di orbita dipende dall' "energia totale"
(cinetica+potenziale) del corpo orbitante:
$E < 0 \rightarrow$ orbita ellittica
$E = 0 \rightarrow$ orbita parabolica
$E > 0 \rightarrow$ orbita iperbolica



La figura sopra riportata
è tratta dal sito
"[The Celestial Sphere]"
di Vik Dhillon,
Sheffield University, UK

Qui a fianco:
l'orbita
della cometa
Kohoutek
e l'orbita
della Terra.

Questa cometa
percorre
un tragitto
ellittico
facendo
un giro
completo
ogni circa
75.000 anni.



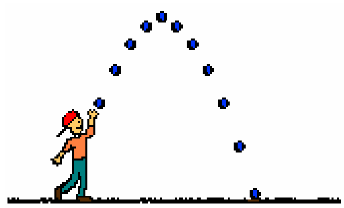
La cometa di Hale-Bopp
fotografata
da Philipp Salzgeber
il 29 marzo 1997

Il fatto che l'attrazione gravitazionale generi traiettorie
a forma di conica, è legato alla proprietà
della forza F di attrazione gravitazionale
di essere inversamente proporzionale al quadrato
della distanza d delle due masse m_1, m_2 che si attraggono:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2} \quad (G = \text{"costante di gravitazione universale"})$$

Se la forza responsabile del moto ha questa espressione,
si può far vedere che le possibili traiettorie del moto
sono esclusivamente le curve associate ad equazioni
di 2° grado, ossia, come abbiamo visto, le coniche.

Se lanciamo un oggetto
verso l'alto
(non verticalmente)
la forza di gravità
lo porterà a muoversi
lungo un arco di parabola.



L'EQUAZIONE GENERALE DI UNA CONICA NEL PIANO CARTESIANO

Una trattazione più avanzata delle coniche mostrerebbe che:

- **l'equazione di una qualsivoglia conica nel piano cartesiano può essere sempre portata sotto la forma:**

  (1) $\boldsymbol{ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0}$

- **e, viceversa, un'equazione della forma (1) rappresenta sempre, a seconda dei casi:**
  - **una conica non degenere**
  - **una conica degenere (in un punto, oppure in una coppia di rette, distinte o coincidenti)**
  - **il luogo vuoto**

♪ C'E' IL TERMINE RETTANGOLARE? ALLORA LA CONICA E' RUOTATA!!!

Se è presente il "TERMINE RETTANGOLARE" (= quello con xy)
ciò indica che la conica è "RUOTATA" rispetto agli assi,
nel senso che gli assi di simmetria della conica NON sono paralleli agli assi del riferimento cartesiano.

♫ MA TU CHE TIPO SEI?

Esistono metodi per riconoscere, a partire dai 6 coefficienti,
di che tipo è la conica (ellisse, parabola, o iperbole),
e se è degenere o no.

Ci accontentiamo qui di affermare che
una conica risulta di tipo:

ellittico se	$b^2-4ac<0$
parabolico se	$b^2-4ac=0$
iperbolico se	$b^2-4ac>0$

ESERCIZI

Fra le coniche seguenti, riconosci quelle di tipo ellittico, parabolico, iperbolico:

1) $x^2-2xy-3y^2+5x-y+2=0$
2) $9x^2-6xy+y^2-5x-4=0$
3) $x^2-4y^2+3x-2y=0$
4) $9x^2+9y^2=1$
5) $y^2-x+3y-5=0$
6) $x^2+y^2=x+y-4xy$

Stabilisci per quali valori del parametro k la conica in esame è di tipo ellittico, parabolico, iperbolico:

7) $x^2-2kxy+y^2=0$
8) $kx^2+y^2-kx+1=0$
9) $kx^2+xy-y^2+x+2y+3=0$

RISPOSTE

1) I 2) P 3) I 4) E 5) P 6) I

7) Ellittico per $-1<k<1$; parabolico per $k=\pm1$; iperbolico per $k<-1 \vee k>1$.

8) Ellittico per $k>0$; parabolico per $k=0$; iperbolico per $k<0$.

9) Ellittico per $k<-\frac{1}{4}$; parabolico per $k=-\frac{1}{4}$; iperbolico per $k>-\frac{1}{4}$.

