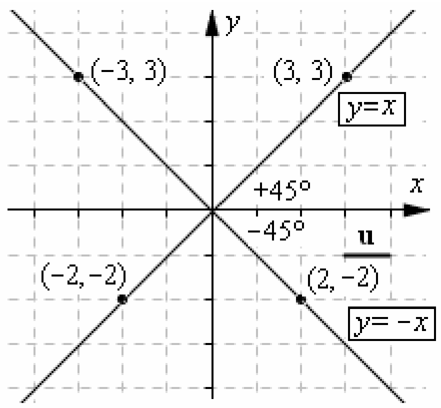
11. APPROFONDIMENTI SUL COEFFICIENTE ANGOLARE

BISETTRICI DEI QUADRANTI E RETTE INCLINATE DI 45°

- ♥ **La bisettrice del 1° e 3° quadrante ha equazione $y = x$**
  (è il luogo dei punti del piano cartesiano
  la cui ordinata è uguale all'ascissa).
  Quindi **il coefficiente angolare $m = 1$**
  contraddistingue le rette che, rispetto all'asse orizzontale,
  sono inclinate di **45° in salita (+ 45°)**.

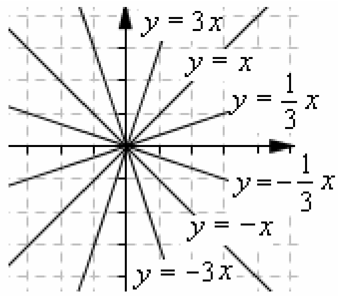
- ♥ **La bisettrice del 2° e 4° quadrante ha equazione $y = -x$**
  (è il luogo dei punti del piano cartesiano
  la cui ordinata è uguale all'opposto dell'ascissa).
  Quindi **il coefficiente angolare $m = -1$**
  contraddistingue le rette che, rispetto all'asse orizzontale,
  sono inclinate di **45° in discesa (– 45°)**.



Le bisettrici dei quadranti

RETTE CON INCLINAZIONE MAGGIORE, O MINORE, DI 45°

- **Una retta, con inclinazione (in salita o in discesa) > 45°, ha $|m| > 1$;**
  una retta, con inclinazione (in salita o in discesa) < 45°, ha $0 \le |m| < 1$
- **Due rette, che siano ugualmente inclinate,**
  ma una in salita e l'altra in discesa,
  hanno coefficienti angolari fra loro OPPOSTI.
- ♥ **Si può dimostrare che due rette PERPENDICOLARI**
  hanno coefficienti angolari fra loro ANTIRECIPROCI
  (si dice "antireciproco" l'opposto del reciproco).



LA PROPRIETA' FONDAMENTALE DEL COEFFICIENTE ANGOLARE

Prendi una retta qualsiasi: che so, la $y = 2x + 3$.
Adesso, assegna a x due valori, per calcolare i corrispondenti valori di y e determinare dunque due punti della retta stessa.
Ad esempio,

- puoi porre $x = 1$, e avrai quindi $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ e di conseguenza un primo punto $A(1, 5)$;
- poi puoi porre $x = 4$, e avrai quindi $y = 2 \cdot 4 + 3 = 11$ da cui un secondo punto $B(4, 11)$.

Ora vai a calcolare il rapporto (= quoziente) fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse dei due punti ottenuti:

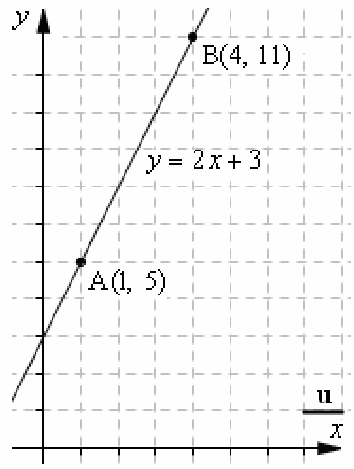
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \underset{\text{NOTA}}{=} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11-5}{4-1} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$$

Come hai potuto vedere, il risultato di questo calcolo coincide col coefficiente angolare m della retta.

Prova con un'altra coppia di punti, fai nuovamente il calcolo:
otterrai ancora lo stesso valore, il valore del coefficiente angolare.
Prendi un'altra retta, considera una coppia di suoi punti: vedrai che il calcolo

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ ovvero } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

darà sempre il coefficiente angolare m di quella retta.



