7. ESERCIZI

SULLA DISTANZA FRA DUE PUNTI

1) Calcola le distanze fra le seguenti coppie di punti:

a) $A(0,2);\ B(6,10)$ b) $A(-8,3);\ B(7,-5)$ c) $A(0,-3);\ B(0,-7)$

d) $A(2,-1);\ B\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ e) $A(10,-1);\ B(6,2)$ f) $A(3,42);\ B(12,2)$

g) $A\left(-\frac{1}{6},-2\right);\ B\left(\frac{3}{2},2\right)$ h) $A(1,1);\ B(\pi,0)$ i) $O(0,0);\ P(a,b)$

2) Determina il perimetro del triangolo di vertici $A(1,-4);\ B(13,-9);\ C(1,0)$
3) Determina il perimetro del triangolo di vertici $D(-7,3);\ E(7,3);\ F(2,-9)$
4) Trova il perimetro di PQR, con $P(-4,2);\ Q(-1,-2);\ R(5,6)$ (il risultato conterrà un radicale)
5) Il triangolo di vertici $D(-3,3);\ E(0,-1);\ F(-7,0)$ è isoscele: dimostralo, e calcola la sua base.
6) Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-2,6);\ B(10,1);\ C(7,-3);\ D(-5,2)$ è un parallelogrammo, utilizzando esclusivamente la formula per la distanza fra due punti.
7) Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-2,2);\ B\left(0,\frac{7}{2}\right);\ C\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right);\ D\left(-\frac{1}{2},0\right)$ è un quadrato, utilizzando esclusivamente la formula per la distanza fra due punti.
8) Verifica che il triangolo di vertici $O(-2,-1);\ A(10,-10);\ B(22,6)$ è rettangolo utilizzando esclusivamente la formula per la distanza fra due punti.
9) Determina quel punto P dell'asse y che è equidistante da $A(4,-1)$ e da $B(3,-2)$ (indicazione: il generico punto dell'asse y ha coordinate $(0,y)$; il problema è perciò risolto dall'equazione …)
10) Determina quel punto P dell'asse x che è equidistante da $O(0,0)$ e da $Q\left(-\frac{4}{5},\frac{12}{5}\right)$ (indicazione: il generico punto dell'asse x è $(x,0)$; il problema è perciò risolto dall'equazione …)
11) Quale punto della retta $y=1-x$ è equidistante dall'origine e dal punto $A(4,2)$? Indicazione: un generico punto della retta $y=1-x$ ha coordinate $(x,1-x)$ …
12) Determina il centro e il raggio della circonferenza passante per i tre punti $A(0,2);\ B(1,-1);\ C(8,-2)$ (indicazione: il centro è quel punto P, di coordinate (x,y), tale che $PA=PB=PC$. Basterà perciò impostare le due equazioni $PA=PB$ e $PA=PC$ e porle a sistema …)

SUL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

13) Calcola le coordinate del punto medio del segmento AB, essendo

a) $A(3,5);\ B(-1,9)$ b) $A(-4,0);\ B(-3,0)$ c) $A(-2,-4);\ B(0,2)$

d) $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right);\ B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)$ e) $A(k,-3);\ B(1,-3)$ f) $A(a+b,\ a-b);\ B(a-b,\ b)$

g) $A(3.6,\ 0.4);\ B(1.4,\ -0.5)$ h) $A\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{3}\right);\ B\left(-\frac{1}{2},-1\right)$

