

28. LUOGHI GEOMETRICI

Si dice “luogo geometrico” l’insieme costituito dai punti (del piano, o dello spazio) che godono di una determinata proprietà geometrica.

In Geometria Analitica, l’equazione di un luogo geometrico si ricava scrivendo l’uguaglianza a cui soddisfano tutti e soli i punti $P(x, y)$ del piano cartesiano, che fanno parte del luogo, e traducendola poi in coordinate.

- *Scrivi l’equazione del luogo dei punti la cui distanza da $O(0,0)$ è doppia della distanza da $A(3,0)$*

Il luogo in questione è l’insieme di tutti e soli i punti $P(x, y)$, tali che $PO = 2 \cdot PA$. Traducendo in coordinate quest’uguaglianza, avremo: $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + y^2}$; ... $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$

Questa equazione individua la circonferenza di centro $(4,0)$ e raggio 2.

- *Scrivi l’eq. del luogo dei punti la cui distanza dalla retta $4x - 3y = 0$ è doppia della distanza dall’asse x .*

$$r: 4x - 3y = 0; \text{ asse } x: y = 0$$

$$\{P(x, y) / d(P, r) = 2 \cdot d(P, \text{asse } x)\}$$

$$\frac{|4x - 3y|}{\sqrt{16 + 9}} = 2|y|; \quad |4x - 3y| = 10|y|; \quad 4x - 3y = \pm 10y; \quad \begin{cases} 4x - 13y = 0 \\ 4x + 7y = 0 \end{cases}$$

Il luogo in questione è perciò costituito da una coppia di rette.

- *Scrivi l’equazione del luogo dei punti che vedono il segmento AB , con $A(1,1)$ e $B(3,3)$, sotto un angolo retto.*

RISOLUZIONE 1

La geometria euclidea ci insegna che il luogo in questione è la circonferenza di diametro AB : è perciò immediato determinare l’equazione richiesta.

NOTA. E’ del tutto spontaneo far rientrare anche i due punti A e B nel luogo, come “posizioni limite”.

Osserviamo che, a stretto rigore, per tali punti l’angolo in questione è “indeterminato”; e fra i valori dell’indeterminazione c’è anche il valore 90° .

RISOLUZIONE 2

Se non si intuisce subito la natura del luogo, si potrà procedere come segue:

$$\left\{ P(x, y) / m_{PA} = -\frac{1}{m_{PB}} \right\} \left(\text{ricordiamo che per il coeff. angolare vale la formula } m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

$$\frac{y-1}{x-1} = -\frac{1}{\frac{y-3}{x-3}}; \quad \frac{y-1}{x-1} = -\frac{x-3}{y-3}, \text{ con } x \neq 3;$$

$$y^2 - 3y - y + 3 = -x^2 + 3x + x - 3, \text{ con } x \neq 3, x \neq 1, y \neq 3$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0, \text{ con } x \neq 3, x \neq 1, y \neq 3$$

L’equazione ricavata è quella di una circonferenza (facile poi controllare che questa circonferenza ha centro nel punto medio di AB e raggio uguale alla metà di AB , quindi risulta avere per diametro AB).

E’ vero tuttavia che le condizioni poste privano la circonferenza in esame di alcuni punti: quelli di ascissa 1 o 3, e quelli di ordinata 3.

Si tratta dei due punti A e B (del cui “diritto di appartenere al luogo” abbiamo già discusso nella NOTA) e dei due punti $S(1,3)$ e $T(3,1)$.

Riguardo ad S e T , anch’ essi appartengono senza dubbio al nostro luogo, perché:

- *SA è parallelo all’asse y , SB è parallelo all’asse x quindi $\widehat{ASB} = 90^\circ$;*
- *TA è parallelo all’asse x , TB è parallelo all’asse y , quindi $\widehat{ATB} = 90^\circ$.*

Perché dunque i nostri passaggi algebrici hanno portato ad estrometterli?

Ciò è avvenuto per il fatto che, quando si utilizzano i coefficienti angolari, restano tagliate inesorabilmente fuori le rette parallele all’asse y ; e SA , TB sono per l’appunto tali.

Perciò il procedimento da noi seguito era fatalmente “destinato” ad escludere alcuni punti, che invece appartengono a pieno diritto al luogo in questione.