CONICHE "DEGENERI"

♪ Sappiamo che la parabola è definita come il luogo dei punti del piano,
aventi la proprietà di essere equidistanti da un punto fissato ("fuoco") e da una retta fissata ("direttrice").
Ora, se il fuoco appartenesse alla direttrice, cosa succederebbe?
La parabola diventerebbe un insieme di punti molto particolare … che ne dici?

♫ Cosa accade ad una iperbole se modifichiamo la sua equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

facendola diventare $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=k$ con $k>0$ preso molto piccolo, sempre più piccolo?

E se addirittura pensassimo all'equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$?

Riflessioni di questo tipo ci portano a considerare i "casi limite", i "casi estremi" di coniche …
… ossia le cosiddette "coniche *degeneri*".

- Ad esempio, una parabola col fuoco appartenente alla direttrice degenera in una coppia di rette coincidenti passanti per il fuoco e perpendicolari alla direttrice (il perché si parli di una "coppia di rette coincidenti" e non di una singola retta si comprende bene se si costruisce, mentalmente o col disegno, una specie di "cartone animato" in cui il fuoco si avvicina progressivamente sempre più alla direttrice (provaci!), oppure se si pensa che le coniche di tipo parabolico sono rappresentate, in coordinate, da quelle equazioni di 2° grado in 2 variabili $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ nelle quali è $\Delta=b^2-4ac=0$, e un'equazione riconducibile alla forma $(px+qy+r)^2=0$, che rappresenta evidentemente una "retta contata 2 volte", ha proprio questa proprietà.

- L'equazione (prendiamo un caso specifico per semplicità) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0$,

  si può riscrivere come $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)=0$ e rappresenta quindi una coppia di rette …

  se si pensa al "cartone animato" dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=k$ con $k>0$ sempre più piccolo, si capisce

  che è logico pensare alla $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0$ come all'equazione di una "iperbole degenere nei suoi asintoti".

D'altronde, come abbiamo visto, le coniche dei tre tipi (ellissi-parabole-iperboli) si possono anche definire partendo dalla situazione geometrica tridimensionale di una superficie conica illimitata a due falde, intersecata da un piano il quale, rispetto all'asse del cono, potrà avere inclinazione diversa.
Ora, se il piano secante passasse proprio per il vertice comune delle due superfici coniche, ecco le "coniche degeneri" dei tre tipi.

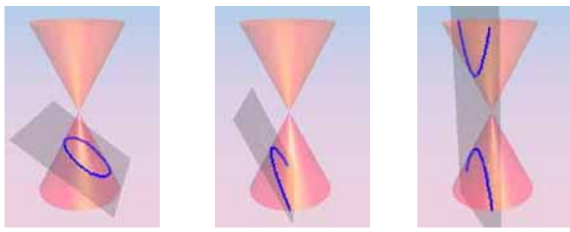


Figure tratte dal sito btc.montana.edu/ceres/ (Montana State University)

Quest'ultima è in realtà la *definizione* che la comunità matematica assegna alla locuzione "coniche degeneri".
Dunque una conica degenere può consistere

- in un singolo punto (conica degenere di tipo *ellittico*)
- in una coppia di rette coincidenti (conica degenere di tipo *parabolico*)
- oppure in una coppia di rette incidenti (conica degenere di tipo *iperbolico*).

Si potrebbe poi dimostrare che una conica di equazione $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ è degenere
se, e soltanto se, la sua equazione si può portare sotto la forma $(px+qy+r)(p'x+q'y+r')=0$,
e si potrebbe anche individuare la condizione alla quale
i 6 coefficienti dell'equazione $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ soddisfano,
nel caso in cui la conica sia degenere.
Ma tali approfondimenti non rientrano nei limiti di questo corso.