14) Calcola le coordinate dei punti medi I, L, M, N dei lati del quadrilatero ABCD, essendo $A(-3,1);\ B(1,-5);\ C(5,7);\ D(1,7)$
Il quadrilatero che ha per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero qualsiasi è sempre un parallelogrammo: verificalo in questo caso particolare, constatando i lati opposti di ILMN sono a due a due uguali.
15) M è il punto medio di PQ, essendo $P(0,1);\ Q(-4,3)$. Che coordinate ha N, punto medio di PM?
16) Nell'esercizio 6 si è verificato che ABCD, con $A(-2,6);\ B(10,1);\ C(7,-3);\ D(-5,2)$, è un parallelogrammo; ma allora le sue diagonali dovrebbero tagliarsi scambievolmente per metà, vale a dire i loro punti medi dovrebbero coincidere. Verificalo.
17) Se $M(1,-1)$ è il punto medio del segmento AB e $A(-4,3)$, quali sono le coordinate di B?
18) Se $M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{4}\right)$ è il punto medio del segmento AB e $A\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$, quali sono le coordinate di B?
19) Trova le coordinate del punto R, simmetrico di $T(-4,2)$ rispetto a $S(-1,-3)$
20) Trova il quarto vertice del parallelogrammo che ha tre vertici in $A\left(-3,\frac{13}{2}\right);\ B(-2,4);\ C(3,2)$
21) Per quale valore di k il segmento di estremi $A(3,1);\ B(k,k)$ ha come punto medio il punto $(k-1,\ k-3)$?

SULL'EQUAZIONE DI UNA CURVA (FORMA ESPLICITA, FORMA IMPLICITA)

ESEMPI

- **Portare l'equazione $\boxed{\mathbf{8x-2y-1=0}}$ in forma esplicita**

  Si tratta di isolare *y* a primo membro:

  $$8x-2y-1=0;\ -2y=-8x+1;\ 2y=8x-1;\ y=\frac{8x-1}{2};\ \boxed{\boldsymbol{y=4x-\frac{1}{2}}}$$

- **Viceversa: Portare l'equazione $\boxed{\boldsymbol{y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{12}}}$ in forma implicita**

  Portare tutto a 1° membro, in modo che il 2° membro sia 0; sarà bene mandare pure via i denominatori:

  $$y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{12};\ 12y=-9x+1\ (\textit{abbiamo moltiplicato per } 12);\ \boxed{9x+12y-1=0}$$

ESERCIZI

22) Porta le seguenti equazioni in forma esplicita:

a) $x+y-1=0$ b) $3x-y+4=0$ c) $x+4y-6=0$
d) $2x+3y=0$ e) $x-5y-10=0$ f) $4x-3y=2$
g) $y+x^2-x+6=0$ h) $x^2-2y-4x=0$ i) $xy+12=0$
j) $y^2-x^2=4$ k) $xy+2y-1=0$ l) $y^2+2y-x=0$ (*eq. di 2° grado*)

23) Porta le seguenti equazioni in forma implicita:

m) $y=-3x+8$ n) $y=x+2$ o) $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}$ p) $y=\frac{x-7}{2}$
q) $y=-\frac{4}{3}x$ r) $y=x^2+x$ s) $\frac{x}{y}=3$ t) $y=\sqrt{x}$

SULL'APPARTENENZA DI UN PUNTO A UNA CURVA

24) E' data la curva $C:\ x^2+y^2=25$.
Stabilire quali fra i punti seguenti vi appartengono: $A(-4,3);\ B(1,6);\ C(0,-5)$
25) E' data la curva di equazione $xy=6$.
Stabilire quali fra i punti seguenti vi appartengono: $P(4,\ 3/2);\ Q\left(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}\right);\ R(4,2)$
26) Per quale valore del parametro k il punto A(3,2) appartiene alla curva di equazione $(k-1)x+ky+8=0$?
27) Per quale valore di a la curva $x^2-y^2+2ax+3a-1=0$ passa per l'origine?
28) Determinare m in modo che il punto $P(m,\ m+1)$ appartenga alla retta $x+y-5=0$
29) Trovare i punti di ascissa –3 della curva $x^2+y^2=25$
30) Trovare il punto di ordinata 2 della retta $r:5x-y+1=0$

