32. ESERCIZI SULL'IPERBOLE

A partire dall'equazione di un'iperbole

♪ *stabilisci quanto valgono*

I. *le coordinate dei vertici e dei fuochi*
II. *la costante (differenza costante delle distanze di un punto dai fuochi)* $2k$
III. *le equazioni degli asintoti*
IV. *l'eccentricità*

♫ *disegna la curva*

1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 3) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$ 4) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$

5) $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 6) $\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{4}y^2=1$ 7) $\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{9}y^2=\frac{1}{25}$ 8) $x^2-2y^2+2=0$

9) $x^2-y^2=1$ 10) $y^2-x^2=1$ 11) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ 12) $y^2=x^2+25$

13) $xy=1$ 14) $xy=-6$ 15) $xy=12$

Scrivi l'equazione di un'iperbole conoscendone i fuochi e la costante (= differenza costante) 2k.

16) $F_{1,2}(\pm 4,\ 0);\ 2k=6$ 17) $F_{1,2}(0,\ \pm 2);\ 2k=2$

Scrivi l'equazione di un'iperbole conoscendone i vertici e i fuochi. Determinarne la costante e gli asintoti.

18) $V_{1,2}(\pm 5,\ 0);\ F_{1,2}(\pm 13,\ 0)$ 19) $V_{1,2}(0,\ \pm 2\sqrt{3});\ F_{1,2}(0,\ \pm 4)$

Scrivi l'equazione di un'iperbole conoscendone i vertici e gli asintoti.

20) $V_{1,2}(\pm 2,\ 0);\ y=\pm 3x$ 21) $V_{1,2}(\pm 2\sqrt{2},\ 0);\ y=\pm\frac{1}{4}x$ 22) $V_{1,2}(0, \pm 3);\ y=\pm\frac{3}{10}x$

Scrivi l'equazione di un'iperbole conoscendone i fuochi e gli asintoti.

23) $F_{1,2}(\pm 25,\ 0);\ y=\pm\frac{24}{7}x$ 24) $F_{1,2}(\pm 5,\ 0);\ y=\pm 2x\sqrt{6}$ 25) $F_{1,2}\left(0,\ \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right);\ y=\pm 2x$

Scrivi l'equazione di un'iperbole conoscendone i vertici e sapendo che passa per un punto P assegnato.

26) $V_{1,2}(\pm 1,\ 0);\ P\left(\frac{5}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$ 27) $V_{1,2}(\pm 4,\ 0);\ P\left(5,\ \frac{9}{4}\right)$ 28) $V_{1,2}(0,\ \pm 4);\ P\left(\frac{3}{2},\ 2\sqrt{5}\right)$

Scrivi l'equazione di un'iperbole conoscendone i fuochi e sapendo che passa per un punto P assegnato.

29) $F_{1,2}(\pm 2,\ 0);\ P(-2,\ 3)$ 30) $F_{1,2}(0,\ \pm 2\sqrt{2});\ P\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ 31) $F_{1,2}(\pm 5,\ 0);\ P\left(\sqrt{10},\ \frac{4}{3}\right)$

Scrivi l'equazione di un'iperbole canonica coi fuochi sull'asse x sapendo che:

32) ha come asintoti le rette $y=\pm 2x$ e passa per il punto $P(2,\ 2\sqrt{3})$
33) ha come asintoti le rette $y=\pm\frac{1}{2}x$ e passa per il punto $P(-2\sqrt{5},\ 1)$
34) ha eccentricità $e=\sqrt{2}$ e passa per $P(10,\ 6)$ 35) ha eccentricità $e=4/3$ e passa per $P(6,\ \sqrt{21})$
36) passa per la seguente coppia di punti: $(6,\ 4);\ (3\sqrt{2},\ 2)$
37) passa per la seguente coppia di punti: $(\sqrt{3},\ \sqrt{6});\ (-2,\ 3)$
38) passa per la seguente coppia di punti: $\left(-\frac{5}{4},\ -\frac{3}{4}\right);\ \left(\frac{13}{12},\ \frac{5}{12}\right)$
39) ha come asintoti le rette $y=\pm 2x$ e ha eccentricità $\sqrt{5}$
40) ha come asintoti le rette $y=\pm x\sqrt{2}$ e ha eccentricità $\sqrt{3}$

Scrivi l'equazione di un'iperbole canonica coi fuochi sull'asse y sapendo che:

41) ha come asintoti le rette $y = \pm x\sqrt{2}$ e passa per il punto $P(1, 2)$

42) ha come asintoti le rette $y = \pm\frac{3}{4}x$ e passa per il punto $P(8, 3\sqrt{5})$

