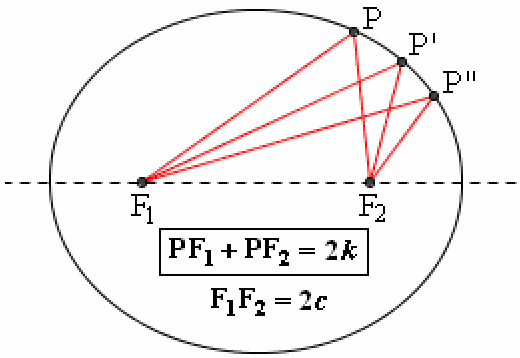
29. L'ELLISSE NEL PIANO CARTESIANO

DEFINIZIONE DI ELLISSE

Si dice "ellisse"
il luogo dei punti del piano
per i quali è costante la somma delle distanze
da due punti fissi, detti "fuochi":
$\mathbf{PF_1 + PF_2} = \textit{costante}$

Indicheremo
la somma costante con $2k$,
e la distanza fra i due fuochi = distanza focale) con $2c$.



E' divertente costruire un'ellisse di costante $2k$, e distanza focale $2c$, attraverso una semplice esperienza.
Prendi una cordicella di lunghezza $2k$, e fissa, sulla lavagna, due punti F_1, F_2 la cui distanza valga $2c$.
Chiedi a due compagni di tenere fisse le estremità della cordicella, rispettivamente in F_1 e in F_2;
tu, intanto, tramite un pezzetto di gesso che terrai con la mano, descriverai il punto P tirando la cordicella in modo che le sue due parti, dal gessetto al punto fisso F_1 e dal gessetto a F_2, siano belle diritte e tese.
Muovendo il gessetto, mentre la cordicella è tenuta sempre tesa, sulla lavagna apparirà un'ellisse:
infatti la somma $PF_1 + PF_2$ si manterrà sempre uguale alla lunghezza costante della cordicella.

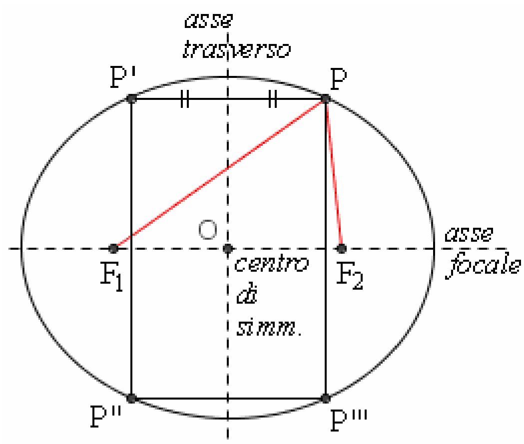
E' evidente che, fissata la distanza focale $2c$, c'è un *vincolo* per la costante $2k$:
la cordicella, di misura $2k$, dovrà essere per forza più lunga di $F_1F_2 = 2c$ ($2k > 2c,\ k > c$).
Con riferimento alla figura, la "disuguaglianza triangolare" ci dice infatti che $2k = PF_1 + PF_2 > F_1F_2 = 2c$.
Se scegliessimo $2k < 2c$, il luogo dei punti P per cui $PF_1 + PF_2 = 2k$ sarebbe vuoto;
se poi prendessimo $2k = 2c$, il luogo degenererebbe in … dillo tu!

Insomma: **dovrà essere $2k > 2c$ ($k > c$) affinché il luogo non sia né vuoto, né degenere.**

Si intuisce, si constata da buoni disegni,
e si potrebbe facilmente dimostrare,
che un'ellisse è dotata di **due assi di simmetria**:

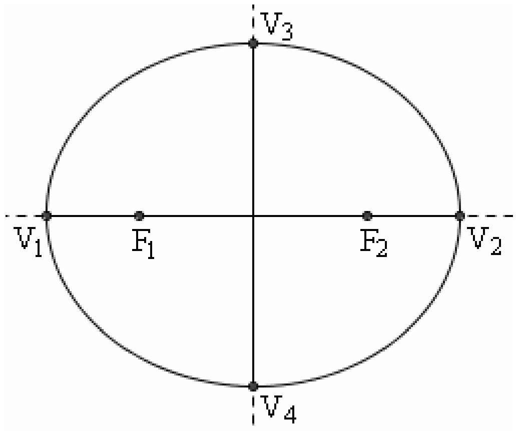
- la retta passante per i due fuochi (detta "asse focale")
- e l'asse del segmento che ha per estremi i due fuochi (detta "asse trasverso").

La curva possiede pure **un centro di simmetria**
(chiamato, per brevità, semplicemente **"il centro"** dell'ellisse):
esso è l'intersezione O fra l'asse focale e l'asse trasverso,
ossia il punto medio del segmento che ha per estremi i fuochi.



Si dicono "**vertici**" dell'ellisse
i punti di intersezione della curva coi suoi assi di simmetria.
Nella figura, abbiamo indicato i quattro vertici con
V_1, V_2, V_3, V_4.
I segmenti che congiungono le coppie di vertici opposti
vengono detti "gli assi" dell'ellisse
(asse maggiore, asse minore").

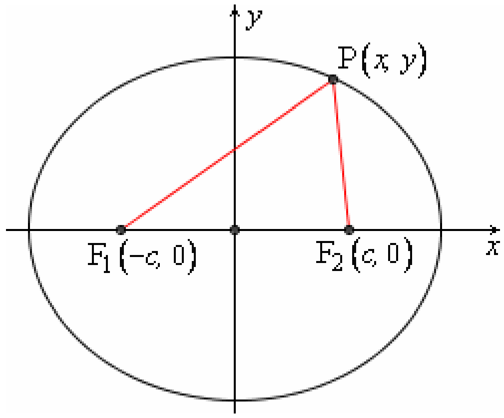
Ma allora, cosa dobbiamo pensare
quando una persona ci parla degli "assi" di un'ellisse?
Quella persona sta pensando a delle rette o a dei segmenti?
In effetti c'è una certa ambiguità.
Ma il contesto del discorso renderà senz'altro chiaro
quale debba essere l'interpretazione corretta.