Ecco una retta $y = 2x + 3$, *e due suoi punti* $A(1, 5); B(4, 11)$.
Calcoliamo $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$;
avremo $\frac{11-5}{4-1} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$.
Ma 2 è il coeff. angolare!!!

Vale dunque (ne diamo la dimostrazione generale alla pag. seguente)
la **formula**

♥ $$\boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m}$$ (importantissima!)

Data una retta di equazione $y = mx + q$,
il suo coefficiente angolare m
è uguale al rapporto
fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse
di due punti qualsiasi della retta stessa.

NOTA - Il simbolo Δ è sovente utilizzato, in matematica, per indicare "differenza".
Ad es., fra due persone che hanno risp. 15 anni e 47 anni, c'è una differenza di età $\Delta e = 47 - 15 = 32$.
Presi, in Fisica, due istanti di tempo successivi t_1 e t_2, nei quali la velocità di un corpo è risp. v_1 e v_2, allora nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ l'incremento di velocità (>, < o = 0) è dato da $\Delta v = v_2 - v_1$.

Dimostrazione Consideriamo una retta non verticale *r*:

$y = mx + q$

e prendiamo su di essa due punti qualsiasi

$A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.

Poiché i due punti sono stati presi sulla retta *r*, risulterà

$y_1 = mx_1 + q$ e $y_2 = mx_2 + q$.

Insomma, le coordinate dei due punti in questione saranno

$(x_1, mx_1 + q)$ e $(x_2, mx_2 + q)$.

Ora si ha

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + q) - (mx_1 + q)}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 \cancel{+q} - mx_1 \cancel{-q}}{x_2 - x_1} = \frac{m\,\cancel{(x_2 - x_1)}}{\cancel{x_2 - x_1}} = m$$

C.V.D.

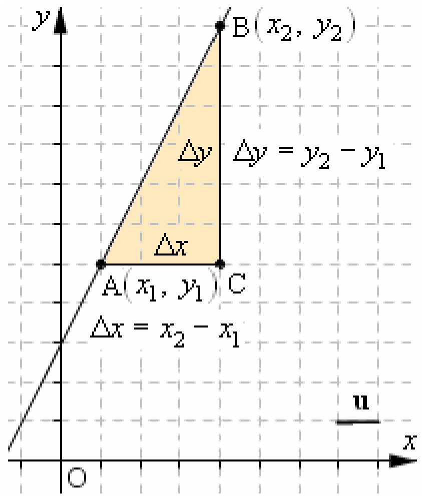
E' utile ed importante osservare (vedi figura) che

♥ le due quantità Δx e Δy
corrispondono alle due misure (con segno)
dei due segmenti orizzontale (Δx) e verticale (Δy)
che occorre percorrere per passare dal primo punto al secondo

… **misure CON SEGNO**, nel senso che
il segmento orizzontale andrà preso col segno
- positivo se viene percorso da sinistra verso destra,
- negativo se viene percorso da destra verso sinistra;

e allo stesso modo

il segmento verticale andrà preso col segno
- positivo se viene percorso dal basso verso l'alto,
- negativo se viene percorso dall'alto verso il basso.



Quanto sopra ci dice che in una funzione "lineare",
ossia della forma
$y = mx + q$
l'incremento di x è proporzionale all'incremento corrispondente di y:
il rapporto fra questi due incrementi è costante.

Si può dimostrare che VALE ANCHE IL VICEVERSA:
se due grandezze x, y sono legate fra loro in modo tale
che l'incremento di x è proporzionale all'incremento corrispondente di y
(se raddoppia uno, raddoppia anche l'altro …)
allora la relazione tra le due grandezze
è della forma
$y = mx + q$.

Segnaliamo infine che molti testi chiamano "**AFFINE**"
una funzione della forma $y = ax + b$,
riservando il termine "**LINEARE**"
solo, o prevalentemente, al caso in cui $b = 0$ ($y = ax$).

ENGLISH
- coefficiente angolare = **slope** (lett.: *pendenza*), o **gradient**
- ordinata all'origine = **y-intercept**
- $\Delta y / \Delta x$ = "**rise over run**" = spostamento *verticale fratto spostamento laterale*

DISEGNARE UNA RETTA CONOSCENDONE UN PUNTO E IL COEFFICIENTE ANGOLARE

Se noi sappiamo che una retta passa per un dato punto P_0,
e conosciamo il coefficiente angolare m di quella retta,
potremo disegnare la retta con precisione
anche senza aver determinato la costante q dell'equazione $\boldsymbol{y = mx + q}$.

