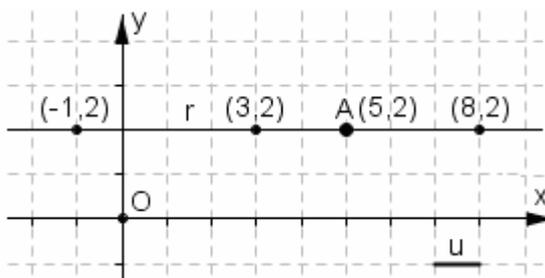


8. L'EQUAZIONE DI UNA RETTA

□ Equazione di una parallela all'asse x

Qual è l'equazione della retta, parallela all'asse x , passante per il punto $A(5,2)$?



I punti della retta in questione sono tutti e soli i punti del piano cartesiano, che godono della proprietà di avere ordinata uguale a 2.

$$P(x, y) \in r \leftrightarrow y = 2$$

Quindi l'uguaglianza $y = 2$ costituisce l'equazione della retta considerata.

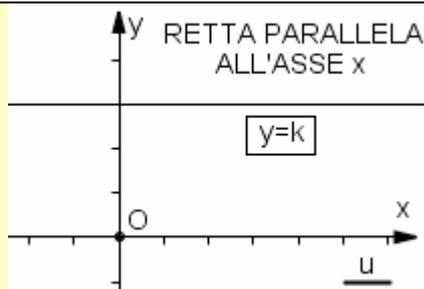
In generale:

una **RETTA PARALLELA ALL'ASSE x**

ha equazione

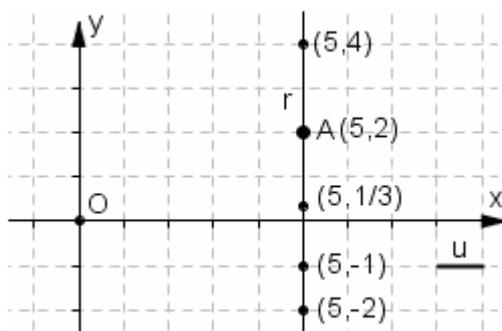
$$y = k,$$

essendo k l'ordinata costante di tutti i suoi punti, o, se si preferisce, l'ordinata di uno qualsiasi dei suoi punti.



□ Equazione di una parallela all'asse y

Qual è l'equazione della retta, parallela all'asse y , passante per il punto $A(5,2)$?



I punti della retta in questione sono tutti e soli i punti del piano cartesiano, che godono della proprietà di avere ascissa uguale a 5.

$$P(x, y) \in r \leftrightarrow x = 5$$

Quindi l'uguaglianza $x = 5$ costituisce l'equazione della retta considerata.

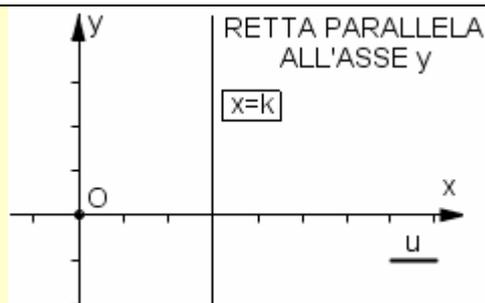
In generale:

una **RETTA PARALLELA ALL'ASSE y**

ha equazione

$$x = k,$$

essendo k l'ascissa costante di tutti i suoi punti, o, se si preferisce, l'ascissa di uno qualsiasi dei suoi punti.



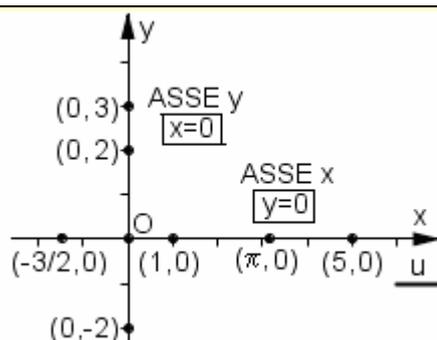
□ Equazioni degli assi cartesiani

Anche i due assi cartesiani stessi possono essere visti come particolari rette collocate nel piano cartesiano.

L'equazione dell' **ASSE x** , visto come particolare retta inserita nel piano cartesiano, è

$$y = 0:$$

infatti un punto $P(x, y)$ appartiene all'asse x se e solo se la sua ordinata y è nulla.



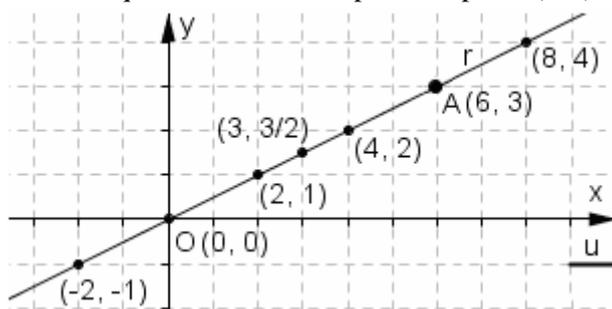
L'equazione dell' **ASSE y** , visto come particolare retta inserita nel piano cartesiano, è

$$x = 0:$$

infatti un punto $P(x, y)$ appartiene all'asse y se e solo se la sua ascissa x è nulla.