E' possibile dimostrare (lo lascio a te per esercizio!) che, in un'ellisse:

- **l'asse maggiore è sempre quello contenente i fuochi;**
- **l'asse maggiore è uguale alla "costante dell'ellisse"**
  (ossia la somma costante di cui parla la definizione, quella che abbiamo indicato con $2k$)

L'EQUAZIONE DELL'ELLISSE



Per semplicità, supporremo inizialmente
che gli assi del riferimento cartesiano
coincidano con gli assi di simmetria dell'ellisse.
In queste condizioni, si parlerà di **"ellisse riferita ai suoi assi"**,
o anche di "ellisse in posizione canonica"
(brevemente: "**ellisse canonica**").

Se l'ellisse è in posizione canonica, il centro
(= centro di simmetria) dell'ellisse coinciderà con l'origine
e i fuochi staranno o sull'asse *x*, o sull'asse *y*.
In ciascuno dei due casi,
l'origine sarà il punto medio del segmento F_1F_2.

Supponiamo dapprima che i fuochi stiano sull'asse *x*.

In questo caso, al posto di indicare la "somma costante" con $2k$, la indicheremo con $2a$
(questa scelta è dettata da motivi di opportunità che si comprenderanno solo a posteriori).
Avremo dunque:

$$\mathrm{F}_1(-c,0);\ \ \mathrm{F}_2(c,0)\ \ \mathrm{P}(x,y)$$
$$\mathrm{PF}_1+\mathrm{PF}_2=2a$$
$$(*)\qquad \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}+\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}=2a;\qquad \sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}=2a-\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$
$$\cancel{x^2}+2cx\cancel{+c^2}\cancel{+y^2}=4a^2\cancel{+x^2}-2cx\cancel{+c^2}\cancel{+y^2}-4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$
$$4cx-4a^2=-4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2};\qquad a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}=a^2-cx$$
$$a^2x^2\cancel{-2a^2cx}+a^2c^2+a^2y^2=a^4\cancel{-2a^2cx}+c^2x^2$$
$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Essendo ora $a=k>c$, sarà anche $a^2>c^2$ e quindi $a^2-c^2>0$. Potremo allora porre

$$a^2-c^2=b^2;$$

la nostra equazione diventerà

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

e dividendo per il secondo membro, che è sicuramente non nullo, otterremo

$$(**)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\qquad (b^2=a^2-c^2)$$

Abbiamo fin qui fatto vedere che, se un punto $\mathrm{P}(x,y)$ appartiene all'ellisse di fuochi $\mathrm{F}_1(-c,0)$ e $\mathrm{F}_2(c,0)$ e costante $2a$, allora le coordinate (x,y) di P verificheranno l'equazione $(**)$.
Si può poi dimostrare che vale anche il viceversa, ossia che, se un punto (x,y) è tale che le sue coordinate verifichino la $(**)$, allora (x,y) appartiene all'ellisse di fuochi $\mathrm{F}_1(-c,0);\ \mathrm{F}_2(c,0)$ e costante $2a$ (NOTA)

Resta così stabilito che l'ellisse di fuochi $\mathrm{F}_1(-c,0)$ e $\mathrm{F}_2(c,0)$ e costante $2a$ ha equazione

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad (b^2=a^2-c^2)}$$

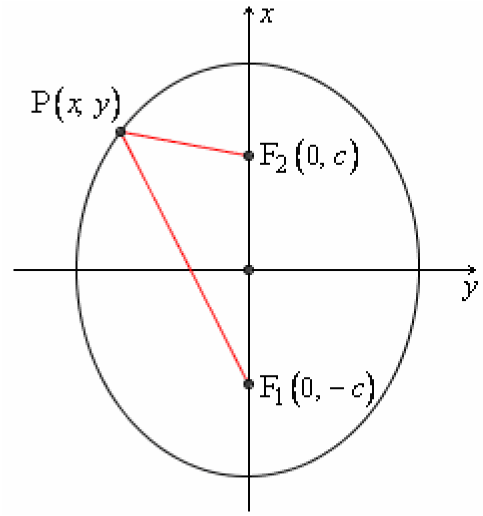
NOTA. La dimostrazione è lasciata allo studente:

consiste nel controllare che ogni punto P di coordinate $\left(x,\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)$ è tale che $\mathrm{PF}_1+\mathrm{PF}_2=2a$,

ossia verifica l'equazione $(*)$: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$.

Osserviamo che questo fatto non è da considerarsi "scontato" a priori: infatti i passaggi algebrici
da noi effettuati a partire dall'equazione iniziale, che conteneva radicali quadratici,
hanno comportato ben due elevamenti al quadrato:
e sappiamo che, elevando al quadrato i due membri di un'equazione,
può capitare che si "intrufolino" nell'equazione "false soluzioni", soluzioni non accettabili.
Ciò nel nostro caso non è avvenuto, ma teoricamente avrebbe potuto avvenire.

E se i fuochi stessero sull'asse y?



In questo caso, al posto di indicare la "somma costante" con $2k$, la indicheremo con $2b$
e, fatti i calcoli, perverremo all'equazione

$$b^2x^2+(b^2-c^2)y^2=b^2(b^2-c^2)\ ;$$

ponendo ora

$$b^2-c^2=a^2$$

(posizione lecita in quanto $b=k>c$)
l'equazione assumerà la forma

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

e finalmente, dopo aver diviso per a^2b^2,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a^2=b^2-c^2)$$

Si capisce a questo punto che la scelta di indicare la costante dell'ellisse
(= la somma costante di cui parla la definizione)

- **con $2a$ anziché con $2k$ quando i fuochi stanno sull'asse x,**
- **con $2b$ anziché con $2k$ quando i fuochi stanno sull'asse y,**

è motivata dal fatto che in questo modo, in entrambi i casi,
si perviene formalmente alla stessa equazione.