UNA CONICA E' INDIVIDUATA DA 5 PUNTI

Una conica è univocamente determinata quando se ne conoscono 5 punti!
Ci possiamo rendere conto del *perché* i punti debbano essere proprio 5
se pensiamo che, essendo l'equazione generale di una conica della forma $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$,
i parametri in gioco sarebbero *apparentemente* 6, ma questa 6-upla è in realtà una sestupla "omogenea",
nella quale cioè i numeri in gioco sono determinati "a meno di una costante di proporzionalità" e quindi
per rappresentare una conica assegnata uno di essi, ad esempio il primo, potrebbe benissimo essere scelto a piacere
(ad esempio, essere scelto =1) dopodiché resterebbero da stabilire i valori dei rimanenti, cioè appunto di 5 numeri.

Spieghiamoci meglio. Consideriamo, ad esempio, l'equazione $x^2+2xy-3y^2-4x+5y+6=0$.
Essa rappresenterà una determinata conica (eventualmente degenere, o vuota).
Bene! Che dire ora dell'equazione $2x^2+4xy-6y^2-8x+10y+12=0$
ottenuta dalla precedente moltiplicandone tutti i coefficienti a, b, c, d, e, f per 2?
E' ovvio che questa seconda equazione, essendo verificata esattamente dalle medesime coppie (x, y)
che verificano la precedente, rappresenterà *la stessa identica conica di prima*.
Raddoppiando i coefficienti, la conica è rimasta tale e quale …

Insomma, se per rappresentare una conica va bene un'equazione con certi coefficienti a, b, c, d, e, f,
allora prendendo invece come coefficienti ka, kb, kc, kd, ke, kf, con k numero reale non nullo arbitrario,
la conica rappresentata è sempre la stessa, non muta.
Ma allora a partire dalla forma generale $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$
per cercare quei valori dei parametri che individuano una data conica assegnata,
noi non dobbiamo andare alla caccia di 6 numeri, ma di 5 solamente, in quanto 1 di essi si può fissare a piacere,
e saranno poi *gli altri 5* a dover essere determinati.

Dunque per individuare l'equazione di una conica servono 5 condizioni,
e la conoscenza del passaggio per 5 punti ci fornisce proprio 5 condizioni.

Facciamo un *esempio*.
Se ci è richiesto di determinare la conica passante per i punti $(0,-4);\ (1,0);\ (1,1);\ (-5,1);\ (2,-6)$, noi potremo:

I) partire dalla rappresentazione $\boxed{x^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0}$, nella quale abbiamo scelto $a=1$,

e porre le 5 condizioni di appartenenza:
$$\begin{array}{r}(0,-4)\\(1,0)\\(1,1)\\(-5,1)\\(2,-6)\end{array}\begin{cases}16c-4e+f=0\\1+d+f=0\\1+b+c+d+e+f=0\\25-5b+c-5d+e+f=0\\4-12b+36c+2d-6e+f=0\end{cases}$$

Risolvendo il sistema, che ha 5 equazioni e 5 incognite, si trova $a=1;\ b=1;\ c=0;\ d=3;\ e=-1;\ f=-4$
da cui l'equazione $\boxed{x^2+xy+3x-y-4=0}$

II) oppure partire dalla rappresentazione $\boxed{ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0}$

e, ponendo le 5 condizioni di appartenenza, pervenire al sistema
$$\begin{array}{r}(0,-4)\\(1,0)\\(1,1)\\(-5,1)\\(2,-6)\end{array}\begin{cases}16c-4e+f=0\\a+d+f=0\\a+b+c+d+e+f=0\\25a-5b+c-5d+e+f=0\\4a-12b+36c+2d-6e+f=0\end{cases}$$

nel quale le incognite sono 6, ma le equazioni sono solo 5.
Sappiamo che, in generale, sistemi siffatti sono "indeterminati con 1 grado di libertà",
ossia tali che 5 fra le incognite possano essere espresse in funzione dell'incognita rimanente.
Risolvendo, se per esempio decidiamo di esprimere le incognite b, c, d, e, f in funzione di a, otteniamo

a *qualsiasi*; $b=a;\ c=0;\ d=3a;\ e=-a;\ f=-4a$

che conferma le nostre considerazioni precedenti: se si sceglie $a=1$, ne risulta la stessa equazione di prima.

