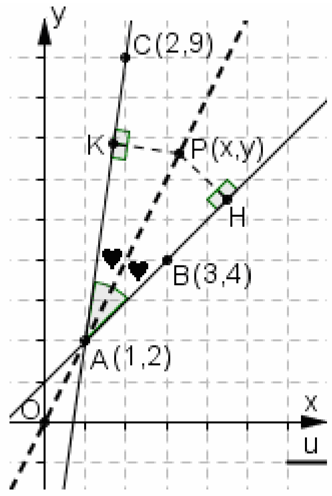
21. BISETTRICE DI UN ANGOLO

La bisettrice di un angolo è definita come
quella semiretta che ha origine nel vertice dell'angolo e lo divide in due parti uguali.
Ma in Geometria si dimostra che la bisettrice risulta essere pure **il luogo dei punti, appartenenti all'angolo, che hanno la proprietà di essere equidistanti dai due lati dell'angolo.**

ESEMPIO. Dati i tre punti: $A(1,2)$; $B(3,4)$; $C(2,9)$, scrivere l'equazione della bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}C$.

Scriveremo l'equazione della bisettrice richiesta traducendo in coordinate la proprietà caratteristica PH = PK , essendo $P(x,y)$ il generico punto del piano cartesiano, H e K le sue proiezioni sui due lati dell'angolo considerato.



Per esprimere in coordinate le due distanze PH e PK
(ciascuna delle quali è la distanza di un punto da una retta),
abbiamo bisogno innanzitutto delle equazioni delle due rette AB, AC.

$\boxed{eq.\ retta\ \mathrm{AB}}$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1};\quad \frac{y-2}{4-2}=\frac{x-1}{3-1};\ \ldots\ ;\ y=x+1\ \ oppure\ \ \boxed{x-y+1=0}$$

$\boxed{eq.\ retta\ \mathrm{AC}}$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1};\quad \frac{y-2}{9-2}=\frac{x-1}{2-1};\ \ldots\ ;\ y=7x-5\ \ oppure\ \ \boxed{7x-y-5=0}$$

Ora impostiamo l'uguaglianza $PH=PK$, cioè $d(P,AB)=d(P,AC)$ dove P è il generico punto $P(x,y)$.
Sappiamo che per calcolare la distanza di un punto da una retta dobbiamo applicare la formula

$$d(P_0,r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ ossia dobbiamo:

- considerare l'equazione della retta in forma IMPLICITA: $ax+by+c=0$
- prenderne soltanto il primo membro $ax+by+c$
- sostituire al posto di x, y le due coordinate del punto in questione
- racchiudere quanto ottenuto entro le stanghette di valore assoluto
- dividere per la quantità $\sqrt{a^2+b^2}$

Equazione bisettrice: $PH=PK$ *ovvero* $d(P,AB)=d(P,AC)$

$$\boxed{\frac{|x-y+1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|7x-y-5|}{\sqrt{49+1}}}$$

perché nel nostro caso il punto è $P(x,y)$ e quindi si tratta di ... sostituire x al posto di x e y al posto di y!

$$\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}=\frac{|7x-y-5|}{5\sqrt{2}}\qquad 5|x-y+1|=|7x-y-5|$$

$$5x-5y+5=\pm(7x-y-5)\left\langle\begin{array}{ll}5x-5y+5=7x-y-5; & \boxed{y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}\\ 5x-5y+5=-7x+y+5; & \boxed{y=2x}\end{array}\right.$$

Che è successo?
Il luogo da noi considerato era una SEMIRETTA, ma qui abbiamo ottenuto le equazioni di DUE RETTE!
Il fatto è che impostando l'uguaglianza $d(P,AB)=d(P,AC)$ e traducendola in coordinate, noi abbiamo scritto, appunto, l'equazione del luogo dei punti la cui distanza dalla retta $r_1=AB$ è uguale alla distanza dalla retta $r_2=AC$; e tale luogo è costituito dalle SEMIRETTE BISETTRICI DI BEN 4 ANGOLI (a 2 a 2 opposti al vertice), o, se si preferisce, dalle due rette una delle quali fa da bisettrice per l'angolo $B\widehat{A}C$ e per il suo opposto al vertice, l'altra fa da bisettrice per la coppia di angoli opposti al vertice che sono adiacenti a $B\widehat{A}C$.
Ora, **fra le due rette trovate, una delle due andrà scartata**.

E' evidente che **la retta che va bene per noi è quella** "in salita" ovvero **con coeff. angolare >0**: la $\boxed{y=2x}$.

ESERCIZIO Trovare le coordinate dell'incentro del triangolo formato dalle tre rette

$$y=\frac{1}{4}x+3;\quad y=-4x+3;\quad 5x-3y-8=0\quad [\text{Soluzione: } I\left(\frac{5}{2}\left(2-\sqrt{2}\right),\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)]$$

Altri esercizi a pag. 49