Ricapitoliamo:

Considerata un'ellisse canonica coi fuochi sull'asse x, se si indica con $2c$ la sua distanza focale e con $2a$ la sua costante, la sua equazione è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (b^2=a^2-c^2)$	**Considerata un'ellisse canonica coi fuochi sull'asse y, se si indica con $2c$ la sua distanza focale e con $2b$ la sua costante, la sua equazione è** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a^2=b^2-c^2)$

Dunque un'ellisse canonica, sia che abbia i fuochi in orizzontale, sia che li abbia in verticale,
ha sempre equazione della forma

$$\textbf{(1)}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Data ora un'equazione della forma (1), ci domandiamo:
rappresenterà sempre un'ellisse, qualunque siano i valori dei due parametri a, b?
La risposta è affermativa. Infatti:

- Se $a^2>b^2$, poniamo $a^2-b^2=c^2$
e andiamo a ricavare l'equazione dell'ellisse di fuochi $(\pm c, 0)$ e costante $2a$: troveremo la (1).
Ciò prova che la (1), nel caso $a^2>b^2$, rappresenta un'ellisse (coi fuochi in orizzontale).
- Se $b^2>a^2$, poniamo $b^2-a^2=c^2$
e andiamo a ricavare l'equazione dell'ellisse di fuochi $(0, \pm c)$ e costante $2b$: troveremo la (1).
Ciò prova che la (1), nel caso $b^2>a^2$, rappresenta un'ellisse (coi fuochi in verticale).
- Se poi $b^2=a^2$, a ben guardare la (1) è l'equazione di una circonferenza!
Ora, potrai facilmente verificare che
una circonferenza può essere vista come una particolare ellisse
in cui i fuochi sono coincidenti, sovrapposti.
Infatti, quando diciamo che la circonferenza di centro O e raggio r è il luogo dei punti P per i quali
$PO=r$,
potremmo anche dire che si tratta del luogo dei punti P per i quali
$PF_1+PF_2=2r$,
avendo posto i due punti F_1, F_2 entrambi in O.

STUDIO DELL'EQUAZIONE $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Intersecando la curva $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ con gli assi, avremo che:

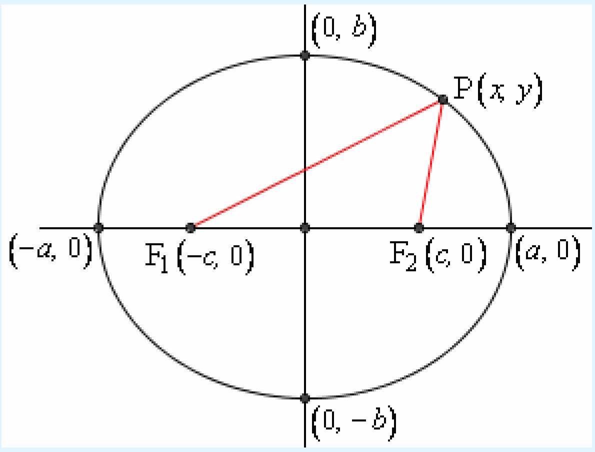
- **i punti di intersezione $A_1,\ A_2$ con l'asse orizzontale hanno coordinate: $A_1(-a,0)$; $A_2(a,0)$**
- **i punti di intersezione $B_1,\ B_2$ con l'asse verticale hanno coordinate: $B_1(0,-b)$; $B_2(0,b)$.**

Caso dei fuochi in orizzontale:

$$PF_1+PF_2=2a$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$con\quad b^2=a^2-c^2\ \rightarrow\ c^2=a^2-b^2$$

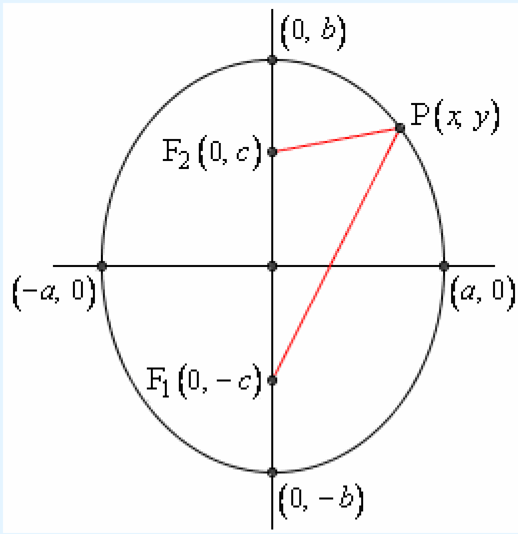


Caso dei fuochi in verticale:

$$PF_1+PF_2=2b$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$con\quad a^2=b^2-c^2\ \rightarrow\ c^2=b^2-a^2$$



Quindi, **IN OGNI CASO,**

- ***a* è il semiasse orizzontale,**
- ***b* è il semiasse verticale.**

Occorre poi sempre ricordare che

- **la costante dell'ellisse** (NOTA) **è uguale all'asse maggiore,**
- **l'asse maggiore è quello contenente i fuochi (= i fuochi stanno sull'asse maggiore).**

NOTA.
Ricordiamo che:
per "costante dell'ellisse" intendiamo la somma costante di cui parla la definizione,
quella che avevamo in generale indicato con $2k$ e che per l'ellisse canonica abbiamo preferito indicare con $2a$ nel caso i fuochi fossero in orizzontale, con $2b$ per fuochi in verticale

Dalle osservazioni appena fatte segue che:

- se $a>b$, **allora i fuochi sono in orizzontale**
- se $b>a$, **allora i fuochi sono in verticale**

In ogni caso,
la semidistanza focale *c* si ottiene estraendo la radice quadrata della differenza fra a^2 e b^2,
con l'intesa che questa differenza venga calcolata sottraendo dal numero maggiore il minore,
in modo da avere risultato positivo:

$$c=\begin{cases}\sqrt{a^2-b^2} & se\quad a^2>b^2\\ \sqrt{b^2-a^2} & se\quad b^2>a^2\end{cases}$$. Potremmo anche dire che $c=\sqrt{|a^2-b^2|}$