43) ha eccentricità $e = 2$ e passa per $P(\sqrt{6}, \sqrt{3})$

44) ha eccentricità $e = 5/4$ e passa per $P\left(2, \frac{10}{3}\right)$

45) passa per la seguente coppia di punti: $(3, 4)$; $(2\sqrt{3}, 2\sqrt{5})$

46) passa per la seguente coppia di punti: $(8, 10)$; $(3, 3\sqrt{5})$

47) ha come asintoti le rette $y = \pm\frac{4}{3}x$ e ha eccentricità $\frac{5}{4}$

48) ha come asintoti le rette $y = \pm x\sqrt{2}$ e ha eccentricità $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Riscrivi le seguenti equazioni, in modo che il secondo membro sia $+1$ o -1; disegna la curva:

49) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ 50) $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$ 51) $y = \sqrt{3x^2 + 1}$ 52) $y = \frac{1}{2}\sqrt{9x^2 + 1}$, *con* $y \geq 0$

Considera la curva associata all'equazione data, e determina i valori del parametro per i quali

I) *rappresenta un'iperbole*
II) *rappresenta un'iperbole coi fuochi sull'asse x*
III) *rappresenta un'iperbole coi fuochi sull'asse y*

53) $\frac{x^2}{p-3} + \frac{y^2}{2p-1} = 1$ 54) $\frac{x^2}{4-p} + \frac{y^2}{p-1} = 1$ 55) $\frac{x^2}{p^2-9} + \frac{y^2}{p} = 1$

Scrivi l'equazione della retta tangente ad un'iperbole in un suo punto.

56) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ $P\left(-5, \frac{9}{4}\right)$ 57) $x^2 - y^2 = 1$ $P\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$ 58) $xy = 6$ $P(2, 3)$ 59) $xy = 6$ $P(-1, -6)$

Scrivi le equazioni delle rette tangenti ad un'iperbole assegnata condotte da un dato punto esterno.

60) $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ (3,2) 61) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ (2,1) 62) $x^2 - y^2 = 9$ (9,9)

Scrivi l'equazione di un'iperbole canonica, coi fuochi sull'asse x,
di cui si conoscono una retta tangente, e una seconda condizione.

63) Tangenza con la retta $t: x - y = 2$; passaggio per $P(6, -4)$

64) Tangenza con la retta $t: y = x - 2$; asintoti $y = \pm\frac{1}{3}x$

65) Tangenza con la retta $t: y = 2x - \sqrt{2}$; distanza fra i vertici uguale a 2

66) Tangenza con la retta $t: y = 2x - 1$; eccentricità uguale a 2

67) Tangenza con la retta $t: y = \frac{5x - 16}{3}$ nel punto di coordinate (5, 3)

Scrivi l'equazione di un'iperbole canonica, coi fuochi sull'asse y,
di cui si conoscono una retta tangente, e una seconda condizione.

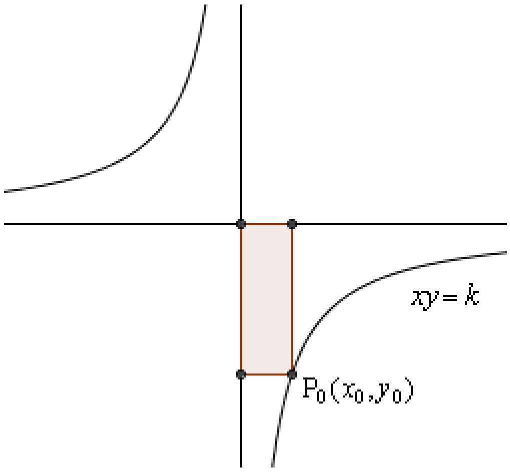
68) Tangenza con la retta $t: y = x + 1$; passaggio per $P(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{5})$

69) Tangenza con la retta $t: 3x - 5y - 4 = 0$; asintoti $y = \pm x$

70) Tangenza con la retta $t: y = 2x + 2$; distanza fra i fuochi uguale a 6

71) Tangenza con la retta $t: 2x + 3y = 1$ nel punto $(-1, 1)$

72)
Considera l'iperbole di equazione $xy=-6$
e dimostra che l'area del rettangolo
che le perpendicolari agli assi cartesiani
per un suo punto qualsiasi $P_0(x_0, y_0)$
formano con gli assi cartesiani stessi
si mantiene costante,
dovunque si prenda, sull'iperbole, il punto P_0.



