6. SEGMENTI ORIENTATI
IDENTITA’ DI CHASLES (Michel Chasles, francese, 1793-1880)
DUE DIMOSTRAZIONI

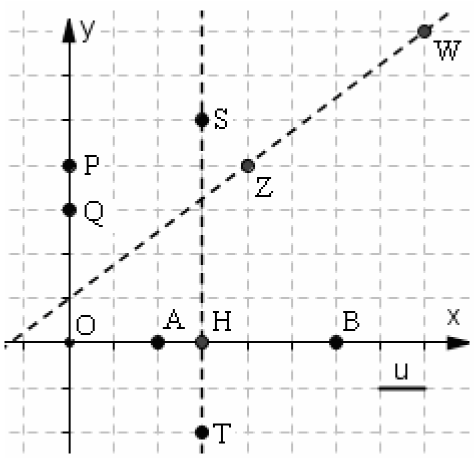
Spesso accade che un segmento giacente sull’asse *x*, o sull’asse *y*, o su di una parallela ad uno degli assi cartesiani, venga considerato come segmento *orientato*.

Ad un *segmento orientato giacente su di una retta orientata* viene attribuita misura

- **positiva** se l’orientamento del segmento coincide con l’orientamento della retta,
- **negativa** in caso contrario.

Per un segmento che sia disposto *obliquamente* sul piano cartesiano,
di solito non interessa pensare ad un’orientazione (anche se a volte invece lo si fa).

Esempi:



$AB = 4$
$BA = -4$

$PQ = -1$
$QP = 1$

$HS = 5$
$SH = -5$

$HT = -2$
$TH = 2$

ZW (o $\overline{ZW}$) $= 5$ (segmento non orientato)

SIMBOLOGIA (IMPORTANTE!)

Purtroppo da un libro di testo all’altro la simbologia adottata per questo argomento può cambiare parecchio.
Noi faremo così:

- il fatto che un segmento si debba pensare come orientato o no,
  verrà *a volte* dichiarato esplicitamente, *altre volte* invece sarà da desumere dal contesto
- utilizzeremo lo stesso simbolo, ad esempio AB,
  - ♪ sia per indicare il segmento orientato AB,
  - ♪ sia per indicare la misura di questo (= numero *relativo*)
  - ♪ sia per indicare il segmento *non* orientato AB,
  - ♪ sia per indicare la misura di questo (= numero *assoluto*)
- evidentemente, nel caso il segmento sia da pensarsi orientato, sarà $AB \neq BA$,
  se NON orientato sarà $AB = BA$
- un eventuale uso del “cappello” $(\overline{AB})$ indicherà sempre esclusivamente un segmento NON orientato,
  o la misura di questo, interpretabile anche come il valore assoluto della misura di un segmento orientato.

Per le misure relative di segmenti orientati su di una retta orientata
valgono le seguenti ovvie relazioni:

$$\textbf{(1)}\ \ AB = -BA$$

$$\textbf{(2)}\ \ AB + BA = 0$$

Vale poi la seguente NOTEVOLISSIMA relazione:

$$\textbf{(3)}\ \ AB = AC + CB\,,$$

detta IDENTITA’ (o “formula”) DI CHASLES,
dove AB, AC, CB sono misure relative di segmenti orientati su di una retta orientata, e
L’INTERESSE DELL’ IDENTITÀ STA NEL FATTO CHE ESSA È VALIDA
***QUALUNQUE SIA* LA POSIZIONE RECIPROCA DEI TRE PUNTI A, B, C.**

Vediamo innanzitutto qualche esempio che mostri in modo semplice come l’identità effettivamente “funzioni”.