ESERCIZI

Scrivi l'equazione della conica passante per i 5 punti seguenti:

1) $(0,0);(0,2);(1,3);(2,1);(1,-1)$ 2) $(0,1);(0,2);(-1,4);(1,1);(1,-1)$ 3) $(0,0);(1,1);(1,0);(0,2);(-2,1)$

RISPOSTE

1) $7x^2+2y^2-13x-4y=0$ 2) $3x^2+6xy+2y^2-9x-6y+4=0$ 3) $x^2+2xy+2y^2-x-4y=0$

ESERCIZI CON TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

1) (Esercizio svolto)

Considera l'ellisse di equazione $\boxed{E: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1}$

e scrivi l'equazione

- *della sua curva immagine*
- *poi della sua curva controimmagine*

attraverso la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = y+2 \\ y' = x-y \end{cases}$

CURVA IMMAGINE

Bisogna

I) invertire le equazioni della trasformazione: $\begin{cases} y = x'-2 \\ x = y'+y = y'+x'-2 = x'+y'-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = x'+y'-2 \\ y = x'-2 \end{cases}$

II) poi sostituire nell'equazione della curva $\frac{(x'+y'-2)^2}{4}+\frac{(x'-2)^2}{3}=1$

III) e infine sopprimere gli apici $\boxed{E': \frac{(x+y-2)^2}{4}+\frac{(x-2)^2}{3}=1}$

Ecco che abbiamo determinato l'equazione della curva immagine.

Volendo (è naturale) possiamo svolgere i calcoli e portarla sotto altra forma:

$$\frac{x^2+y^2+4+2xy-4x-4y}{4}+\frac{x^2-4x+4}{3}=1 \ \dots \ \boxed{7x^2+3y^2+6xy-28x-12y+16=0}$$

CURVA CONTROIMMAGINE

Il procedimento è più rapido:
basta sostituire, nell'equazione della curva data, al posto di x e di y,
i secondi membri delle equazioni della trasformazione.
Dunque è sufficiente scrivere

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \to \boxed{\frac{(y+2)^2}{4}+\frac{(x-y)^2}{3}=1}$$

e la curva nel riquadro è immediatamente la controimmagine richiesta.

Sottoponi la conica assegnata alla trasformazione data,
per trovare l'equazione della curva immagine.
Osserva che la curva originaria e la trasformata sono, in tutti i casi, della stessa tipologia.

2) $xy=-\frac{1}{2}$ $\quad \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$ (rotazione di 45° in senso orario)

3) $x^2+3y^2=4$ $\quad \begin{cases} x' = x-y \\ y' = x+y \end{cases}$ (affinità)

4) $x^2+y^2=1$ $\quad \begin{cases} x' = 3x+1 \\ y' = 3y-2 \end{cases}$ (omotetia)

5) $y=x^2+x$ $\quad \begin{cases} x' = 2x+y+1 \\ y' = x-y-1 \end{cases}$ (affinità)

6) E' data la circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$. Si fissano due numeri non nulli a, b.
Verifica che

- sottoponendo la circonferenza alla trasformazione di equazioni $\begin{cases} x'=ax \\ y'=y \end{cases}$ (dilatazione orizzontale)

  si ottiene l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$
- sottoponendola alla trasformazione di equazioni $\begin{cases} x'=x \\ y'=by \end{cases}$ (dilatazione verticale)

  si ottiene l'ellisse di equazione $x^2+\frac{y^2}{b^2}=1$
- sottoponendola alla $\begin{cases} x'=ax \\ y'=by \end{cases}$ (dilatazione) si ottiene l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

7) Quale trasformazione fa passare dall'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ alla circonferenza $x^2+y^2=1$?

8) Scrivi l'equazione dell'ellisse E di fuochi $F_1(-3,-3)$, $F_2(3,3)$ e costante (= somma costante) $2k=10\sqrt{2}$

e verifica che se la si sottopone alla trasformazione di equazioni $\begin{cases} x=\dfrac{x'+y'}{2} \\ y=\dfrac{-x'+y'}{2} \end{cases}$

si ottiene come curva immagine l'ellisse E': $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

9) Sottoponendo la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 alla trasformazione di equazioni $\begin{cases} x'=2x \\ y'=3y-3 \end{cases}$

si ottiene un'ellisse: determinane l'equazione e calcolane l'eccentricità.