72')
Considera, in generale, un'iperbole di equazione $xy=k$
e dimostra che le perpendicolari agli assi cartesiani
per un suo punto qualsiasi $P_0(x_0, y_0)$
formano con gli assi cartesiani stessi
si mantiene costante,
dovunque si prenda, sull'iperbole, il punto P_0.

73)
Considera l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ e dimostra che
il prodotto delle distanze di un suo punto qualsiasi $P_0(x_0, y_0)$ dai due asintoti si mantiene costante
(troverai che questo prodotto costante vale $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$).

73')
Secondo te, l'esercizio precedente dimostra che in *QUALSIASI* iperbole, anche al di fuori di un riferimento cartesiano, è costante il prodotto delle distanze di un punto della curva dai suoi asintoti?

74)
Considera l'iperbole di equaz. $xy=-6$, scrivi l'equazione della retta ad essa tangente nel suo punto di ascissa 2 e dimostra che tale tangente individua, insieme agli asintoti, un triangolo di area 12.
Verifica che lo stesso avviene per il punto dell'iperbole che ha ascissa -6.

74')
Considera l'iperbole di equazione $xy=-6$ e dimostra che la tangente ad essa in un suo punto (x_0, y_0) individua, insieme agli asintoti, un triangolo la cui area si mantiene costantemente uguale a 12.

74'')
Considera l'iperbole di equazione $xy=k$ e dimostra che la tangente ad essa in un suo punto (x_0, y_0) individua, insieme agli asintoti, un triangolo la cui area si mantiene costantemente uguale a $2|k|$.

75)
Considera l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ e dimostra che
la tangente ad essa in un suo punto individua, insieme agli asintoti,
un triangolo la cui area si mantiene costante, verificando che tale area costante vale ab.

76)
Considera l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
e dimostra che, tracciate per un suo punto qualunque le parallele agli asintoti
fino ad incontrare gli asintoti stessi, l'area del quadrilatero così ottenuto si mantiene costante
(*Calcoli laboriosi, ma impostandoli nel migliore dei modi …*
Ti converrà decisamente tracciare una figura indicativa! Troverai che questa costante vale $\frac{ab}{2}$).

77)
Data un'iperbole canonica coi fuochi sull'asse *x*,
stabilisci quanto misura il lato di un quadrato che abbia i vertici sull'iperbole stessa.
In certi casi però tale quadrato … non esiste. Quando?

78)

Considera l’iperbole di equazione $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$

e dimostra che sulla tangente ad essa nel suo punto A di ascissa -6, appartenente al 2° quadrante,
gli asintoti staccano un segmento il cui punto medio è proprio A.
Verifica che lo stesso avviene anche per il punto B, situato nel 1° quadrante e avente ordinata 2.

78’)

Considera l’iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

e dimostra che sulla tangente ad essa in un suo punto $\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$
gli asintoti staccano un segmento il cui punto medio è proprio P_0.

79)

Dimostra che, data una circonferenza γ di centro A e un punto B ad essa esterno,
il luogo dei punti equidistanti da γ e da B è un ramo di iperbole.
Quanto vale la costante (= differenza costante) di questa iperbole? Dove sono i suoi fuochi?

80)

Dimostra che, date due circonferenze γ e γ' di centri O e O' e raggi r ed r' una esterna all’altra,
il luogo dei centri C delle circonferenze che sono tangenti sia a γ che a γ' è un’iperbole.
Dove sono i fuochi di questa iperbole?
Quanto vale la sua costante (= differenza costante delle distanze di un punto qualsiasi dai fuochi)?

81)

L’iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ha, com’è noto,

fuochi di coordinate $\mathrm{F}_1=(-c,\,0)=\left(-\sqrt{a^2+b^2},\,0\right)$; $\mathrm{F}_2=(c,\,0)=\left(\sqrt{a^2+b^2},\,0\right)$

ed eccentricità $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

Dimostra ora che, dati tre numeri positivi $a, b, c=\sqrt{a^2+b^2}$,

e considerati il punto $\mathrm{F}_2(c,\,0)$ e la retta $d_2: x=\frac{a^2}{c}$,

anche il luogo dei punti P tali che si abbia $\frac{\mathrm{PF}_2}{\mathrm{PH}}=\frac{c}{a}$, dove PH indica la distanza di P dalla retta d_2,

ha per equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Allo stesso modo, si potrebbe provare che si perviene all’equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

pure ricercando il luogo dei punti per i quali è uguale a $\frac{c}{a}$

il rapporto delle distanze dal punto $\mathrm{F}_1(-c,\,0)$ *e dalla retta* $d_1:\ x=-\frac{a^2}{c}$.