SULL'INTERSEZIONE DI DUE CURVE

31) Trova il punto d'intersezione delle due rette $r_1:y=x+3$ e $r_2:y=-2x+9$.
32) Determina i vertici del triangolo i cui lati sono le rette di equazioni: $y=2,\ \ y=4x+10,\ \ y=5-x$
33) In quale punto si tagliano le due rette $r_1:2x-y-3=0$ e $r_2:6x-3y-2=0$?
34) Trova i punti di intersezione fra: $C:x^2+y^2=25$ ed $r:x+3y+15=0$ (*sistema di grado sup. al* 1°)
35) Trova i punti comuni alla circonferenza $x^2+y^2=25$ e all'iperbole $xy=6$ (*sistema di grado sup. al* 1°)

SULLA DIVISIONE DI UN SEGMENTO IN PARTI, E SUL BARICENTRO DI UN TRIANGOLO

36) $A(1,1);\ B(9,5)$. Determina i punti P, Q, R, S, T che dividono il segmento AB, rispettivamente:
a) in parti proporzionali ai numeri 3 e 5 (P) b) in parti proporzionali ai numeri 3 e 2 (Q)
c) in modo che sia $AR=\frac{1}{3}RB$ d) in modo che sia $AS=\frac{1}{3}AB$ e) in modo che sia $AT=-2AB$
37) Determina il baricentro:
a) di ABC, con $A(3,2);\ B(10,-5);\ C(-1,-3)$ b) di DEF, con $D(-3,-2);\ E(-1,0);\ F(2,4)$
c) di ILM, con $I\left(\frac{1}{4},-\frac{5}{3}\right);\ L\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right);\ M\left(0,-\frac{1}{4}\right)$
38) Se due vertici di ABC sono $A(-3,4);\ B(0,2)$ e il baricentro è $G(1,3)$, che coordinate ha il vertice C?
39) Se un vertice di ABC è $A(3,-2)$ e il baricentro è $G(-1,4)$, che coordinate ha il punto medio M di BC?
40) Se un vertice del triangolo ABC è $A(5,5)$ e il baricentro è $G(-19,-5)$, quanto misura la mediana AM?

RISPOSTE

1) a) 10 b) 17 c) 4 d) 5/2 e) 5 f) 41 g) 13/3 h) $\sqrt{\pi^2-2\pi+2}\approx 2{,}36$ i) $\sqrt{a^2+b^2}$

2) 32 3) 42 4) $15+\sqrt{97}$ 5) In effetti, è $\overline{DE}=\overline{DF}=5$. $base=\overline{EF}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

6) Occorrerà controllare che i lati opposti siano a due a due uguali. E si trova $AB=DC=13$ e $AD=CB=5$.

7) Si deve verificare che i quattro lati sono uguali, e pure le diagonali sono uguali!
Si trova $AB=BC=CD=DA=5/2$, $AC=BD=\sqrt{\frac{50}{4}}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

8) Basta verificare che la somma dei quadrati di due lati uguaglia il quadrato del lato rimanente:
si potrà allora concludere che il triangolo è rettangolo per l'inverso del Teorema di Pitagora.

9) L'equazione è $\sqrt{(0-4)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(y+2)^2}$
e per mandar via le radici si eleveranno al quadrato entrambi i membri. Si trova $P(0,2)$.

10) Analogo al problema precedente. Si trova $P(-4,0)$.

11) Il punto è $P(4,-3)$. Il problema si risolve con l'equazione $\sqrt{(x-0)^2+(1-x-0)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(1-x-2)^2}$

12) Il centro è $(5,2)$, il raggio è 5. Il sistema risolvente è $\begin{cases}\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}\\ \sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-8)^2+(y+2)^2}\end{cases}$

13) a) $(1,7)$ b) $\left(-\frac{7}{2},0\right)$ c) $(-1,-1)$ d) $\left(\frac{3}{8},\frac{4}{15}\right)$ e) $\left(\frac{k+1}{2},-3\right)$ f) $\left(a,\frac{a}{2}\right)$ g) $(2.5,-0.05)$ h) $\left(-\frac{1}{8},-\frac{2}{3}\right)$

