3. COORDINATE DEL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

- **Se il segmento sta sull'asse *x*:**

Supponiamo di conoscere x_1 (ascissa di A) e x_2 (ascissa di B); vogliamo trovare x_M.
Avremo $\overline{AM} = \overline{MB}$.

♪ Se A sta a *sinistra* di B (come nella nostra figura), tale relazione diventa

$$x_M - x_1 = x_2 - x_M; \quad 2x_M = x_1 + x_2; \quad x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

♫ E se A fosse invece a *destra* di B?
Allora sarebbe

$$x_M - x_2 = x_1 - x_M; \quad 2x_M = x_1 + x_2; \quad x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (\textit{come prima})$$

In definitiva,
se il segmento AB giace sull'asse *x*, si avrà, *qualunque sia* la posizione reciproca dei due estremi A e B,

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Una **dimostrazione alternativa** della formula è riportata nel successivo paragrafo sull'**identità di Chasles**.

ESEMPIO Il punto medio del segmento di estremi $A(7,0)$; $B(9,0)$ è il punto M tale che

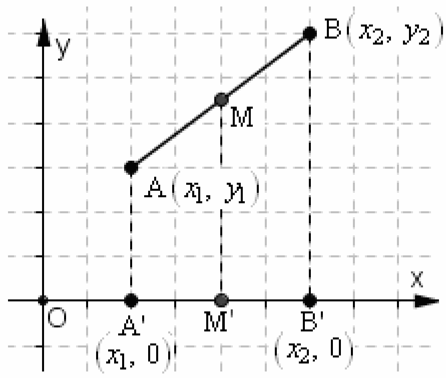
$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7+9}{2} = \frac{16}{2} = 8;$$ l'ordinata di M vale invece evidentemente anch'essa 0.

Dunque è il punto $M(8,0)$.

- **Se il segmento giace sull'asse *y***, si otterrà in modo del tutto analogo: $y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

ESEMPIO Se E è il punto medio di CD, con $C(0, 5)$; $D(0, -3)$, allora $E\left(0, \dfrac{5-3}{2}\right) = (0, 1)$

- **Caso generale**



Proiettiamo A, B, M sull'asse *x*.
Le tre proiezioni A', B', M' avranno le stesse ascisse dei punti iniziali.

Per il Piccolo Teorema di Talete, essendo $AM = MB$,
risulterà anche $A'M' = M'B'$ quindi M' sarà il punto medio di $A'B'$.

Allora, potendosi applicare una formula già acquisita
(dato che il segmento $A'B'$ giace sull'asse *x*), avremo

$$x_{M'} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

e perciò (dato che $x_M = x_{M'}$) pure

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Allo stesso modo, proiettando sull'asse *y*, si otterrebbe

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

In definitiva, in *qualsiasi* caso, dati due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$,
il punto medio M del segmento AB avrà sempre coordinate

$$\boxed{x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}}; \quad \boxed{y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}}.$$

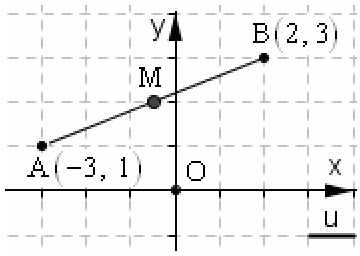
L'ASCISSA DEL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO È LA MEDIA DELLE ASCISSE DEGLI ESTREMI, LA SUA ORDINATA È LA MEDIA DELLE ORDINATE.

ESEMPIO I punti medi dei lati del triangolo ABC, con $A(-4,-2)$; $B(-3,2)$; $C(1/3, 0)$ sono:

$$\left(\frac{-4-3}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}, 0\right); \quad \left(\frac{-4+\frac{1}{3}}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = \left(-\frac{11}{6}, -1\right); \quad \left(\frac{-3+\frac{1}{3}}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = \left(-\frac{4}{3}, 1\right)$$

ESERCIZI SVOLTI SUL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

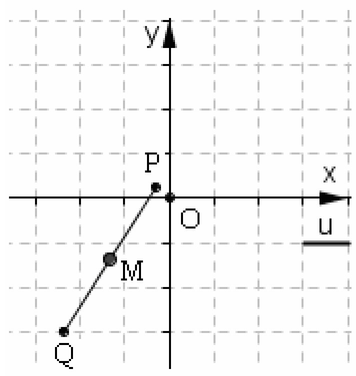
1) Calcola le coordinate del punto medio del segmento AB, essendo $A(-3,1)$; $B(2,3)$



$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-3+2}{2}=-\frac{1}{2};\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$M\left(-\frac{1}{2},\,2\right)$$

2) $P\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$; $Q\left(-\frac{12}{5},-3\right)$. Punto medio di PQ = ?



$$x_M=\frac{x_P+x_Q}{2}=\frac{-\frac{1}{3}-\frac{12}{5}}{2}=\frac{\frac{-5-36}{15}}{2}=-\frac{41}{30}$$

$$y_M=\frac{y_P+y_Q}{2}=\frac{\frac{1}{4}-3}{2}=\frac{\frac{1-12}{4}}{2}=-\frac{11}{8}$$

$$M\left(-\frac{41}{30},-\frac{11}{8}\right)$$

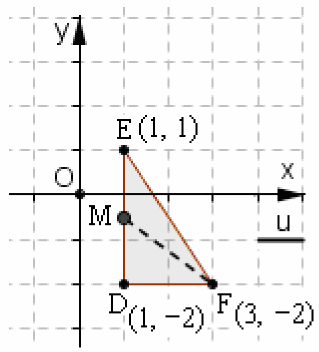
3) Calcola la lunghezza della mediana FM del triangolo DEF, essendo $D(1,-2)$; $E(1,1)$; $F(3,-2)$

$$x_M=\frac{x_D+x_E}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$y_M=\frac{y_D+y_E}{2}=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$M\left(1,-\frac{1}{2}\right)$$

$$F(3,-2)$$



$$FM=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$

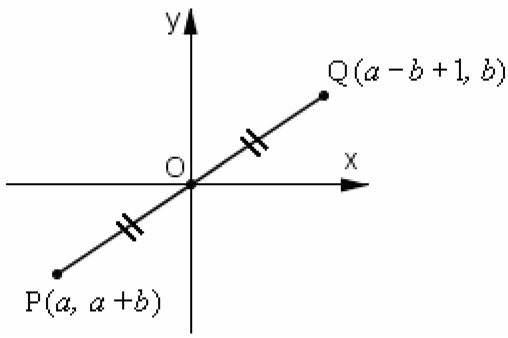
$$=\sqrt{(3-1)^2+\left(-2+\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{2^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{16+9}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

4) Per quali valori di a, b i due punti
$P(a,\ a+b)$ e $Q(a-b+1,\ b)$
sono simmetrici rispetto all'origine?

Dobbiamo determinare a, b in modo che
il punto medio del segmento PQ coincida con l'origine.
Ma tale punto medio ha coordinate

$$\left(\frac{a+a-b+1}{2},\frac{a+b+b}{2}\right)=\left(\frac{2a-b+1}{2},\frac{a+2b}{2}\right)$$



e coinciderà con l'origine se e solo se $\begin{cases}\dfrac{2a-b+1}{2}=0\\[2mm]\dfrac{a+2b}{2}=0\end{cases}$,

sistema dal quale si ricava $a=-\frac{2}{5},\ b=\frac{1}{5}$