□ **Retta passante per l'origine (e non coincidente né con l'asse x , né con l'asse y)**

Scrivere l'equazione della retta passante per $O(0,0)$ e per $A(6,3)$



Nella figura, abbiamo segnato le coordinate di alcuni punti della retta in questione.

Si capisce chiaramente che appartengono alla retta considerata tutti e soli i punti $P(x, y)$, la cui ordinata y è la metà dell'ascissa x .

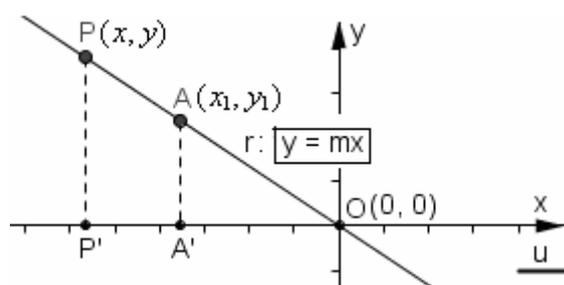
$$P(x, y) \in r \leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$$

Pertanto la retta considerata ha equazione $y = \frac{1}{2}x$.

Generalizzando,

se si va a prendere la retta passante per l'origine e per un altro punto $A(x_1, y_1)$ (con $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$),

si può dimostrare che l'equazione di una tale retta è $y = mx$, avendo posto $m = \frac{y_1}{x_1}$. Infatti:



$$P(x, y) \in r \leftrightarrow$$

\leftrightarrow $PP'O$ simile con $AA'O$,
e P situato nello stesso quadrante di A ,
oppure nel quadrante opposto al vertice \leftrightarrow

$$\leftrightarrow P'P:OP' = A'A:OA' \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow y : x = y_1 : x_1 \leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} \leftrightarrow y = \frac{y_1}{x_1}x \leftrightarrow y = mx$$

□ Nella proporzione $P'P:OP' = A'A:OA'$ i segmenti in gioco vanno pensati come **ORIENTATI** e, quindi, le loro misure come **RELATIVE**:
ad esempio, nella nostra figura, è $P'P > 0$, $OP' < 0$, $A'A > 0$, $OA' < 0$ (e risulta poi $m < 0$).

□ A ben guardare, la catena di biimplicazioni ha senso solo pensando il punto $P(x, y)$ distinto dall'origine. Infatti, in caso contrario, il triangolo $PP'O$ sarebbe ridotto ad un punto, e comunque ci ritroveremmo con dei segmenti di misura nulla a denominatore. Ma se consideriamo soltanto l'equazione alla quale siamo pervenuti alla fine, ossia la $y = mx$, vediamo che essa risulta soddisfatta *anche* dalle coordinate $x = 0$, $y = 0$ dell'origine.

□ L'equazione $y = mx$ è stata ricavata supponendo $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$ e quindi anche $m = \frac{y_1}{x_1} \neq 0$.

Tuttavia, l'equazione dell'asse x , che già sappiamo essere $y = 0$, si può, volendo, pensare come ottenibile scrivendo $y = mx$ e poi ponendo $m = 0$.

Quindi, in definitiva, possiamo concludere che *qualsiasi* retta per l'origine ha equazione della forma $y = mx$, *tranne* la retta verticale per l'origine (ossia l'asse y), la cui equazione ($x = 0$) NON si può porre sotto la forma $y = mx$.

L'equazione di una retta passante per $O(0,0)$ e per $A(x_1, y_1)$ (e non coincidente con l'asse y) è

$$y = mx, \text{ avendo posto } m = \frac{y_1}{x_1}.$$

In altre parole, presa una qualsivoglia retta per l'origine (non coincidente con l'asse y),

la sua equazione è sempre della forma $y = mx$

dove la costante m è il rapporto fra la y e la x di un punto qualsiasi (a parte l'origine) della retta stessa.

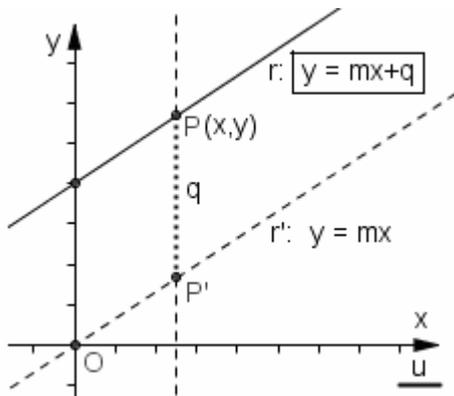
In $y = mx$, la costante m è detta "COEFFICIENTE ANGOLARE" perché caratterizza l'inclinazione della retta in questione, ossia l'angolo che questa forma con l'asse delle x . Basti pensare che ponendo $x = 1$ si ottiene $y = m$, quindi alla retta considerata appartiene, in particolare, il punto $(1, m)$.