I. Ordine A-C-B $\quad \underbrace{AB}_{+7} = \underbrace{AC}_{+3} + \underbrace{CB}_{+4}$

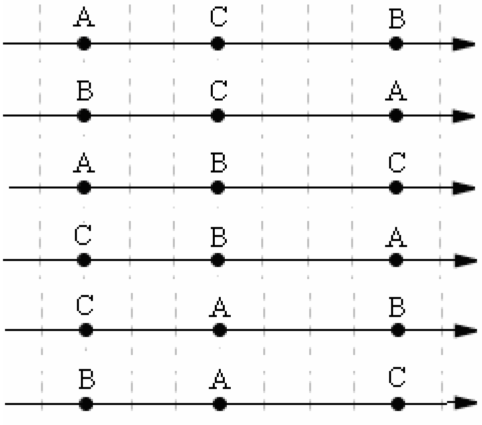
II. B-C-A $\quad \underbrace{AB}_{-7} = \underbrace{AC}_{-4} + \underbrace{CB}_{-3}$

III. A-B-C $\quad \underbrace{AB}_{+3} = \underbrace{AC}_{+7} + \underbrace{CB}_{-4}$

IV. C-B-A $\quad \underbrace{AB}_{-4} = \underbrace{AC}_{-7} + \underbrace{CB}_{+3}$

V. C-A-B $\quad \underbrace{AB}_{+4} = \underbrace{AC}_{-3} + \underbrace{CB}_{+7}$

VI. B-A-C $\quad \underbrace{AB}_{-3} = \underbrace{AC}_{+4} + \underbrace{CB}_{-7}$



E vediamo ora come si possa DIMOSTRARE l'identità di Chasles
***non* pensando ad un esempio particolare, ma IN MODO DEL TUTTO GENERALE**
(faremo ancora riferimento al riquadro precedente, ma … immagina di togliere i quadretti ed i numeri!)

I. Nel primo caso (A-C-B) l'uguaglianza da dimostrare è ovvia: $AB = AC + CB$

II. Nel caso (B-C-A) l'uguaglianza ovvia è $BA = BC + CA \to -AB = -CB - AC \to AB = AC + CB$

III. Nel caso (A-B-C) l'uguaglianza ovvia è $AC = AB + BC \to AC = AB - CB \to AB = AC + CB$

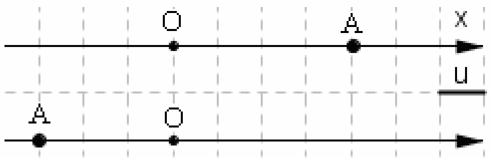
IV. Nel caso (C-B-A) l'uguaglianza ovvia è $CA = CB + BA \to -AC = CB - AB \to AB = AC + CB$

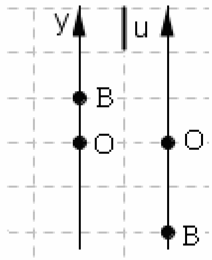
V. Nel caso (C-A-B) l'uguaglianza ovvia è $CB = CA + AB \to CB = -AC + AB \to AB = AC + CB$

VI. Nel caso (B-A-C) l'uguaglianza ovvia è $BC = BA + AC \to -CB = -AB + AC \to AB = AC + CB$

Altre osservazioni

Sia A un punto dell'asse *x*; allora avremo
$x_A = OA$ (misura relativa di segmento orientato)





Analogamente, se B è un punto sull'asse *y*, avremo
$y_B = OB$
(misura relativa di segmento orientato)

L'identità di Chasles è preziosa perché permette di effettuare alcune dimostrazioni importanti
"in un colpo solo", in termini del tutto generali, **senza dover ricorrere a laboriose distinzioni di casi**.

Dimostrazione della formula per la distanza fra due punti sull'asse *x*

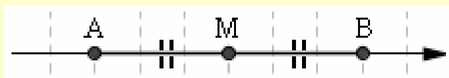
Scriviamo innanzitutto $AB = AO + OB$
(O indica l'origine, le scritture AB, AO, OB vanno "lette" come misure relative di segmenti orientati).
Abbiamo scritto, coi tre punti A, B e O, l'identità di Chasles, e sappiamo quindi che
l'uguaglianza è valida qualunque sia la posizione del punto O rispetto ai due punti A, B !!!
Ma dalla relazione scritta segue $AB = -OA + OB = -x_A + x_B = x_B - x_A$ (vedi "altre osservazioni")
e ciò significa che la misura RELATIVA di un segmento orientato, giacente sull'asse *x*,
è data dalla differenza fra l'ascissa del secondo punto (quello al quale "arriva" il segmento)
e l'ascissa del primo punto (quello dal quale "parte" il segmento).