14) $(-1,-2)$; $(3,1)$; $(3,7)$; $(-1,4)$; due lati opposti di ILMN misurano 5 e gli altri due 6

15) $N\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ 16) In effetti, sia AC che BD hanno per punto medio $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$

17) $B(6,-5)$ 18) $B\left(\frac{7}{6},-1\right)$ 19) $R(2,-8)$ 20) $D\left(2,\frac{9}{2}\right)$

21) Per nessun valore di k: dovrebbe risultare simultaneamente sia $\frac{3+k}{2}=k-1$ che $\frac{1+k}{2}=k-3$,
ma le due equazioni hanno soluzioni diverse: non esiste un valore di k che le soddisfi entrambe.

22)
a) $y=-x+1$ b) $y=3x+4$ c) $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$
d) $y=-\frac{2}{3}x$ e) $y=\frac{1}{5}x-2$ f) $y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$
g) $y=-x^2+x-6$ h) $y=\frac{1}{2}x^2-2x$ i) $y=-\frac{12}{x}$ (*la condizione $x\neq 0$ si può scrivere, ma a ben guardare è inutile: sapresti dire perché?*)
j) $y=\pm\sqrt{x^2+4}$ k) $y=\frac{1}{x+2}$ l) $y=-1\pm\sqrt{1+x}$

23)
m) $3x+y-8=0$ n) $-x+y-2=0$ o $x-y+2=0$ o) $-5x+15y+3=0$ o $5x-15y-3=0$ p) $-x+2y+7=0$ o $x-2y-7=0$
q) $4x+3y=0$ r) $x^2+x-y=0$ s) $x-3y=0$, con $y\neq 0$ t) $x-y^2=0$, con $x\geq 0$, $y\geq 0$

24) A: sì, appartiene B: no C: sì 25) P: sì Q: sì R: no 26) $k=-1$ 27) $a=1/3$

28) $m=2$ 29) $(-3,-4)$; $(-3,4)$ 30) $(1/5,\ 2)$ 31) $(2,\ 5)$ 32) $(-2,2)$; $(3,2)$; $(-1,6)$

33) In nessun punto: sono parallele 34) $A(0,-5)$; $B(-3,-4)$

35) 4 intersezioni: $\left(\frac{\sqrt{37}\pm\sqrt{13}}{2},\frac{\sqrt{37}\mp\sqrt{13}}{2}\right)$; $\left(\frac{-\sqrt{37}\pm\sqrt{13}}{2},\frac{-\sqrt{37}\mp\sqrt{13}}{2}\right)$

36) $P\left(4,\frac{5}{2}\right)$ $Q\left(\frac{29}{5},\frac{17}{5}\right)$ $R(3,2)$ $S\left(\frac{11}{3},\frac{7}{3}\right)$ $T(-15,-7)$ 37) a) $(4,-2)$ b) $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ c) $\left(\frac{1}{36},-\frac{29}{36}\right)$

38) $C(6,3)$ 39) $M(-3,7)$ 40) $AM=39$

ALTRI ESERCIZI (risposte alla pagina successiva)

41) I punti (x,y) del piano cartesiano le cui coordinate soddisfano le due condizioni $-3 \le x \le 5,\ 5 \le y \le 11$, formano un rettangolo.
Qual è la sua area?
Che coordinate ha il punto di intersezione delle diagonali?

42) Che figura geometrica formano, sul piano cartesiano,
   a) i punti per i quali il valore assoluto dell'ordinata vale 1?
   b) i punti (x,y) per i quali $y > x$?
   c) i punti (x,y) per i quali $x^2 + y^2 > 25$?

43) E' possibile, sul piano cartesiano, trovare 3 punti A, B, C tali che $AB = 32,\ BC = 16,\ AC = 8$?
E tre punti P, Q, R per cui $PQ = 12,\ QR = 8,\ RP = 4$?