Pertanto “a posteriori”, riconoscendo che anche S e T fanno parte del luogo, semplicemente ignoreremo le condizioni poste,

e diremo che il luogo cercato è la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$

NESSUN PUNTO ESCLUSO.

RISOLUZIONE 3

Alla stessa equazione avremmo potuto pervenire anche con un altro metodo.

Il luogo dei punti $P(x, y)$ per i quali $\widehat{APB} = 90^\circ$

può essere pensato come il luogo dei punti $P(x, y)$ per cui il triangolo APB è rettangolo in P .

Ma se un triangolo è rettangolo, allora in esso la somma dei quadrati dei cateti è uguale al quadrato dell'ipotenusa; e viceversa, se in un triangolo la somma dei quadrati di due lati è uguale al quadrato del lato rimanente, allora il triangolo è rettangolo, con l'angolo retto che è opposto all'ultimo lato menzionato (Teorema di Pitagora e suo inverso).

In definitiva, $P(x, y)$ appartiene al nostro luogo se e solo se

$$PA^2 + PB^2 = AB^2$$

$$\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 \right] + \left[(x-3)^2 + (y-3)^2 \right] = (3-1)^2 + (3-1)^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DI UN LUOGO GEOMETRICO

Consideriamo le seguenti equazioni, in cui i valori di x e di y vengono fatti dipendere da un parametro t :

$$\begin{cases} x = t^2 + 3 \\ y = 1 - t \end{cases}, \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Se noi facciamo variare t , varierà in corrispondenza la coppia (x, y) ; ad esempio:

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} (3, 1) \quad t = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} (4, 0) \quad t = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 13/4 \\ y = 1/2 \end{cases} \left(\frac{13}{4}, \frac{1}{2} \right) \quad \dots$$

Le equazioni considerate individuano perciò un luogo di punti sul piano cartesiano:

al variare di t in \mathbb{R} , il punto $(x, y) = (t^2 + 3, 1 - t)$ "si muove" sul piano cartesiano, descrivendo una curva.

Ci chiediamo ora:

è possibile passare dalle equazioni parametriche alla ordinaria equazione cartesiana $F(x, y) = 0$ del luogo?

Sì, e molto facilmente.

Basta infatti isolare il parametro in una delle due equazioni, e poi andare a sostituire nell'altra.

$$\begin{cases} x = t^2 + 3 \\ y = 1 - t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 - y \\ x = (1 - y)^2 + 3 \end{cases} \quad \dots \quad \boxed{x = y^2 - 2y + 4} \quad \text{equazione cartesiana del luogo}$$

Esempio

Scrivere l'equazione del luogo descritto dai baricentri dei triangoli ABP , essendo:

$A(3, 0)$; $B(6, 0)$; P un punto della retta $y = 2x$

Indichiamo le coordinate di P con $(\alpha, 2\alpha)$. Avremo:

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{3 + 6 + \alpha}{3} = \frac{9 + \alpha}{3}; \quad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{0 + 0 + 2\alpha}{3} = \frac{2\alpha}{3}$$

quindi: $\begin{cases} x = \frac{9 + \alpha}{3} \\ y = \frac{2\alpha}{3} \end{cases}$ che sono le equazioni parametriche del luogo considerato.

Passiamo ora all'equazione cartesiana: $\alpha = \frac{3y}{2}$; $x = \frac{9 + \frac{3y}{2}}{3} \quad \dots \quad \boxed{y = 2x - 6}$

Attività

Con GeoGebra, utilizzando lo strumento "Luogo", costruisci il luogo dei baricentri dei triangoli ABP .

Esercizio 1

Determinare il luogo dei punti di intersezione delle rette di equazioni:

$$r_1: 3x + y + 2k - 1 = 0, \quad r_2: x - y - k = 0$$

al variare del parametro k in \mathbb{R} (soluzione: $y = 5x - 1$)

Esercizio 2

Scrivere l'equazione del luogo (già da noi in precedenza considerato) dei punti che vedono il segmento AB , con $A(1, 1)$ e $B(3, 3)$, sotto un angolo retto, interpretandolo come luogo dei punti di intersezione di due rette r ed s , passanti rispettivamente per A e per B , e perpendicolari fra loro.