Se ora consideriamo la misura ASSOLUTA del segmento AB (= la misura di AB pensato come *non* orientato),
questa misura (che è poi la distanza d(A,B) tra i due punti)
sarà il valore assoluto della misura relativa di AB, pensato orientato; avremo quindi

$$d(A,B) = |AB| = |x_B - x_A| \quad \text{c.v.d.}$$

Dim. della formula per il punto medio di un segmento giacente sull'asse *x* (analogo discorso per l'asse *y*)

Si ha $AM = MB$ (misure relative di segmenti orientati; il bello è che *l'uguaglianza vale tanto nella situazione in figura, quanto con A, B scambiati di posizione*!).



Ma da $AM = MB$ segue (ricordiamo quanto dimostrato poc'anzi sulla misura relativa di un segmento orientato, giacente sull'asse *x*: essa si calcola sottraendo dall'ascissa del secondo punto, l'ascissa del primo punto):

$$x_M - x_A = x_B - x_M \to 2x_M = x_A + x_B \to x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{c.v.d.}$$

DIVIDERE UN SEGMENTO IN PARTI PROPORZIONALI A DUE NUMERI DATI

Innanzitutto, cosa vuol dire?
Facciamo un esempio.

Se è richiesto di **dividere un segmento lungo 40 cm in due parti che stiano fra loro come 2:3**, allora si richiede di determinare le parti *x*, *y* in modo che

- valga la proporzione
  $x : y = 2 : 3$ (o, il che è lo stesso, permutando i medi, $x : 2 = y : 3$),
- e sia, naturalmente,
  $x + y = 40$.

In pratica, il segmento dev'essere spezzato in due tronconi che "pesino" 2*u* e 3*u* rispettivamente, essendo *u* un segmentino che dunque dovrà essere la $2+3=5^a$ parte del segmento dato.
Ma allora si tratterà di fare i 2/5 e rispettivamente i 3/5 del segmento stesso!

$$x = \frac{2}{5}\cdot 40 = 16 \quad \text{e} \quad y = \frac{3}{5}\cdot 40 = 24 .$$

Dividere un segmento s in due parti che stiano fra loro come a:b (a, b interi >0) significa spezzare s in modo che

- **valga la proporzione**
  $\boldsymbol{x : y = \mathrm{a} : \mathrm{b}}$ **o, il che è lo stesso (permutando i medi)** $\boldsymbol{x : \mathrm{a} = y : \mathrm{b}}$
- **e sia, naturalmente,**
  $\boldsymbol{x + y = \mathrm{s}}$ **.**

Con la proprietà del "comporre gli antecedenti e i conseguenti" applicata alla proporzione scritta nella seconda forma otteniamo

$$\underbrace{(x+y)}_{\mathrm{s}} : (\mathrm{a}+\mathrm{b}) = \left\langle \begin{matrix} x : \mathrm{a} \\ y : \mathrm{b} \end{matrix} \right.$$

ossia:

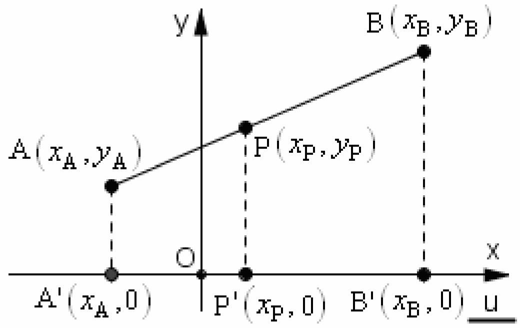
$$\frac{x}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}} \to \boxed{\boldsymbol{x = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\mathrm{s}}}; \qquad \frac{y}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}} \to \boxed{\boldsymbol{y = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\mathrm{s}}}$$