44) Quali sono i punti sull'asse *x* che "vedono" il segmento AB, con $A(-3,4)$ e $B(2,1)$, sotto un angolo retto?
Puoi rispondere a questa domanda conoscendo esclusivamente
la formula per la distanza fra due punti
e il Teorema di Pitagora col suo inverso!
(*Equazione di* 2° *grado*)

45) Scrivi l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti dai due punti $O(0,0)$ e $A(2,2)$.
Verifica che i due punti di coordinate $(1,1)$ e $(0,2)$
soddisfano entrambi, com'era prevedibile, l'equazione trovata.
Porta questa in forma esplicita e disegna la curva: vedrai che si tratta, ovviamente, di una retta.
In Geometria, che nome si dà a questa retta?

46) Se un punto P ha coordinate (x,y), qual è l'espressione, contenente *x* e/o *y*, che fornisce la sua distanza
   a) dall'origine
   b) dall'asse *x*
   c) dall'asse *y*?

47) Qual è il luogo dei punti che hanno la proprietà di essere equidistanti dall'origine O(0,0) e dall'asse *x*?
Puoi rispondere sia col ragionamento geometrico puro, senza pensare alle coordinate,
sia scrivendo l'equazione del luogo geometrico …

48) Considera il triangolo rettangolo OAB, con
$O(0,0);\ A(a,0);\ B(0,b)$,
e verifica che la mediana relativa all'ipotenusa è uguale a metà dell'ipotenusa stessa.

RISPOSTE

41) Area = 48.
Le diagonali si intersecano in $(1,8)$.

42) a) Sono distribuiti su due rette, parallele all'asse *x*, di equazioni $y=1$ e $y=-1$ rispettivamente.
b) Un semipiano, privato della sua retta origine
c) $x^2+y^2>25$ equivale a $\sqrt{x^2+y^2}>5$.
Ma $\sqrt{x^2+y^2}$ è la distanza di (x, y) dall'origine.
Allora la figura è formata da tutti i punti del piano, tranne quelli del cerchio di centro O e raggio 5.

43) E' possibile, sul piano cartesiano, trovare 3 punti A, B, C tali che $AB=32,\ BC=16,\ AC=8$?
No, perché in un triangolo ciascun lato è sempre minore della somma degli altri due
("relazione triangolare"), mentre qui 32 *non* è <16+8.
Inoltre i tre punti non possono essere allineati,
perché in questo caso, fra i segmenti in gioco,
ce ne sarebbero due con somma uguale al terzo segmento:
ora, ciò coi nostri 3 segmenti non avviene.

E tre punti P, Q, R per cui $PQ=12,\ QR=8,\ RP=4$?
Sì. I tre punti saranno allineati, con R compreso fra P e Q.

44) Un punto P dell'asse *x* ha coordinate $P(x,0)$.
L'angolo $A\hat{P}B$ sarà retto se e solo se $PA^2+PB^2=AB^2$.
Si trova che i due punti hanno coordinate $(-2,\ 0)$ e $(1,\ 0)$.

45) Si considera il generico punto $P(x, y)$ del piano e si traduce in coordinate la condizione $PO=PA$.
Ci si libera dalle radici elevando al quadrato.
Si trova $y=-x+2$, retta che è l'*asse* del segmento AB.

46)
a) $\sqrt{x^2+y^2}$
b) $|y|$
c) $|x|$

47) Il luogo è … l'asse *y*.
Tutti, e soli, i punti dell'asse *y*, ossia tutti e soli i punti di ascissa nulla $(x=0)$
hanno la proprietà di essere equidistanti dall'origine e dall'asse *x*.

$$\sqrt{x^2+y^2}=|y|;\quad x^2+y^2=|y|^2\quad x^2\cancel{+y^2}=\cancel{y^2}\quad x^2=0\quad x=0.$$

48) In effetti, $AB=\sqrt{a^2+b^2}$ e $OM=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$