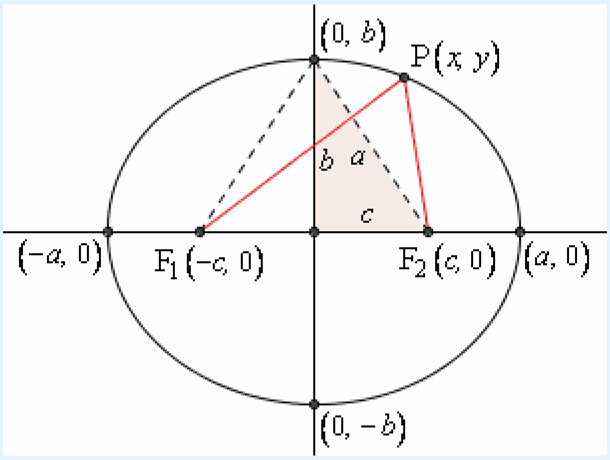
RIASSUNTO DEL RIASSUNTO SULL'ELLISSE NEL PIANO CARTESIANO

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Se $a > b$:
fuochi in orizzontale

$$\mathbf{PF_1 + PF_2 = 2}\boldsymbol{a}$$

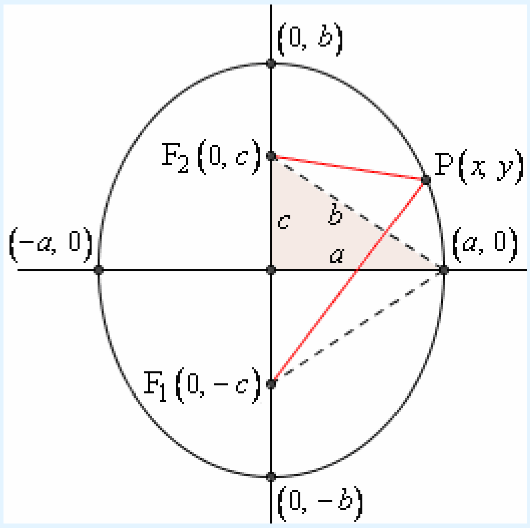
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 - b^2}$$



Se $b > a$:
fuochi in verticale

$$\mathbf{PF_1 + PF_2 = 2}\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{c^2 = b^2 - a^2}$$



In definitiva:

- **quando mi danno un'equazione della forma**

  (1) $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$,

  io dico:
  Che bello! Ho un'ellisse. La misura del semiasse orizzontale è *a*, quella del semiasse verticale è *b*.

  Posso subito fare, quindi, il disegno,
  sapendo che i vertici in orizzontale hanno ascisse $\pm a$ e quelli in verticale hanno ordinate $\pm b$
  (se la memoria mi tradisce, NO PROBLEM:
  cerco le intersezioni di (1) con gli assi e ritrovo queste cose automaticamente).

  Dove stanno i fuochi?
  Ovviamente, sul semiasse maggiore,
  che potrà essere quello orizzontale o quello verticale, a seconda dei casi.

  E che coordinate hanno?
  Mi basterà ricavare la **semidistanza focale *c***, perché poi **le coordinate dei fuochi saranno:**
  $(\pm c, 0)$ se i fuochi sono in orizzontale, $(0, \pm c)$ se sono in verticale.

  Ma come ricavo *c*?
  Semplice:
  c^2 potrà valere $a^2 - b^2$ oppure $b^2 - a^2$;
  basterà scegliere, fra le due differenze, quella che dà risultato positivo.
  Potremmo anche dire che c^2 è il valore assoluto di $a^2 - b^2$: $c^2 = |a^2 - b^2|$.

- Inversamente, **quando un problema mi parla di un' ellisse "canonica"**, devo pensare ad un'ellisse "riferita ai suoi assi", cioè ad un'ellisse collocata in un sistema di riferimento i cui assi cartesiani coincidano con gli assi di simmetria dell'ellisse.
  So che **l'equazione sarà della forma**

  (1) $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

  e si tratterà di determinare i valori delle due costanti *a*, *b* (o direttamente: a^2, b^2, sfruttando due opportune condizioni che il problema mi fornirà.

ECCENTRICITA' DI UN'ELLISSE

Un'ellisse può essere più o meno "bislunga",
può discostarsi in misura maggiore o minore dalla forma circolare.
Poiché un'ellisse è individuata dalla sua distanza focale $2c$ e dalla sua costante $2k$,
si comprende che dovrà essere il rapporto $(2c)/(2k) = c/k$ a determinare la forma della curva.