In definitiva, da tutto ciò emerge che l’iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *può essere pensata come luogo dei punti per i quali è costante il rapporto delle distanze da un “fuoco” e da una “direttrice”, ed in tal caso ha come “direttrici” le due rette* $x=\pm\frac{a^2}{c}$ *mentre il rapporto costante è uguale a* $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ *).*

82)

Stabilisci da quali punti è formato il grafico delle curve seguenti:

a) $9x^2-y^2=0$ b) $9x^2+y^2=0$ c) $9xy=0$ d) $9x^2+y^2+1=0$ e) $|y|=|x|$ f) $(9x-y)^2=0$

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SULL'IPERBOLE

1) $V_{1,2}(\pm 3,0)$ $F_{1,2}(\pm 5,\,0)$; $2k=6$; $y=\pm\frac{4}{3}x$; $e=\frac{5}{3}$

2) $V_{1,2}(\pm 4,0)$ $F_{1,2}(\pm 5,\,0)$; $2k=8$; $y=\pm\frac{3}{4}x$; $e=\frac{5}{4}$

3) $V_{1,2}(0,\,\pm 3)$ $F_{1,2}(0,\,\pm 5)$; $2k=6$; $y=\pm\frac{3}{4}x$; $e=\frac{5}{3}$

4) $V_{1,2}(0,\,\pm 4)$ $F_{1,2}(0,\,\pm 5)$; $2k=8$; $y=\pm\frac{4}{3}x$; $e=\frac{5}{4}$

5) $V_{1,2}(\pm 1,\,0)$ $F_{1,2}(\pm\sqrt{5},\,0)$; $2k=2$; $y=\pm 2x$; $e=\sqrt{5}$

6) $V_{1,2}\left(\pm\frac{3}{2},\,0\right)$ $F_{1,2}\left(\pm\frac{5}{2},\,0\right)$; $2k=3$; $y=\pm\frac{4}{3}x$; $e=\frac{5}{3}$

7) $V_{1,2}\left(\pm\frac{4}{5},\,0\right)$ $F_{1,2}(\pm 1,\,0)$; $2k=\frac{8}{5}$; $y=\pm\frac{3}{4}x$; $e=\frac{5}{4}$

8) $V_{1,2}(0,\,\pm 1)$ $F_{1,2}(0,\,\pm\sqrt{3})$; $2k=2$; $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$; $e=\sqrt{3}$

9) $V_{1,2}(\pm 1,\,0)$ $F_{1,2}(\pm\sqrt{2},\,0)$; $2k=2$; $y=\pm x$; $e=\sqrt{2}$

10) $V_{1,2}(0,\,\pm 1)$ $F_{1,2}(0,\,\pm\sqrt{2})$; $2k=2$; $y=\pm x$; $e=\sqrt{2}$

11) $V_{1,2}(\pm 2,\,0)$ $F_{1,2}(\pm 2\sqrt{2},\,0)$; $2k=4$; $y=\pm x$; $e=\sqrt{2}$

12) $V_{1,2}(0,\,\pm 5)$ $F_{1,2}(0,\,\pm 5\sqrt{2})$; $2k=10$; $y=\pm x$; $e=\sqrt{2}$

13) $V_1(-1,\,-1),\ V_2(1,\,1)$; $F_1(-\sqrt{2},\,-\sqrt{2}),\ F_2(\sqrt{2},\,\sqrt{2})$; $2k=2\sqrt{2}$; *asintoti* $y=0,\ x=0$; $e=\sqrt{2}$

14) $V_1(-\sqrt{6},\,\sqrt{6}),\ V_2(\sqrt{6},\,-\sqrt{6})$; $F_1(-2\sqrt{3},\,2\sqrt{3}),\ F_2(2\sqrt{3},\,-2\sqrt{3})$; $2k=4\sqrt{3}$; *asintoti* $y=0,\ x=0$; $e=\sqrt{2}$

15) $V_1(-2\sqrt{3},\,-2\sqrt{3}),\ V_2(2\sqrt{3},\,2\sqrt{3})$; $F_1(-2\sqrt{6},\,-2\sqrt{6}),\ F_2(2\sqrt{6},\,2\sqrt{6})$; $2k=4\sqrt{6}$; *asintoti* $y=0,\ x=0$; $e=\sqrt{2}$

16) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ 17) $\frac{x^2}{3}-y^2=-1$

18) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$; $2k=10$; $y=\pm\frac{12}{5}x$ 19) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=-1$; $2k=4\sqrt{3}$; $y=\pm x\sqrt{3}$

20) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$ 21) $\frac{x^2}{8}-2y^2=1$ 22) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{9}=-1$

23) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{576}=1$ 24) $x^2-\frac{y^2}{24}=1$ 25) $4x^2-y^2=-1$

26) $x^2-y^2=1$ 27) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 28) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$

29) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 30) $x^2-y^2=-4$ 31) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

32) $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 33) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 34) $x^2-y^2=64$ 35) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$

36) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$ 37) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 38) $x^2-y^2=1$ 39) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ 40) $\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1$

41) $x^2-\frac{y^2}{2}=-1$ 42) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$ 43) $\frac{x^2}{3}-y^2=-1$ 44) $\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{4}=-1$

45) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=-1$ 46) $x^2-y^2=-36$ 47) $x^2-\frac{y^2}{\frac{16}{9}}=-1$ 48) $x^2-\frac{y^2}{2}=-1$

Poiché il risultato di una radice quadrata è sempre ≥ 0,
in tutti i casi l'equazione ottenuta andrà abbinata alla condizione $y \geq 0$.
Ciascuna delle curve in questione sarà la metà di una iperbole (un solo ramo oppure due "metà di un ramo")

49) $x^2 - y^2 = 1$, *con* $y \geq 0$ 50) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, *con* $y \geq 0$ 51) $3x^2 - y^2 = -1$, *con* $y \geq 0$ 52) $9x^2 - 4y^2 = -1$, $y \geq 0$

53) *Iperbole con* $\frac{1}{2} < p < 3$
In tal caso, l'iperbole ha sempre i fuochi sull'asse y

54) *Iperbole con* $p < 1 \vee p > 4$
L'iperbole ha i fuochi sull'asse x se $p < 1$, *sull'asse y se* $p > 4$

55) *Iperbole con* $p < -3 \vee 0 < p < 3$. *L'iperbole ha i fuochi sull'asse x se* $p < -3$, *sull'asse y se* $0 < p < 3$

56) $5x + 4y + 16 = 0$ 57) $5x - 3y = 4$ 58) $3x + 2y = 12$ 59) $6x + y + 12 = 0$

60) $y = x - 1,\ \ y = \frac{5}{7}x - \frac{1}{7}$ 61) $y = x - 1,\ \ x = 2$ 62) Soltanto una tangente: $y = \frac{5}{4}x - \frac{9}{4}$

63) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$ 64) $2x^2 - 18y^2 = 9$ 65) $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 66) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 67) $x^2 - y^2 = 16$

68) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = -1$ 69) $x^2 - y^2 = -1$ 70) $x^2 - \frac{y^2}{8} = -1$ 71) $2x^2 - 3y^2 = -1$

72) La base del rettangolo vale $|x_0|$ e l'altezza $|y_0|$, per cui l'area vale $|x_0| \cdot |y_0| = |x_0 y_0| = |-6| = 6 = \textit{costante.}$

72') La base del rettangolo vale $|x_0|$ e l'altezza vale $|y_0|$, per cui l'area vale $|x_0| \cdot |y_0| = |x_0 y_0| = |k| = \textit{costante.}$

73) Gli asintoti, com'è noto, hanno equazioni $y = \pm \frac{b}{a}x$ ossia, in forma implicita, $\pm bx - ay = 0$.

Le distanze del punto $P_0(x_0, y_0)$ dai due asintoti valgono $\frac{|\pm bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ e il loro prodotto è

$$\frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|-bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b^2 x_0{}^2 - a^2 y_0{}^2|}{a^2 + b^2}.$$

Poiché però $P_0(x_0, y_0)$ appartiene all'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, si ha $\frac{x_0{}^2}{a^2} - \frac{y_0{}^2}{b^2} = 1$

quindi $b^2 x_0{}^2 - a^2 y_0{}^2 = a^2 b^2$ e perciò il prodotto delle distanze è uguale a $\frac{|a^2 b^2|}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

73') Sì, perché presi su di un piano un riferimento cartesiano e una qualsivoglia iperbole, basta eventualmente sottoporre la curva ad un'opportuna traslazione e rotazione per portarla in posizione canonica coi fuochi sull'asse *x*; oppure, presa un'iperbole, basta, sul suo piano, scegliere un riferimento cartesiano nel quale l'iperbole sia in posizione canonica, coi fuochi sull'asse *x*.

77) *lato quadrato* $= \frac{2ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ (*se* $b > a$; *altrimenti il quadrato "inscritto" non esiste*)

79) I punti P equidistanti da γ e da B sono tali che $PA - PB = r = \textit{costante}$ (r = *raggio di* γ)
La costante è dunque uguale al raggio di γ, i fuochi sono in A e in B.