10) Anche la curva CONTRO immagine della circonferenza di centro l'origine e raggio 2,

rispetto alla trasformazione $\begin{cases} x'=2x \\ y'=3y-3 \end{cases}$, è un'ellisse.

Che equazione ha questa ellisse? Quanto vale la sua eccentricità?

11) L'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$ viene traslata di 5 unità verso destra e di 3 unità verso il basso.

Qual è l'equazione della curva ottenuta?

12) Che equazione ha l'immagine dell'ellisse $\frac{(x+7)^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$ attraverso la traslazione di vettore $\vec{v}(1,2)$?

13) Verifica che se l'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti di equazione $xy=1$

viene sottoposta alla trasformazione t di equazioni $\begin{cases} x'=\dfrac{a}{2}x+\dfrac{a}{2}y \\ y'=-\dfrac{b}{2}x+\dfrac{b}{2}y \end{cases}$

allora si muterà nell'iperbole canonica di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

RISPOSTE

2) $x^2-y^2=-1$ 3) $x^2+y^2-xy=4$ 4) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 5) $x^2+y^2+2xy+9y+9=0$

7) $\begin{cases} x'=x/a \\ y'=y/b \end{cases}$ 8) $E: 41x^2-18xy+41y^2=1600$ 9) $\frac{x^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{36}=1;\ e=\frac{\sqrt{5}}{3}$

10) $4x^2+9(y-1)^2=4;\ e=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 11) $\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{5}=1$ 12) $\frac{(x+6)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{5}=1$

UN MODO ALTERNATIVO (E UNIFICANTE) DI DEFINIRE LE CONICHE IN GEOMETRIA PIANA

Fissati su di un piano un punto F (fuoco) e una retta *d* (direttrice),
se si considera il luogo dei punti del piano per i quali risulta PF / PH = *e* ,
dove H è la proiezione di P su *d* , mentre *e* è una costante positiva,
si ottiene:

- **UN'ELLISSE se si prende $0<e<1$**
- **UNA PARABOLA se si prende $e=1$**
- **UN'IPERBOLE se si prende $e>1$**

Il valore della costante ***e*** risulta poi coincidere:

- nel caso dell'ellisse, col rapporto (semidistanza focale)/(semiasse maggiore)
- nel caso dell'iperbole, col rapporto (semidistanza focale)/(semidistanza dei vertici)

cioè risulta coincidere con quel numero che viene abitualmente chiamato "eccentricità", e che

- nel caso dell'ellisse, è tanto più grande quanto più l'ellisse è "bislunga",
- nel caso dell'iperbole, è tanto più grande quanto più la "forbice" degli asintoti è aperta.

E' anche possibile provare che

- l'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con $a>b$, per cui sappiamo che la semidistanza focale è $c=\sqrt{a^2-b^2}$,

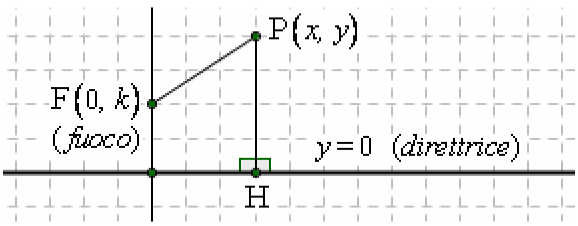
  ha due direttrici, di equazioni $x=\pm\frac{a^2}{c}$, ed eccentricità $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$
- l'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con $b>a$, per cui sappiamo che la semidistanza focale è $c=\sqrt{b^2-a^2}$,

  ha due direttrici, di equazioni $y=\pm\frac{b^2}{c}$, ed eccentricità $\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$
- l'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, per cui sappiamo che la semidistanza focale è $c=\sqrt{a^2+b^2}$,

  ha due direttrici, di equazioni $x=\pm\frac{a^2}{c}$, ed eccentricità $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$
- l'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, per cui sappiamo che la semidistanza focale è $c=\sqrt{a^2+b^2}$,

  ha due direttrici, di equazioni $y=\pm\frac{b^2}{c}$, ed eccentricità $\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$

Per *DIMOSTRARE* quanto enunciato nel riquadro a inizio pagina,
assegneremo a F le coordinate $(0,\,k)$ (supponendo $k>0$)
e prenderemo come direttrice l'asse *x*, di equazione $y=0$. Dunque:



Luogo dei punti P(*x*, *y*) *tali che* $\frac{\text{PF}}{\text{PH}}=e$:

$$\frac{\sqrt{x^2+(y-k)^2}}{|y|}=e$$

$$\sqrt{x^2+(y-k)^2}=e|y|$$

$$x^2+(y-k)^2=e^2y^2;\quad x^2+y^2-2ky+k^2=e^2y^2;\quad x^2+y^2-e^2y^2-2ky=-k^2$$

$$\boxed{x^2+\left(1-e^2\right)y^2-2ky=-k^2}$$

A questo punto, dividiamo per la quantità $1-e^2$; ciò richiede di supporre $1-e^2\neq 0$ ossia $e\neq 1$.
Il caso $e=1$ è quindi per ora "accantonato", e verrà studiato in un secondo tempo.

$$\frac{x^2}{1-e^2}+y^2-\frac{2k}{1-e^2}y=-\frac{k^2}{1-e^2}$$

A 1° membro, addizioniamo e sottraiamo, per "completare il quadrato", la quantità $\frac{k^2}{\left(1-e^2\right)^2}$

$$\frac{x^2}{1-e^2}+\left[y^2-\frac{2k}{1-e^2}y+\frac{k^2}{\left(1-e^2\right)^2}\right]-\frac{k^2}{\left(1-e^2\right)^2}=-\frac{k^2}{1-e^2}$$

$$\frac{x^2}{1-e^2}+\left(y-\frac{k}{1-e^2}\right)^2=\frac{k^2}{\left(1-e^2\right)^2}-\frac{k^2}{1-e^2}$$

$$\frac{x^2}{1-e^2}+\left(y-\frac{k}{1-e^2}\right)^2=\frac{k^2-k^2\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\right)^2}$$

$$\frac{x^2}{1-e^2}+\left(y-\frac{k}{1-e^2}\right)^2=\frac{k^2e^2}{\left(1-e^2\right)^2}$$

Dividendo ulteriormente per il 2° membro $\frac{k^2e^2}{\left(1-e^2\right)^2}$, avremo:

$$\frac{\frac{x^2}{1-e^2}}{\frac{k^2e^2}{\left(1-e^2\right)^2}}+\frac{\left(y-\frac{k}{1-e^2}\right)^2}{\frac{k^2e^2}{\left(1-e^2\right)^2}}=1; \qquad \boxed{(*)\quad \frac{x^2}{\frac{k^2e^2}{1-e^2}}+\frac{\left(y-\frac{k}{1-e^2}\right)^2}{\frac{k^2e^2}{\left(1-e^2\right)^2}}=1}$$

Ora occorre distinguere i due casi: $0<e<1$; $e>1$.

IL CASO $0<e<1$

Con $0<e<1$ avremo $0<e^2<1$, $1-e^2>0$ e quindi $\frac{k^2e^2}{1-e^2}>0$; potremo perciò porre, nella (*), $\boxed{\frac{k^2e^2}{1-e^2}=a^2}$.

Inoltre, essendo $\frac{k^2e^2}{\left(1-e^2\right)^2}>0$, potremo pure porre $\boxed{\frac{k^2e^2}{\left(1-e^2\right)^2}=b^2}$.

La nostra equazione (*) assumerà allora la forma: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(y-\frac{k}{1-e^2}\right)^2}{b^2}=1}$

e questa forma rivela trattarsi di un'**ellisse** di semiassi $\boxed{a=\frac{ke}{\sqrt{1-e^2}};\ b=\frac{ke}{1-e^2}}$

Osserviamo che in un'ellisse l'"eccentricità" è definita come il rapporto semidistanza focale /semiasse maggiore; ora, essendo $0<e<1$, è anche $0<1-e^2<1$

da cui $\underbrace{\sqrt{1-e^2}>1-e^2}_{\text{NOTA 1}} \rightarrow \underbrace{\frac{ke}{\sqrt{1-e^2}}<\frac{ke}{1-e^2}}_{\text{NOTA 2}}$, ossia $a<b$