Infatti, poiché sappiamo che per il coefficiente angolare vale la formula $\boldsymbol{m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$,

ci basterà fare il disegno in modo che la retta passi per P_0
e per un altro punto P_1 per ottenere il quale partiremo da P_0 e ci sposteremo

- prima orizzontalmente di un segmento orientato Δx
- poi verticalmente di un altro segmento orientato Δy,

dopo aver scelto Δx e Δy in modo tale che il loro quoziente sia uguale a quel valore m che ci interessa.

- Ad esempio (figura 1), per disegnare la retta passante per $P_0(3,3)$ e avente coefficiente angolare $m = 2$, possiamo partire da P_0 e poi spostarci di 1 verso destra ($\Delta x = 1$) e di 2 verso l'alto ($\Delta y = 2$). Troveremo così il nuovo punto P_1, tale che la retta P_0P_1 avrà $m = \Delta y / \Delta x = 2$ e sarà perciò la retta desiderata.
- Facciamo un altro esempio (fig. 2). Per disegnare la retta passante per $A(1,5)$ e di coeff. ang. $m = -3/4$, possiamo partire da A e spostarci di 4 verso destra ($\Delta x = 4$) poi di 3 verso il basso ($\Delta y = -3$). Raggiungeremo così un nuovo punto B e congiungendo A con B il gioco sarà fatto.

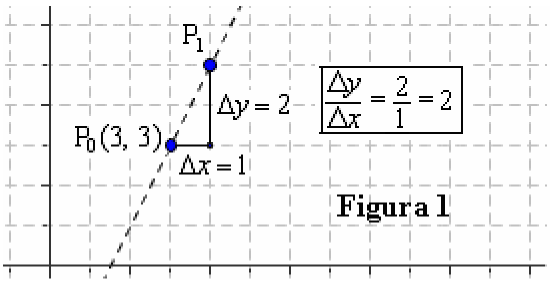


Figura 1

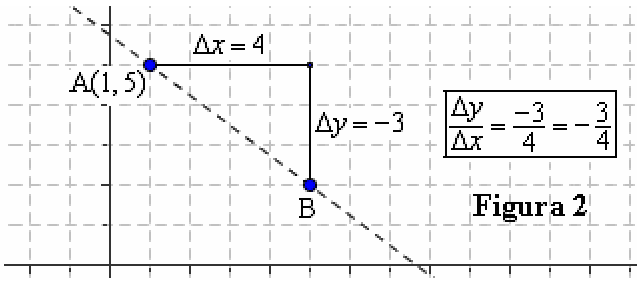


Figura 2

SIGNIFICATO GONIOMETRICO DEL COEFFICIENTE ANGOLARE

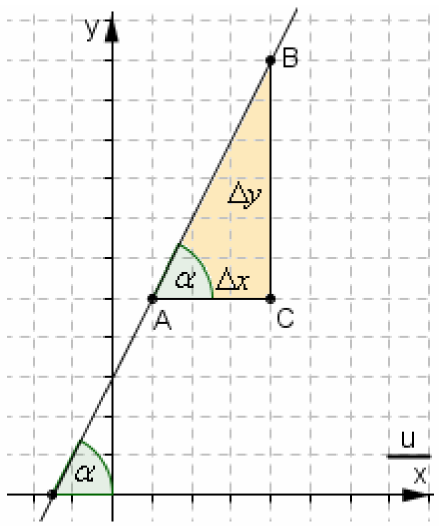
Questa osservazione può essere compresa
solo da chi possiede
qualche nozione di trigonometria.

Indichiamo con α $(0 \le \alpha < 180°)$
l'angolo che la nostra retta
forma con l'asse orientato delle ascisse.
La trigonometria ci insegna che

$$\frac{CB}{AC} = tg\ B\widehat{A}C$$

e allora in definitiva, tenendo conto che $B\widehat{A}C = \alpha$
(angoli corrispondenti formati da due parallele con trasversale),
avremo

$$m = \frac{CB}{AC} = tg\ \alpha$$



Insomma,

il coefficiente angolare di una retta è uguale alla tangente goniometrica dell'angolo α $(0 \le \alpha < 180°)$ che la retta stessa forma con l'asse orientato delle *x*.

Nella figura qui a fianco l'angolo in questione è acuto, ma puoi tu stesso controllare che **la relazione vale, compreso il segno, anche nel caso l'angolo sia ottuso** (**e pure per l'angolo nullo** a cui è possibile pensare nel caso di una retta parallela all'asse *x*).