In Geometria Analitica, il problema viene di solito interpretato in questo senso:
sono date le coordinate degli estremi di un segmento AB; trovare le coordinate di quel punto P del segmento, che lo divide in due parti per cui $AP : PB = a : b$ (o $AP : a = PB : b$), essendo a, b due interi >0 fissati.

Se si proiettano A, P, B sull'asse *x* (vedi figura)
il Teorema di Talete ci dice che $AP : PB = A'P' : P'B'$ e quindi

$A'P' : P'B' = a : b$ o anche (permutando i medi)
$A'P' : a = P'B' : b$

dove possiamo pensare $A'P', P'B'$ come segmenti orientati (la proporzione resterebbe valida anche qualora essi fossero entrambi negativi), per cui avremo:

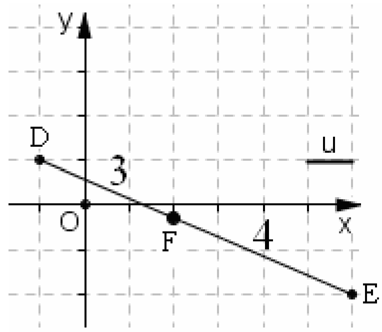


$$(x_P - x_A) : a = (x_B - x_P) : b \quad \text{e dunque}$$
$$(\cancel{x_P} - x_A + x_B - \cancel{x_P}) : (a+b) = (x_P - x_A) : a$$

$$\frac{x_P - x_A}{a} = \frac{x_B - x_A}{a+b} \to x_P - x_A = \frac{a}{a+b}(x_B - x_A) \to \boxed{x_P = x_A + \frac{a}{a+b}(x_B - x_A)}$$

Analogamente, proiettando sull'asse *y*, si otterrebbe la formula $\boxed{y_P = y_A + \frac{a}{a+b}(y_B - y_A)}$

ESEMPIO Che coordinate ha il punto F, che divide (vedi figura) il segmento di estremi $D(-1,1);\ E(6,-2)$ in parti che stanno fra loro come 3:4?

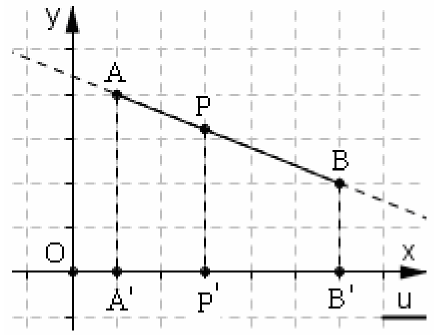


$$x_F = x_D + \frac{3}{3+4}(x_E - x_D) = -1 + \frac{3}{7}(6-(-1)) = 2$$
$$y_F = y_D + \frac{3}{3+4}(y_E - y_D) = 1 + \frac{3}{7}(-2-1) = -\frac{2}{7}$$

INDIVIDUARE SULLA RETTA AB UN PUNTO P TALE CHE SI ABBIA $AP = k \cdot AB$

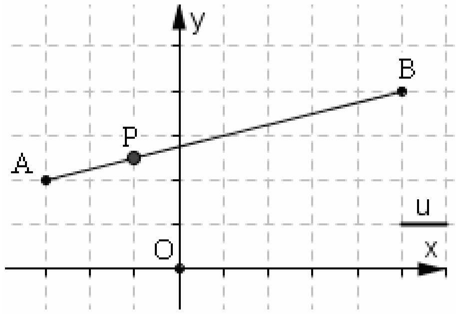
Si può procedere come per il problema precedente, attraverso le proiezioni A', P', B' sull'asse x
$\left(\frac{AP}{AB} = k \rightarrow \frac{A'P'}{A'B'} = k \quad \text{per il Teorema di Talete} \right)$ e poi quelle sull'asse y, considerando segmenti orientati.