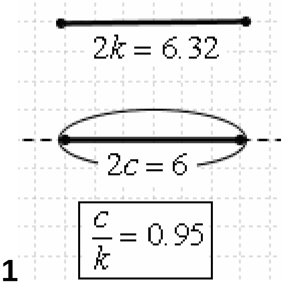


Figura 1

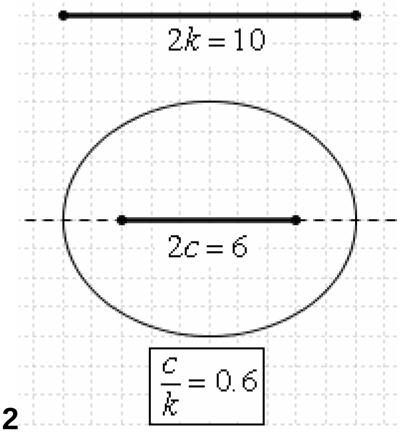


Fig. 2

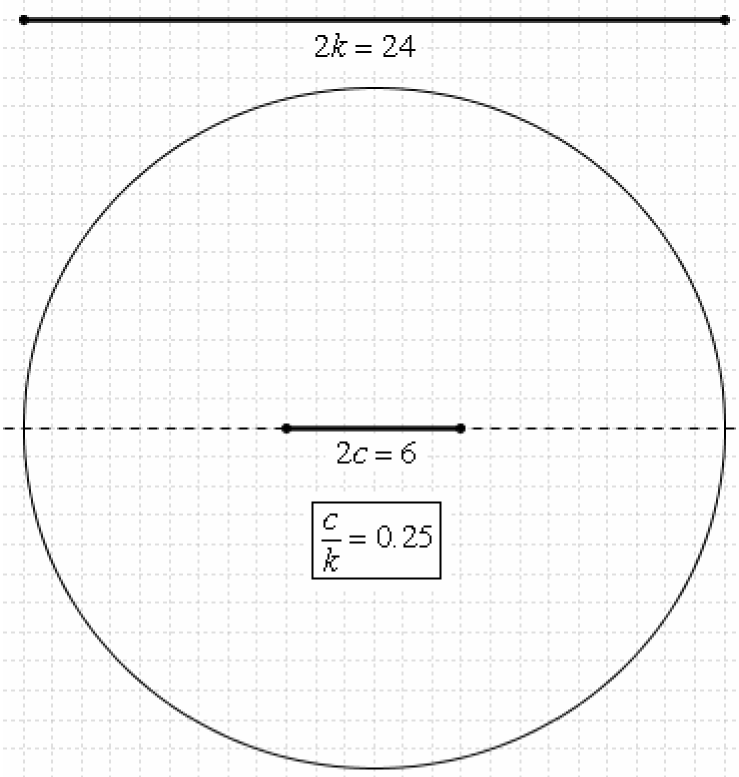


Fig. 3

Nella sequenza di figure sovrastanti
è stata tenuta fissa la distanza $2c$ tra i due fuochi: $2c = 6$ in tutti e tre i casi.
E' stato invece fatto crescere, nel passaggio dalla figura 1 alla 2 e poi alla 3, il valore della grandezza $2k$
($2k = PF_1 + PF_2$, essendo P il generico punto dell'ellisse).
Con ciò, si è fatto variare il rapporto c/k, che è andato decrescendo.
Si può osservare che
quanto più il rapporto c/k diminuisce,
tanto più l'ellisse tende ad assomigliare ad una circonferenza.

La quantità c/k
(semidistanza focale/semicostante dell'ellisse,
o, se si preferisce: semidistanza focale/semiasse maggiore.,
viene chiamata "**eccentricità**" dell'ellisse e indicata con il simbolo ***e***.

$$e = \frac{semidistanza\ \ focale}{semicostante\ dell'ellisse} = \frac{semidistanza\ \ focale}{semiasse\ maggiore} \quad \left(= \frac{distanza\ \ focale}{asse\ maggiore} \right).$$

Poiché la semidistanza focale è sempre più piccola del semiasse maggiore,
***e* sarà sempre compresa fra 0 e 1.**
Se la quantità *e* è piccola (cioè, vicina a 0),
l'ellisse tende ad assomigliare ad una circonferenza;
se invece e è grande (cioè, vicina a 1),
l'ellisse si discosta dalla forma circolare, ossia appare "bislunga", "eccentrica".

Per capire meglio,
supponiamo che la nostra ellisse sia collocata in un riferimento cartesiano, e riferita ai suoi assi.

La sua equazione sarà allora, come sappiamo, della forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dove a, b saranno i due semiassi.

Supponiamo, per fissare le idee, che il semiasse maggiore sia quello orizzontale, cioè a.
Allora potremo scrivere:

$$e = \frac{semidistanza\ \ focale}{semiasse\ maggiore} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Di qui si vede che *e* risulta più grande, quando
è più piccolo il rapporto *b/a* fra il semiasse minore e il maggiore.
Ma un piccolo rapporto semiasse minore/semiasse maggiore
comporta, è evidente, una forma più "bislunga" dell'ellisse.

- Può l'eccentricità di un'ellisse essere uguale a 1?
  No, perché la costante dell'ellisse dovrebbe essere uguale alla distanza focale,
  e l'ellisse, in tali condizioni, degenera in un segmento.
- Può essere $e = 0$?
  Ciò richiederebbe una distanza focale nulla, cioè che i due fuochi siano sovrapposti, coincidenti.
  In effetti, *è possibile* pensare coincidenti i due fuochi:
  la curva si riduce, in questo caso, ad una circonferenza.

In definitiva: **nell'ellisse si ha $0 \le e < 1$;**
$e = 0$ nel caso della circonferenza,
mentre in un'ellisse molto "bislunga", "eccentrica" si ha *e* prossimo a 1.

ALCUNI ESEMPI DI ESERCIZI SULL'ELLISSE CANONICA

- ESEMPIO 1

Disegna e studia l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Abbiamo $a^2 = 25,\ b^2 = 9 \rightarrow a = 5,\ b = 3$.

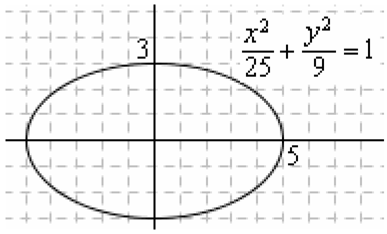
Ci converrà disegnare *immediatamente* i vertici
$(\pm 5, 0);\ (0, \pm 3)$.

Il semiasse maggiore risulta essere *a*
(che è il semiasse orizzontale):
quindi i fuochi sono in orizzontale.

Calcoliamo la semidistanza focale:
$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = 4$.

Perciò i fuochi hanno coordinate $(\pm 4, 0)$.

L'eccentricità vale
$e = c / a = 4/5$.



- ESEMPIO 2

Disegna e studia l'ellisse di equazione $4x^2 + 3y^2 = 12$

Prima di tutto dobbiamo portare l'equazione sotto la forma
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

A tale scopo, occorre dividere per 12:
avremo così
$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.

$a^2 = 3,\ b^2 = 4 \rightarrow a = \sqrt{3},\ b = 2$.

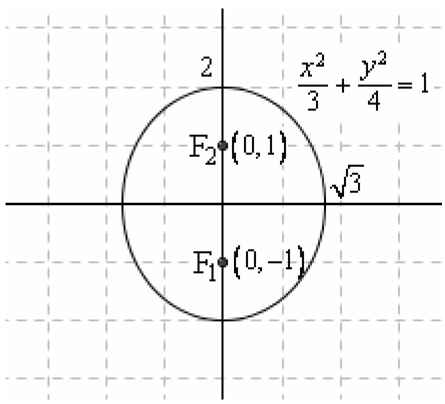
Ci converrà disegnare *immediatamente* i vertici
$(\pm\sqrt{3}, 0);\ (0, \pm 2)$.

Il semiasse maggiore risulta essere *b*
(che è il semiasse verticale):
quindi i fuochi sono in verticale.