80) I centri C delle circonferenze tangenti sia a γ che a γ' sono tali che
$CO - CO' = r - r'$ (*se* $r > r'$), $CO' - CO = r' - r$ (*se* $r' > r$)
Dunque i fuochi dell'iperbole sono O e O' e la costante è $|r - r'|$.

82) a) equivale a $(3x + y)(3x - y) = 0$ e dunque alla coppia di equazioni $3x + y = 0 \vee 3x - y = 0$. Il suo grafico è perciò formato da due rette incidenti: si tratta di una "iperbole degenere nei suoi asintoti".
b) è una conica degenere "di tipo ellittico", che si riduce a un punto solo (l'origine).
c) ha come grafico la coppia di rette $x = 0$, $y = 0$ (iperbole degenere nei suoi asintoti)
d) è il luogo vuoto
e) ha come grafico la coppia di rette $y = \pm x$ (iperbole degenere nei suoi asintoti).
f) si può pensare costituita dalla retta $9x - y = 0$ "contata due volte",
o, in altre parole, dalla coppia di rette sovrapposte $r_1 : 9x - y = 0,\ r_2 : 9x - y = 0$.
Questa conica è comunque considerata "di tipo parabolico" perché $\Delta = 0$ (vedi pag. 147)

ESERCIZI SULLA FUNZIONE OMOGRAFICA

Disegna la seguente funzione omografica, dopo averne determinato il centro.

1) $y=\dfrac{x-5}{x-2}$ 2) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ 3) $y=\dfrac{2x+7}{6x+3}$ 4) $y=-\dfrac{x}{x-4}$

5) $y=\dfrac{6x}{2x-4}$ 6) $y=\dfrac{4-x}{3-x}$ 7) $y=\dfrac{x}{2x+6}$ 8) $xy-x+y+3=0$

Disegna la seguente funzione omografica,
scrivendo anche le equazioni dei suoi asintoti e assi di simmetria,
e determinando inoltre le coordinate dei vertici e dei fuochi.

9) $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ 10) $y=\dfrac{2x}{x-3}$

11) $y=\dfrac{x}{2x-8}$ 12) $y=\dfrac{3-x}{x}$

13) $y=\dfrac{6}{5x-1}$ 14) $xy-4x-5y+20=0$

15) Determina i parametri a,b,c,d in modo che la funzione omografica $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

abbia come asintoti le rette $x=-3,\ y=2$ e passi per il punto $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

(si capisce che i 4 parametri a,b,c,d non sono determinati in modo unico,
bensì "a meno di una costante di proporzionalità"…)

16) Determina i parametri a,b,c,d in modo che la funzione omografica $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

abbia per asintoto verticale la retta $x=1$ e intersechi gli assi cartesiani nei due punti $(0,-4)$ e $(4,0)$.

17) Scrivi l'equazione della funzione omografica passante per i tre punti $(1,3), (2,2), (-1,-1)$
e scrivi poi l'equazione della retta ad essa tangente nel punto $(1,3)$

> Attenzione: se si vuole applicare la "regola degli sdoppiamenti",
> occorre sempre preliminarmente portare l'equazione sotto la forma
> $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$
> … Altrimenti la regola "non funziona"!

18) Determina l'equazione di una funzione omografica che

abbia per centro il punto $(0,3)$ e sia tangente alla retta $y=6x-3$ nel punto $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

19) Determina l'equazione di una funzione omografica che abbia come asintoto orizzontale la retta $y=1$,
che intersechi l'asse delle y nel punto di ordinata -2, e l'asse delle x nel punto di ascissa 6.
Scrivi l'equazione della retta tangente alla curva nel suo punto di ascissa -6.

20) Determina l'equazione di una funzione omografica che abbia un vertice in $(1,5)$ e il centro di ascissa -1.
E' richiesta anche l'equazione della retta tangente nel vertice di cui sopra.

21) Scrivi l'equazione della funzione omografica i cui fuochi sono i punti di coordinate $F_1(2,-1)$ e $F_2(-2,-5)$

22) Scrivi l'equazione della funzione omografia tale che uno dei suoi vertici sia il punto $V_1(2,3)$
e che l'altro vertice, posto nel 3° quadrante, abbia distanza 5 dall'origine del sistema di rif. cartesiano.

Stabilisci per quali valori del parametro k
la seguente equazione NON rappresenta una funzione omografica
e dì, in questi casi, quale luogo geometrico esprime.

