23. ESERCIZI CONCLUSIVI SULLA RETTA

1) a) Calcolare la distanza fra le due rette parallele $y = 2x + 4;\ \ y = 2x - 1$.
   b) Scrivere l'equazione del luogo dei punti del piano cartesiano, equidistanti dalle due rette considerate.

2) Fra le rette passanti per il punto $(-2, 3)$,
   quali intercettano sull'asse *x* un segmento doppio di quello intercettato sull'asse *y*?

3) Sulla retta $r: y = x + 1$ determinare un punto C
   in modo che il triangolo ABC, essendo $A(2, 1);\ B(5, 3)$, abbia area 5.

4) Per quale valore del parametro *a* il baricentro del triangolo di vertici
   $(2a - 1, 1);\ \ (b, a + 3);\ \ (a - 3b, a + b)$
   cade nel punto $(1, 3)$?

5) Per quale valore di *k* i due punti $A(k, k + 1)$ e $B(2k, 5 - k)$ sono allineati con l'origine?

6) Trovare i vertici di un triangolo rettangolo isoscele, dato il vertice dell'angolo retto $C(3, -1)$
   e l'equazione dell'ipotenusa $3x - y + 2 = 0$.

7) Qual è il punto, sulla retta $x + 3y - 12 = 0$, equidistante dai punti $A(0, -1)$ e $B(7, 0)$?

8) Di un triangolo ABC sono noti i vertici $A(2, -1)$ e $B(7, 5)$ nonché l'ortocentro $L(2, 4)$.
   Determinare il vertice C.

9) Dati $A(-1, 5)$ e $B(1, 3)$, determinare i punti, sulla retta $y = 2x + 3$,
   che "vedono" il segmento AB sotto un angolo di 90°.

10) Sono dati i punti: $A(0,3);\ B(4,0);\ C(6,t)$, con $t > 0$.
    Si chiede di determinare il quarto vertice del parallelogrammo ABCD, in modo che la retta BD
    individui con gli assi cartesiani un triangolo di area 28.

11) E' dato il triangolo ABC, con $A(-1, 1);\ B(4, 1);\ C(1, 5)$.
    Dopo aver verificato che il triangolo è isoscele (il che aiuterà a svolgere più velocemente il problema),
    determinare le coordinate:
    del circocentro; del baricentro; dell'incentro; dell'ortocentro;
    del punto P, sul segmento AC, tale che $PO^2 + PC^2 = 14$.

12) Determinare i punti, sulla retta $y = 2$, equidistanti dalle due rette *r*, *s* di equazioni:
    $3x - 4y - 1 = 0;\ \ 4x - 3y + 6 = 0$

13) Stabilire per quale valore di *a* i punti
    $A(a, 1 - a);\ \ B(2 + a, -a);\ \ C(1, a - 1)$
    NON possono essere vertici di un triangolo.

14) Determinare una retta orizzontale
    affinché i suoi due punti di intersezione A, B con le rette $x - 2y = 0;\ \ x + y = 9$ individuino,
    insieme con le rispettive proiezioni A', B' sull'asse delle ascisse, un rettangolo di area 6

RISPOSTE:

1) a: $d = \sqrt{5}$ b: $y = 2x + \frac{3}{2}$ 2) $y = \frac{1}{2}x + 4;\ \ y = -\frac{1}{2}x + 2;\ \ y = -\frac{3}{2}x$ (l'ultima soluzione è "degenere")

3) $C_1(-14, -13);\ \ C_2(6, 7)$ 4) $a = 2,\ b = 1$ 5) Per $k = 1$ e anche per $k = 0$ 6) $A\left(\frac{3}{5}, \frac{19}{5}\right);\ \ B\left(-\frac{9}{5}, -\frac{17}{5}\right)$

7) $(3, 3)$ 8) $C\left(\frac{4}{5}, 5\right)$ 9) $(1, 5)$ e $\left(-\frac{1}{5}, \frac{13}{5}\right)$ 10) $t = 4$

11) circocentro: $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$; incentro: $\left(\sqrt{5} - 1, \frac{7 - \sqrt{5}}{2}\right)$; baricentro: $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$; ortocentro: $\left(1, \frac{5}{2}\right)$

$P_1(0,3);\ \ P_2\left(-\frac{1}{5}, \frac{13}{5}\right)$ 12) $(-9, 2);\ \ \left(\frac{9}{7}, 2\right)$ 13) $a = 1$ 14) $y = 1;\ \ y = 2;\ \ y = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