NOTA 1 *Se* $0<p<1$, *allora è* $\sqrt{p}>p$

NOTA 2 *Se* $p,\ q,\ r>0$ *e* $p>q$, *allora* $\frac{1}{p}<\frac{1}{q}$ *e* $\frac{r}{p}<\frac{r}{q}$

Insomma, dei due semiassi *a*, *b*, il maggiore risulta essere *b*: i fuochi sono perciò "in verticale".
Nell'ellisse coi fuochi in verticale, sappiamo che si ha $c^2=b^2-a^2$ (*c semidistanza focale*) e dunque

$$c^2=b^2-a^2=\frac{k^2e^2}{\left(1-e^2\right)^2}-\frac{k^2e^2}{1-e^2}=\frac{k^2e^2-k^2e^2\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\right)^2}=\frac{k^2e^4}{\left(1-e^2\right)^2}\rightarrow\boxed{c=\frac{ke^2}{1-e^2}}$$

da cui $\boxed{eccentricità=}\frac{semidistanza\ focale}{semiasse\ maggiore}=\frac{c}{b}=\frac{\frac{ke^2}{1-e^2}}{\frac{ke}{1-e^2}}\boxed{=e}$ quindi l'eccentricità dell'ellisse considerata coincide col parametro *e* da noi fissato all'inizio

IL CASO $e>1$

Con $e>1$ avremo $1-e^2<0$ e quindi $\frac{k^2e^2}{1-e^2}<0$; potremo perciò porre, nella (*),

$$\frac{k^2e^2}{1-e^2}=-a^2 \;\to\; \frac{k^2e^2}{e^2-1}=a^2 \quad \boxed{a=\frac{ke}{\sqrt{e^2-1}}}.$$

Inoltre, essendo $\frac{k^2e^2}{(1-e^2)^2}>0$, potremo pure porre $\frac{k^2e^2}{(1-e^2)^2}=\frac{k^2e^2}{(e^2-1)^2}=b^2$ $\boxed{b=\frac{ke}{e^2-1}}$.

La nostra equazione (*) assumerà allora la forma: $\frac{x^2}{-a^2}+\frac{\left(y-\frac{k}{1-e^2}\right)^2}{b^2}=1 \to \boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{\left(y-\frac{k}{1-e^2}\right)^2}{b^2}=-1}$

e questa forma rivela trattarsi di un'**iperbole** (coi fuochi "in verticale").

Nell'iperbole si ha, come è noto, $c^2=a^2+b^2$ (c semidistanza focale), da cui

$$c^2=a^2+b^2=\frac{k^2e^2}{e^2-1}+\frac{k^2e^2}{(e^2-1)^2}=\frac{k^2e^2(e^2-1)+k^2e^2}{(e^2-1)^2}=\frac{k^2e^4}{(e^2-1)^2} \;\to\; \boxed{c=\frac{ke^2}{e^2-1}}.$$

Nell'iperbole da noi ottenuta, la semidistanza fra i vertici è b, per cui potremo scrivere:

$$\boxed{\textit{eccentricità}=}\;\frac{\textit{semidistanza focale}}{\textit{semidistanza vertici}}=\frac{c}{b}=\frac{\frac{ke^2}{e^2-1}}{\frac{ke}{e^2-1}}\boxed{=e}$$

quindi l'eccentricità dell'iperbole considerata coincide col parametro *e* da noi fissato all'inizio

E "recuperiamo" ora anche IL CASO $e=1$

Andiamo infine a "recuperare" il caso $e=1$,
che avevamo accantonato nel momento in cui avevamo deciso di dividere per la quantità $1-e^2$.
Occorrerà ripartire quindi dal passaggio precedente a questa divisione, ossia da

$$\boxed{x^2+(1-e^2)y^2-2ky=-k^2}.$$

Questa equazione, con $e=1$, diventa:

$$x^2-2ky=-k^2;\quad 2ky=x^2+k^2;\quad y=\frac{1}{2k}x^2+\frac{k}{2}$$

La curva rappresentata è dunque in questo caso una **parabola**.

L'eccentricità in una parabola è sempre 1,
quindi anche in questo caso possiamo dire che l'eccentricità della conica ottenuta
coincide col valore del parametro *e* che ci è servito per definirla.