23) $y=\dfrac{(k+1)x+3}{kx+4}$ 24) $y=\dfrac{kx-6}{x+2}$ 25) $y=\dfrac{x+2}{kx+k+2}$ 26) $y=\dfrac{x-k}{kx-5x-14}$

RISPOSTE

1) $C(2,1)$ 2) $C(-1,2)$ 3) $C\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ 4) $C(4,-1)$ 5) $C(2,3)$ 6) $C(3,1)$ 7) $C\left(-3,\frac{1}{2}\right)$ 8) $C(-1,1)$

9) $\textit{asintoti}: x=-1,\ y=1;\ \ \textit{assi}: y=x+2,\ y=-x$
$V_1\left(-1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right)\quad V_2\left(-1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\right)$
$F_1\left(-1-\sqrt{6},1+\sqrt{6}\right)\quad F_2\left(-1+\sqrt{6},1-\sqrt{6}\right)$

10) $\textit{asintoti}: x=3,\ y=2;\ \ \textit{assi}: y=x-1,\ y=-x+5$
$V_1\left(3-\sqrt{6},\,2-\sqrt{6}\right)\quad V_2\left(3+\sqrt{6},\,2+\sqrt{6}\right)$
$F_1\left(3-2\sqrt{3},\,2-2\sqrt{3}\right)\quad F_2\left(3+2\sqrt{3},\,2+2\sqrt{3}\right)$

11) $\textit{asintoti}: x=4,\ y=\frac{1}{2};\ \ \textit{assi}: y=x-\frac{7}{2},\ y=-x+\frac{9}{2}$
$V_1\left(4-\sqrt{2},\,\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)\quad V_2\left(4+\sqrt{2},\,\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)$
$F_1\left(2,\,-\frac{3}{2}\right)\quad F_2\left(6,\,\frac{5}{2}\right)$

12) $\textit{asintoti}: x=0,\ y=-1;\ \ \textit{assi}: y=x-1,\ y=-x-1$
$V_1\left(-\sqrt{3},\,-1-\sqrt{3}\right)\quad V_2\left(\sqrt{3},\,-1+\sqrt{3}\right)$
$F_1\left(-\sqrt{6},\,-1-\sqrt{6}\right)\quad F_2\left(\sqrt{6},\,-1+\sqrt{6}\right)$

13) $\textit{asintoti}: x=\frac{1}{5},\ y=0;\ \ \textit{assi}: y=x-\frac{1}{5},\ y=-x+\frac{1}{5}$
$V_1\left(\frac{1}{5}-\frac{\sqrt{30}}{5},\,-\frac{\sqrt{30}}{5}\right)\quad V_2\left(\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{30}}{5},\,\frac{\sqrt{30}}{5}\right)$
$F_1\left(\frac{1}{5}-\frac{2\sqrt{15}}{5},\,-\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)\quad F_2\left(\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{15}}{5},\,\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$

14) $xy-4x-5y+20=0$
$(x-5)(y-4)=0$
E' una iperbole "degenere nei suoi asintoti", ossia che si riduce alla coppia di rette
$x=5,\ y=4$

15) Si capisce che i 4 parametri a,b,c,d non sono determinati in modo unico, bensì "a meno di una costante di proporzionalità".
Difatti, se ad es. il valore di tutti e 4 venisse raddoppiato, la frazione a 2° membro resterebbe uguale a prima!

Si può impostare il sistema $\begin{cases}-\frac{d}{c}=-3\\ \frac{a}{c}=2\\ \frac{b}{d}=\frac{1}{2}\end{cases}$ che, avendo 4 incognite ma solo 3 equazioni,

è indeterminato con 1 grado di libertà (3 delle incognite potranno essere espresse in funzione della restante).

Si ha $\begin{cases}d=3c\\ a=2c\\ b=\frac{1}{2}d=\frac{3}{2}c\end{cases}$ dunque risolvono il sistema le quaterne della forma $\begin{cases}a=2c\\ b=\frac{3}{2}c\\ c\ \textit{qualsiasi}\ (\textit{purché}\neq 0)\\ d=3c\end{cases}$;

fra di esse, la quaterna $\begin{cases}c=2\\ a=4\\ b=3\\ d=6\end{cases}$. La funzione omografica richiesta si può scrivere, ad es., come $y=\frac{4x+3}{2x+6}$.