Calcoliamo la semidistanza focale:
$c^2 = b^2 - a^2 \rightarrow c^2 = 1 \rightarrow c = 1$.

Perciò i fuochi hanno coordinate $(0, \pm 1)$

L'eccentricità vale
$e = c / b = 1/2$.



- ESEMPIO 3

Scrivi l'equazione dell'ellisse canonica di costante (= somma costante) 10*, passante per* (3,1)

Se la costante (= somma costante) è 10, allora la semicostante è 5:
ma allora, sarà $a=5$ o piuttosto $b=5$?
Beh, facendo un disegnino, si vede che di ellissi canoniche con costante 10, passanti per (3,1), ce n'è due: una con i fuochi in orizzontale, e l'altra coi fuochi in verticale.
Il problema ha quindi due soluzioni.

Distinguiamo i due casi:

FUOCHI IN ORIZZONTALE (= asse maggiore orizzontale): $a=5$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{b^2}=1$, e ponendo la condizione di appartenenza del punto (3,1) si ottiene: $b^2=\frac{25}{16}$.

L'equazione in questo caso è dunque $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{16}}=1 \rightarrow x^2+16y^2=25$

FUOCHI IN VERTICALE (= asse maggiore verticale): $b=5$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{25}=1$, e ponendo la condizione di appartenenza del punto (3,1) si ottiene: $a^2=\frac{75}{8}$.

L'equazione in questo caso è dunque $\frac{x^2}{\frac{75}{8}}+\frac{y^2}{25}=1 \rightarrow 8x^2+3y^2=75$

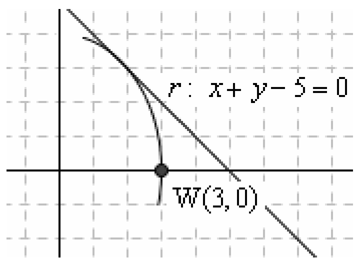
- ESEMPIO 4

Determina l'equazione dell'ellisse canonica passante per $\mathrm{W}(3,0)$ *e tangente alla* $r:\ x+y-5=0$

Scriviamo l'equazione generale $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Abbiamo ora bisogno di due condizioni,
per determinare i due parametri *a*, *b*.

- Una condizione sarà data dall'appartenenza di $\mathrm{W}(3,0)$;
- l'altra sarà la condizione di tangenza retta-ellisse, ottenibile ponendo a sistema l'equazione della retta con quella dell'ellisse e imponendo all'equazione risolvente del sistema la condizione $\Delta=0$.



Si ottiene in definitiva: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

- ESEMPIO 6

Determina l'equazione della retta tangente all'ellisse $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$, *nel suo punto* A *di coordinate* (3, 1)

Quando si ha UNA CURVA "DI 2° GRADO" (ellisse, circonferenza, parabola, iperbole)
E UN PUNTO $P_0(x_0,y_0)$ CHE APPARTENGA (occhio, è indispensabile!) ALLA CURVA,
si potrebbe dimostrare che il problema di scrivere
L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE A QUELLA CURVA IN QUEL SUO PUNTO
si può risolvere semplicemente applicando la seguente comodissima

REGOLA DEGLI SDOPPIAMENTI:

si effettuano, nell'equazione della curva, le sostituzioni

$$x^2 \rightarrow x_0 x \qquad y^2 \rightarrow y_0 y \qquad xy \rightarrow \frac{y_0 x + x_0 y}{2} \qquad x \rightarrow \frac{x_0 + x}{2} \qquad y \rightarrow \frac{y_0 + y}{2}$$

ed è fatta!

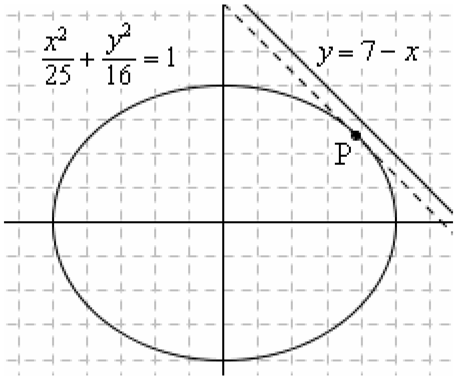
Nel nostro caso, avremo $\frac{3x}{12}+\frac{1\cdot y}{4}=1$ ossia $x+y=4$.

Controlla tu stesso che col "metodo del $\Delta=0$" si otterrebbe la medesima equazione.

ESEMPIO 6

Considerata l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$,
determina le coordinate del suo punto più vicino alla retta $y=7-x$.

Facendo un disegno, ci si rende conto che si tratta del punto P di contatto con l'ellisse, di una delle due tangenti alla curva parallele alla retta data e quindi aventi coefficiente angolare $m=-1$.



Ma una generica retta di coefficiente angolare -1 ha equazione della forma
$y=-x+k$:
poniamo dunque tale equazione a sistema con l'equazione dell'ellisse, allo scopo di determinare il valore di k per il quale si ha tangenza.

$$\begin{cases} y=-x+k \\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{(-x+k)^2}{16}=1$$

$$16x^2+25\left(x^2-2kx+k^2\right)=400$$

$$16x^2+25x^2-50kx+25k^2=400$$

$$\boxed{41x^2-50kx+25k^2-400=0}$$

Condizione di tangenza: $\boxed{\frac{\Delta}{4}=0}$

$$(25k)^2-41\left(25k^2-400\right)=0$$

$$625k^2-41\cdot 25\left(k^2-16\right)=0$$

Semplificando per 25:

$$25k^2-41\left(k^2-16\right)=0;\ \ 25k^2-41k^2+656=0;\ \ -16k^2=-656;\ \ k^2=41$$

$\boxed{k=\sqrt{41}}$ (*la soluzione* <0 *viene esclusa: corrisponderebbe al punto più LONTANO*)