ALTRI ESERCIZI

1) Stabilisci per quale valore di k il punto $\mathrm{A}(k,\, 1-k)$
   a) è tale che il baricentro di AOB, essendo O l'origine e $\mathrm{B}(0,\, 2)$, sta sulla retta $2x+y+1=0$;
   b) è tale che l'asse del segmento OA passa per $\mathrm{W}(1/2,\, 0)$

2) Di un triangolo ABC sono noti il vertice $\mathrm{A}(1,\, 3)$ e il punto medio $\mathrm{M}(2,\, 5)$ del lato AC;
   si sa inoltre che il vertice B appartiene alla retta di equazione $x-2y+12=0$
   e infine che l'area del triangolo è 5.
   Trovare le coordinate dei vertici B e C.

3) a) Trovare i valori del parametro k per cui le due rette:
   $r:\ y=kx+k$
   $s:\ y=(k-1)x+2$
   si intersecano sull'asse delle ascisse.
   b) In corrispondenza del minore fra i due valori trovati,
   scrivere le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette
   e calcolare la distanza fra i due punti in cui tali bisettrici intersecano l'asse delle ordinate.

4) Considera le due rette
   $$r: y=\frac{1}{2}x+3;\quad s: y=2x+3$$
   e prendi due punti, A su r e B su s, aventi la stessa ordinata.
   Dette A' e B' le proiezioni di A e B rispettivamente, sull'asse delle ascisse,
   determina le coordinate di A e di B in modo che il rettangolo $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{BA}$ abbia area 15.

5) Trova il valore di k per cui le due rette $r: 2x-ky+1=0;\ \ s: (k+2)x+y+4=0$ sono perpendicolari;
   verifica poi che, in questo caso, il loro punto di intersezione ha coordinate $\left(\frac{3}{2},\, -1\right)$

6) Determina le coordinate dei vertici dei due triangoli isosceli,
   aventi per base il segmento di estremi $\mathrm{A}(1{,}0);\ \mathrm{B}(5,-2)$ e aventi area 5.

7) Per quali valori del parametro k la terna di punti $\mathrm{A}(1,\, k);\ \mathrm{B}(k,\, k+2);\ \mathrm{C}(k-1,\, 1)$
   è tale che l'angolo $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{C}$ è retto?

8) Considerato il triangolo di vertici: $\mathrm{A}(0,\,-3);\ \mathrm{B}(7,\,-4);\ \mathrm{C}(-1,\, 4)$
   a) verificare che è isoscele sulla base BC;
   b) scrivere l'equazione della mediana AM, la quale risulterà anche altezza e bisettrice;
   c) determinare le coordinate del baricentro G;
   d) determinare le coordinate dell'ortocentro E;
   e) determinare le coordinate del circocentro K;
   f) determinare le coordinate dell'incentro I.

RISPOSTE:

1) a) $k=-6$ b) $k=1/2\ \vee\ k=1$ 2) $\mathrm{C}(3{,}7)$; $\mathrm{B}_1(0{,}6)$, $\mathrm{B}_2\left(\frac{20}{3},\frac{28}{3}\right)$

3) a) $k=3 \vee k=0$; b) $y=\left(\sqrt{2}+1\right)x-2\left(\sqrt{2}+1\right)$; $y=-\left(\sqrt{2}-1\right)x+2\left(\sqrt{2}-1\right)$; $d=4\sqrt{2}$

4) $\mathrm{A}(4,\, 5)$; $\mathrm{B}(1,\, 5)\ \vee\ \mathrm{A}(-10,-2)$; $\mathrm{B}\left(-\frac{5}{2},\,-2\right)$ 5) $k=-4$ 6) $\mathrm{C}_1(2,-3)$; $\mathrm{C}_2(4{,}1)$ 7) $k=4,\ k=1$

8) a) $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=5\sqrt{2}$ b) $y=x-3$ c) $\mathrm{G}(2,\,-1)$ d) $\mathrm{E}\left(-\frac{7}{3},\,-\frac{16}{3}\right)$ e) $\mathrm{K}\left(\frac{25}{6},\,\frac{7}{6}\right)$ f) $\mathrm{I}\left(\frac{5}{3},\,-\frac{4}{3}\right)$