Si trova $\boxed{x_P =} \, x_A + k(x_B - x_A)$; $\boxed{y_P =} \, y_A + k(y_B - y_A)$



Il problema presente, se si desidera che il punto P appartenga al segmento, avrà soluzione solo quando $0 \le k \le 1$;
se invece accettiamo che P, pur dovendo stare sulla retta AB, possa anche essere esterno al segmento,
allora sarà ammissibile qualunque valore di k e, in particolare,
dare a k un valore <0 porterà a trovare il punto P esternamente al segmento e dalla parte di A
(qui anche la retta AB è pensata orientata, da A verso B);
dare a k un valore >1 porterà a trovare il punto P esternamente al segmento e dalla parte di B.

ESEMPIO



Sono dati i due punti $A(-3,2);\ B(5,4)$;

determinare su AB un punto P tale che sia $AP = \frac{1}{4}AB$.

$$x_P = x_A + \frac{1}{4}(x_B - x_A) = -3 + \frac{1}{4}(5-(-3)) = -3 + \frac{1}{4} \cdot 8 = -3 + 2 = -1$$
$$y_P = y_A + \frac{1}{4}(y_B - y_A) = 2 + \frac{1}{4}(4-2) = 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

ALTRO ESEMPIO

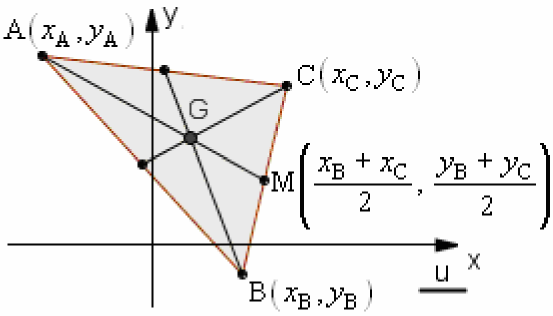
Sempre con riferimento ai punti precedenti, determinare sulla retta AB un punto Q tale che sia $AQ = -\frac{1}{4}AB$.

$$x_Q = x_A - \frac{1}{4}(x_B - x_A) = -3 - \frac{1}{4}(5-(-3)) = -3 - \frac{1}{4} \cdot 8 = -3 - 2 = -5$$
$$y_Q = y_A - \frac{1}{4}(y_B - y_A) = 2 - \frac{1}{4}(4-2) = 2 - \frac{1}{4} \cdot 2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

e il punto $Q\left(-5, \frac{3}{2}\right)$ si trova sul prolungamento di AB dalla parte di A.

COORDINATE DEL BARICENTRO (= punto di incontro delle mediane) DI UN TRIANGOLO

Una proprietà nota del baricentro di un triangolo, è che esso
divide ciascuna mediana in due parti, tali che quella contenente il vertice è doppia dell'altra
(quindi, è i $\frac{2}{3}$ dell'intera mediana: $AG = \frac{2}{3}AM$).



Consideriamo allora la figura qui a fianco. Avremo

$$\boxed{x_G =} \, x_A + \frac{2}{3}(x_M - x_A) = x_A + \frac{2}{3}\left(\frac{x_B + x_C}{2} - x_A\right) =$$
$$= x_A + \frac{x_B + x_C}{3} - \frac{2}{3}x_A = \ldots \boxed{= \frac{x_A + x_B + x_C}{3}}$$

… e analogamente si procede per l'ordinata.

Coordinate del BARICENTRO G di un triangolo ABC:

$$\boxed{x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}}$$

ESEMPIO Il baricentro del triangolo ABC, con $A(1,1);\ B(-1,2);\ C(3,-3)$, ha coordinate
$\left(\frac{1-1+3}{3}, \frac{1+2-3}{3}\right) = (1, 0)$. Disegna tu la figura!