Con $k=\sqrt{41}$, la retta è $y=-x+\sqrt{41}$
e le coordinate del punto P di intersezione fra la retta e l'ellisse si possovo ricavare ponendo $k=\sqrt{41}$ nell'equazione risolvente del sistema
$\boxed{41x^2-50kx+25k^2-400=0}$,
che diventa così

$$\boxed{41x^2-50x\sqrt{41}+25\cdot 41-400=0}$$

$$41x^2-50x\sqrt{41}+1025-400=0$$

$$41x^2-50x\sqrt{41}+625=0$$

$$\left(x\sqrt{41}-25\right)^2=0$$

$$x=\frac{25}{\sqrt{41}}\ \rightarrow\ y=-x+\sqrt{41}=-\frac{25}{\sqrt{41}}+\sqrt{41}=\frac{-25+41}{\sqrt{41}}=\frac{16}{\sqrt{41}}$$

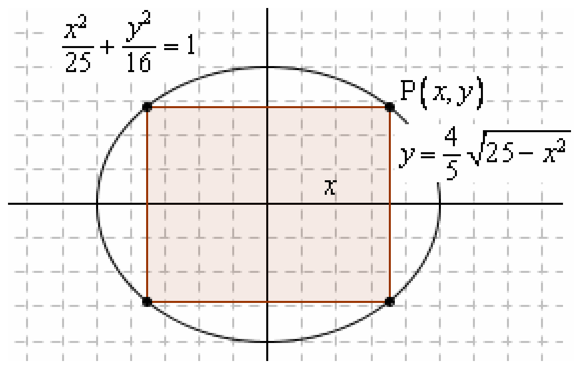
Si ha pertanto

$$\boxed{P\left(\frac{25}{\sqrt{41}},\ \frac{16}{\sqrt{41}}\right)}$$

ESEMPIO 7 - *Nell'ellisse di equazione* $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ *inscrivi il rettangolo di area massima.*

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1;$

$y=...=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$
(nel 1° *e* 2° quadrante si prenderà il segno +)



Detto P(x, y) il vertice del rettangolo appartenente al 1° quadrante, si avrà

$\textit{base rettangolo}=2x$
$\textit{altezza rettangolo}=2y=2\cdot\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}=\frac{8}{5}\sqrt{25-x^2}$

$\textit{Area (da massimizzare)}=$
$=2x\cdot\frac{8}{5}\sqrt{25-x^2}=\frac{16x}{5}\sqrt{25-x^2}\quad \textit{con } 0\le x\le 5$

Ora, determinare il valore di x per il quale la quantità

$$\boxed{S(x)=\frac{16x}{5}\sqrt{25-x^2}}$$

assume il suo valore massimo (nell'intervallo $0\le x\le 5$)
è facile se si conoscono le cosiddette *derivate* …
… ma noi possiamo cavarcela ugualmente anche senza di queste.

Infatti
UNA QUANTITA' POSITIVA E' MASSIMA QUANDO E' MASSIMO IL SUO QUADRATO!

$$\boxed{S^2(x)}=\left(\frac{16x}{5}\sqrt{25-x^2}\right)^2=\frac{256x^2}{25}\left(25-x^2\right)=\boxed{256x^2-\frac{256}{25}x^4}\quad \textit{con } 0\le x\le 5$$

Possiamo ora per comodità andare a cercare il valore di x per il quale è massima
la quantità ottenibile dividendo la precedente per 256, ossia

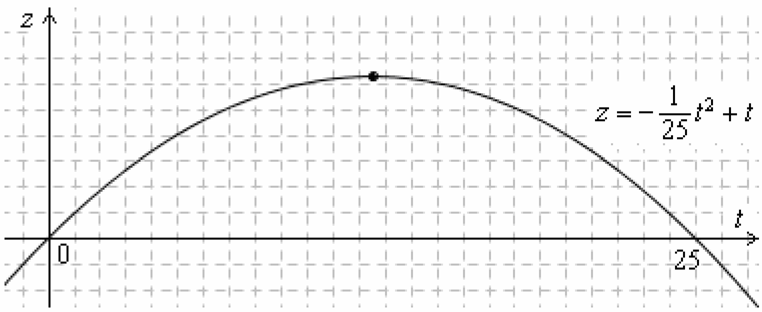
$$\boxed{\frac{S^2(x)}{256}=x^2-\frac{1}{25}x^4\quad \textit{con } 0\le x\le 5},$$

o anche, posto $x^2=t$,

$$\boxed{t-\frac{1}{25}t^2=-\frac{1}{25}t^2+t\quad \textit{con } 0\le t\le 25}$$

La funzione

$$\boxed{z=-\frac{1}{25}t^2+t}\quad \textit{con } 0\le t\le 25$$



ha come grafico un arco di parabola
(vedi figura).
Il punto più alto di questa parabola
è il vertice, che si ha con

$$t=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{-\frac{2}{25}}=\frac{25}{2}$$

che corrisponde a

$$x=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2},\quad \boxed{2x=5\sqrt{2}\ \ (base)}$$

da cui

$$y=\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}=\frac{4}{5}\sqrt{25-\frac{25}{2}}=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{50-25}{2}}=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{4}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},\quad \boxed{2y=2\sqrt{2}\ \ (altezza)}$$

E in definitiva allora, fra tutti i rettangoli inscrivibili nell'ellisse assegnata,
quello di area massima è il rettangolo le cui dimensioni orizzontale e verticale misurano risp. $5\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$.

TRASLAZIONE DI UNA CURVA NEL PIANO CARTESIANO

Abbiamo visto, nel capitolo sulle trasformazioni geometriche del volume 2,
che, data una curva di equazione $y = f(x)$ oppure $F(x,y) = 0$, e considerato un numero positivo p,

♪ se al posto di x si sostituisce $x - p$,
la nuova curva ha un grafico che, rispetto a quello della curva "madre",
è traslato orizzontalmente con "effetto bastian contrario", ossia: è traslato verso DESTRA di p unità.

♫ Analogamente, la sostituzione $x \to x + p$
porta a una curva "figlia" traslata verso SINISTRA di p unità rispetto alla curva "madre".