Perciò

- se $m > 0$ la retta sarà "in salita" (ovvio: se supponiamo, come solitamente è, che l'asse x sia orizzontale!)
- se $m < 0$ sarà "in discesa"
- e quanto più grande è il valore assoluto di m , tanto più l'inclinazione della retta sarà accentuata.

Nel caso $m = 0$, l'equazione diventa $y = 0$ (asse x , inclinazione "orizzontale").

□ Retta (non parallela all'asse y) in posizione generica



Data una retta r non parallela all'asse y , consideriamo la retta ausiliaria r' , parallela ad r e passante per O .

Poiché la retta r' passa per l'origine, la sua equazione sarà della forma $y = mx$, con m costante opportuna.

Se ora consideriamo una coppia di punti $P \in r$ e $P' \in r'$, situati su di una stessa parallela all'asse y , possiamo osservare che la misura del segmento orientato PP' si mantiene, al variare di P , costante: la indicheremo con q .

I punti di r sono perciò tutti e soli quei punti del piano cartesiano, che si possono ottenere a partire da un punto di r' , lasciandone inalterata l'ascissa ma incrementando (algebricamente) l'ordinata della costante q .

Ciò significa che, mentre il punto di ascissa x della retta r' ha ordinata mx , il punto di ascissa x della retta r ha ordinata $mx + q$.

Perciò l'uguaglianza che è verificata dalle coordinate di tutti e soli i punti che appartengono alla retta r , è l'uguaglianza

$$y = mx + q$$

Concludendo,
l'equazione di una retta in posizione generica
 (con esclusione però delle rette parallele all'asse y) è
 $y = mx + q$, essendo m, q due costanti opportune.

SIGNIFICATO DI q nell'equazione $y = mx + q$

Nell'equazione $y = mx + q$, se si pone $x = 0$, si ottiene $y = q$; quindi la retta $y = mx + q$ passa per il punto $(0, q)$.

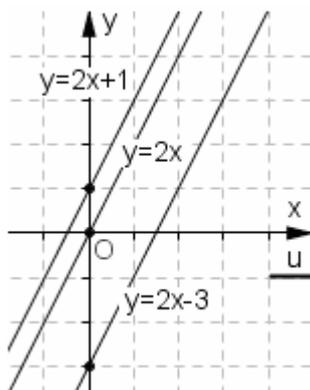
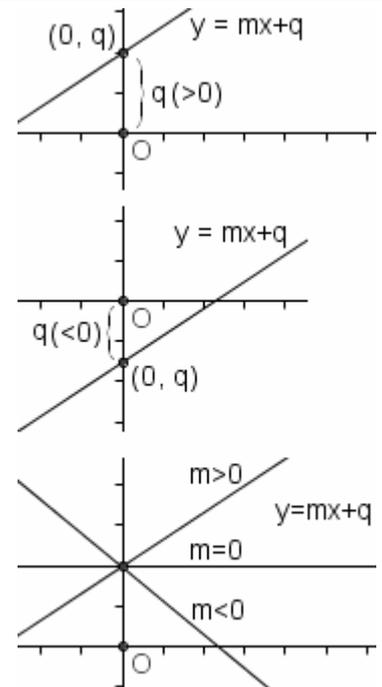
Ciò comporta che data la retta di equazione $y = mx + q$, **q rappresenta l'ordinata del punto di quella retta, avente ascissa 0; in altre parole, q è l'ordinata del punto in cui la retta taglia l'asse delle y .**

La costante q viene perciò detta "ordinata all'origine": modo conciso per affermare che q è l'ordinata di quel punto della retta che sta sopra (se $q > 0$) o sotto (se $q < 0$) l'origine. Naturalmente, se $q = 0$ ritroviamo come caso particolare la retta passante per l'origine.

SIGNIFICATO DI m nell'equazione $y = mx + q$

La costante m , che come abbiamo visto è il coefficiente angolare della retta r' passante per l'origine e parallela alla nostra retta r : $y = mx + q$, viene ancora detta "coefficiente angolare" e conserva lo stesso significato che aveva in relazione ad una retta $y = mx$ passante per O : individua dunque l'inclinazione della retta, con le solite corrispondenze:

- $m > 0$ → retta "in salita";
- $m < 0$ → retta "in discesa";
- $m = 0$ → retta "orizzontale" (voglio dire, parallela all'asse x);
- $|m|$ grande → inclinazione (salita o discesa) ripida.



←
 Quindi rette fra loro **parallele** hanno **ugual valore di m** (figura qui a sinistra) ...

→
 ... e rette che **intersecano l'asse y nel medesimo punto** hanno **ugual valore di q** (figura qui a destra).

