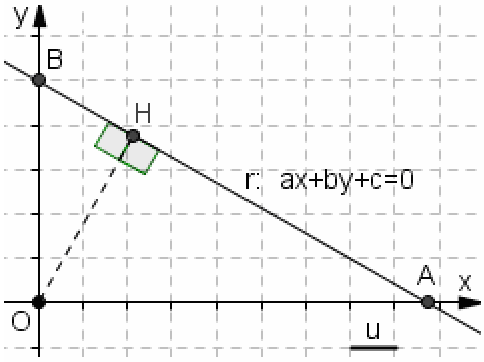
20. DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA

Tramite un cambiamento di riferimento per traslazione degli assi saremo ora in grado di ricavare un'importante formula della Geometria Analitica: la formula per la distanza di un punto da una retta.

DAPPRIMA SI DETERMINA LA FORMULA IN UN CASO PARTICOLARE:
si suppone che il punto assegnato sia l'origine.

Indichiamo con $r: ax+by+c=0$ la retta in questione.
Con riferimento alla figura, $d(\mathrm{O},r)=\mathrm{OH}$ è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo AOB, nel quale A, B sono le intersezioni di r, rispettivamente con l'asse x e con l'asse y.



$$\mathrm{A}: \begin{cases} ax+by+c=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax+c=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{c}{a} \ (a\neq 0) \\ y=0 \end{cases} \quad \mathrm{A}\left(-\frac{c}{a},0\right)$$

$$\mathrm{B}: \begin{cases} ax+by+c=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} by+c=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-\dfrac{c}{b} \ (b\neq 0) \\ y=0 \end{cases} \quad \mathrm{B}\left(-\frac{c}{b},0\right)$$

$$\mathrm{OA}=\left|-\frac{c}{a}\right|=\left|\frac{c}{a}\right|; \quad \mathrm{OB}=\left|-\frac{c}{b}\right|=\left|\frac{c}{b}\right|$$

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)^2+\left(-\frac{c}{b}\right)^2}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{b^2c^2+a^2c^2}{a^2b^2}}=\sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}}=\left|\frac{c}{ab}\right|\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\mathrm{OH}=\frac{cateto\cdot cateto}{ipotenusa}=\frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}{\mathrm{AB}}=\frac{\left|\frac{c}{a}\right|\cdot\left|\frac{c}{b}\right|}{\left|\frac{c}{ab}\right|\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Abbiamo così trovato che la distanza dell'origine dalla retta $r: ax+by+c=0$ è data dalla formula

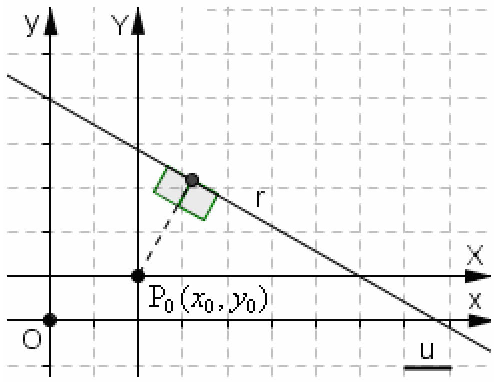
(1) $\boxed{d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

(Si può osservare a posteriori che la formula, ricavata sotto l'ipotesi $a\neq 0 \wedge b\neq 0$, conserva la sua validità anche nei due casi $a=0;\ b=0$)

SUCCESSIVAMENTE, CI SI PONE NEL CASO GENERALE.
Si desidera determinare la distanza del punto $\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$ dalla retta $r: ax+by+c=0$:
insomma, ora il nostro punto non è più necessariamente l'origine.
Ma noi ci ricondurremo al caso particolare già esaminato, tramite un cambiamento di riferimento che porti l'origine in $\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$!

Scriviamo l'equazione della retta $r: ax+by+c=0$ nel nuovo riferimento.

$$\begin{cases} X=x-x_0 \\ Y=y-y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=X+x_0 \\ y=Y+y_0 \end{cases}$$



$$ax+by+c=0 \rightarrow a(X+x_0)+b(Y+y_0)+c=0; \quad aX+ax_0+bY+by_0+c=0; \quad \boxed{aX+bY+\underbrace{ax_0+by_0+c}_{\text{TERMINE NOTO}}=0}$$

Nel riferimento $X\mathrm{P}_0Y$, il punto di cui ci stiamo occupando è l'origine: possiamo perciò applicare la precedente formula (1) ottenendo:

$$d=d(\mathrm{P}_0,r)=\frac{|\text{TERMINE NOTO}|}{\sqrt{(coeff.\ di\ X)^2+(coeff.\ di\ Y)^2}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$ Concludendo

$\boxed{d(\mathrm{P}_0,r)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ **FORMULA PER LA DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA**

ESERCIZIO Serviti della formula per calcolare un'altezza e poi l'area di ABC, con $\mathrm{A}(3,1);\ \mathrm{B}(5,2);\ \mathrm{C}(2,4)$.
(Risultato: $area=7/2$)

Altri esercizi a pag. 49