ELLISSE TRASLATA

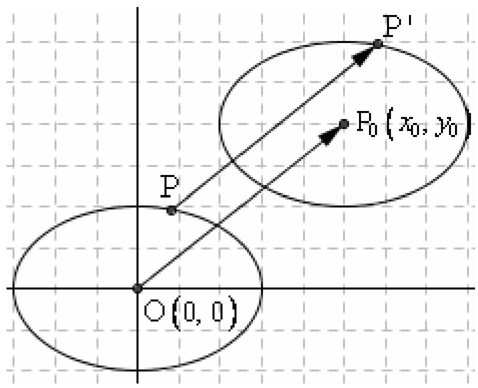
Consideriamo un'ellisse, che sia collocata nel piano cartesiano in modo da essere traslata rispetto alla posizione canonica.

Questa ellisse avrà il suo centro di simmetria in un punto $\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$ anziché nell'origine.

Essa potrà essere pensata come ottenibile per traslazione, a partire dall'ellisse canonica avente gli stessi semiassi.

Dunque
l'equazione di un'ellisse "traslata", di centro (x_0, y_0), sarà

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$



D'altronde, la nostra ellisse, nel sistema di riferimento ausiliario $X\mathrm{P}_0Y$ avente origine in $\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$, e traslato rispetto al sistema iniziale $x\mathrm{O}y$, si troverà in posizione canonica, e quindi avrà equazione della forma

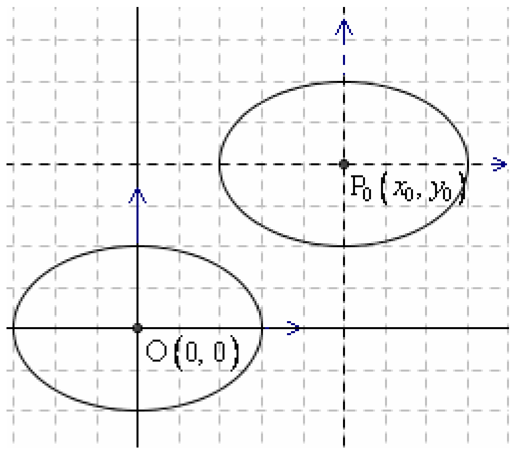
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

essendo *a*, *b* i semiassi orizzontale e verticale;
ora, tornando al sistema $x\mathrm{O}y$
tramite le equazioni di <u>cambiamento di riferimento</u>

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases},$$

si ricava appunto l'equazione

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

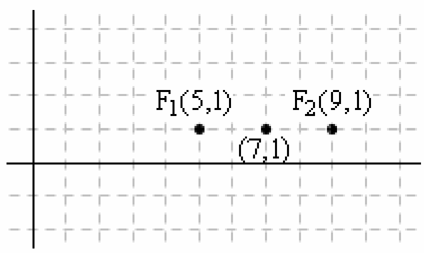


- ESEMPIO 1
  Scrivi l'equazione dell'ellisse di fuochi $\mathrm{F}_1(5,1);\ \mathrm{F}_2(9,1)$
  e semiasse maggiore 3.

  Il centro di simmetria della curva è il punto $(7,1)$.
  I fuochi sono in orizzontale:
  dunque il semiasse maggiore è quello orizzontale. Perciò
  $a = 3 \ \ (a^2 = 9)$.

  La semidistanza focale è $c = 2$.
  $c^2 = a^2 - b^2 \ \to \ b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$

  In definitiva l'equazione sarà $\dfrac{(x-7)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{5} = 1$



- ESEMPIO 2 - *Scrivi l'equazione dell'ellisse di fuochi* $\mathrm{F}_1(-2,3);\ \mathrm{F}_2(-2,-3)$ *e semiasse maggiore* 5.

  Soluzione: $\dfrac{(x+2)^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

- ESEMPIO 3 - *Qual è l'equazione dell'ellisse traslata di centro* $(1,-2)$ *e semiassi* 4, 5 ?

  Due possibilità: $\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y+2)^2}{25} = 1;\quad \dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$

DIETRO-FRONT: DALL'EQUAZIONE ALLA CURVA … SE POSSIBILE

Dunque l'equazione dell'ellisse traslata di centro (x_0, y_0) è:

$$(2) \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Se sviluppiamo i calcoli e liberiamo dai denominatori, otteniamo un'equazione dalla forma:

$$(3) \quad mx^2+ny^2+px+qy+r=0$$

E' lecito ora chiedersi se un'equazione che si presenta sotto la forma (3), ossia
un'equazione di 2° grado in x, y, mancante del "termine rettangolare" xy, rappresenti sempre un'ellisse.

La risposta è negativa.

Innanzitutto, si può dimostrare che

condizione necessaria affinché la (3) individui un'ellisse
è che *m, n* siano concordi.
Ma **tale condizione non è poi sufficiente,**
perché, anche con *m, n* concordi,
(3) potrebbe rappresentare
un luogo puntiforme, o il luogo vuoto.

Nella pratica, quando è data un'equazione dalla forma (3), con m, n concordi,
ed è richiesto di studiare la curva corrispondente,
si cerca di ricondurre la (3) alla forma (2), ammesso che ciò si riveli possibile,
applicando il **metodo del completamento del quadrato**.

- ESEMPIO 1

$$4x^2+2y^2-4x+12y+11=0$$

Potrebbe trattarsi di un'ellisse, in quanto i coefficienti di x^2 e y^2 sono concordi.

$$4(x^2-x)+2(y^2+6y)+11=0$$

$$4\left[\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\right]+2\left[\left(y^2+6y+9\right)-9\right]+11=0$$

$$4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-1+2\left(y^2+6y+9\right)-18+11=0$$

$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y+3\right)^2=8$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(y+3\right)^2}{4}=1$$

e l'ultima equazione ottenuta rivela trattarsi di un'ELLISSE TRASLATA,
di centro $\left(\frac{1}{2},-3\right)$ e semiassi $a=\sqrt{2}$ (semiasse orizzontale), $b=2$ (semiasse verticale).

- ESEMPIO 2

$$x^2+9y^2-2x+36y+46=0$$

Si ottiene, dopo opportuni passaggi: $\frac{(x-1)^2}{9}+(y+2)^2=-1$ LUOGO VUOTO

- ESEMPIO 3

$$4x^2+y^2+12x-10y+34=0$$

$\left(2x+3\right)^2+\left(y-5\right)^2=0$ LUOGO PUNTIFORME, RIDOTTO AL SOLO PUNTO $\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$.