16) $y=\frac{4-x}{x-1}$ 17) $y=\frac{x+2}{x};\ y=-2x+5$ 18) $y=\frac{6x-3}{2x}$ 19) $y=\frac{x-6}{x+3};\ y=x+10$

20) $y=\frac{3x+7}{x+1};\ x+y=6$ 21) $y=\frac{-3x+2}{x};$ 22) $y=\frac{9}{x+1}$

23) Occorre individuare i valori di k per i quali

- si annulla il coefficiente di x a denominatore
- risulta $\frac{k+1}{k}=\frac{3}{4}$

Si ottiene così: $k=0$ (retta $y=\frac{x+3}{4}$); $k=-4$ (retta $y=\frac{3}{4}$, privata del punto $\left(1,\frac{3}{4}\right)$)

24) $k=-3$ (retta $y=-3$, privata del punto $(-2,-3)$)

25) $k=0$ (retta $y=\frac{x+2}{2}$); $k=2$ (retta $y=\frac{1}{2}$, privata del punto $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$)

26) $k=5$ (retta $y=\frac{5-x}{14}$); $k=-2$ (retta $y=-\frac{1}{7}$, senza il punto $\left(-2,-\frac{1}{7}\right)$); $k=7$ (retta $y=\frac{1}{2}$, senza $\left(7,\frac{1}{2}\right)$)

ESERCIZI SULL'IPERBOLE CANONICA "TRASLATA"

Determina centro, vertici, e asintoti dell'iperbole di equazione:

1) $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{16}=1$ 2) $\frac{(y-2)^2}{3}-x^2=1$ 3) $\frac{(x-3)^2}{25}=9(y+1)^2-4$

4) $9(x-5)^2-1=(y+2)^2$ 5) $(y-1)^2-(x+1)^2=2$ 6) $(2x-1)^2=3+y^2$

Porta le seguenti equazioni di iperboli traslate sotto la forma $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$

così da determinarne il centro, i vertici e gli asintoti:

7) $4x^2-8x-9y^2+36y-68=0$ 8) $9x^2+18x-16y^2+96y-139=0$ 9) $x^2-4y^2-10x+29=0$

10) $9x^2-y^2+6y=18$ 11) $x^2-36y^2=5-4x$ 12) $2x^2-4y^2-8x-32y-55=0$

Scrivi l'equazione dell'iperbole "traslata" con le seguenti caratteristiche
(C *centro di simmetria,* $F_{1,2}$ *fuochi,* $V_{1,2}$ *vertici, c semidist. focale, 2k= differenza costante, e = eccentricità*)

13) $F_1(4,1),\ F_2(10,1);\ 2k=4$ 14) $V_1(2,0),\ V_2(2,8);\ F_1(2,-1),\ F_2(2,9)$

15) $C(-1,4)$; *un asintoto è* $y=x+5$; *passaggio per* $(4,1)$

16) *Asintoti* $y=x+5,\ y=-x+3$; *passaggio per* $(-4,9)$

17) $V_{1,2}(\pm 3,5)$; *asintoti* $2x-3y+15=0,\ 2x+3y-15=0$

18) $F_1(3-\sqrt{5},-2),\ F_2(3+\sqrt{5},-2)$; *asintoti* $y=2x-8,\ y=-2x+4$

19) $V_1(0,4);\ V_2(0,6)$; *passaggio per* $(8,2)$

20) $F_1(-4,-1),\ F_2(2,-1)$; *passaggio per* $(-6,-5)$

21) $C(-1,-1)$; $e=\frac{3}{2}$; *passaggio per* $(9,8)$

22) $C(-1,-1)$; *passaggio per* $(-4,0)$ *e per* $(3,2\sqrt{2}-1)$ 23) $e=\frac{\sqrt{13}}{3}$; $V_1(0,1),\ V_2(0,4)$

24) $C(1,1)$; *un asintoto è* $3x-4y+1=0$; *ciascun fuoco ha distanza 2 dal vertice più vicino*

Riconosci le caratteristiche delle figure associate alle seguenti equazioni:

25) $x^2-y^2+4x=-4$ 26) $9x^2-y^2-6x+6y-8=0$ 27) $3x^2+(y-1)^2=0$

28) $x^2+y^2-2x+2y+2=0$ 29) $(2x-1)^2=(y+2)^2$ 30) $(2x-1)^2=-(y+2)^2$

31) $x^2+2xy+y^2-x-y=0$ 32) $x^2-2xy+y^2=0$ 33) $x^2+2xy+y^2-4(x+y-1)=0$

RISPOSTE

1)
$C(-2,1)$
$V_{1,2}=(-2\pm 3,1)=\left\langle\begin{matrix}(-5,1)\\(1,1)\end{matrix}\right.$
$y-1=\pm\frac{4}{3}(x+2)$

2)
$x^2-\frac{(y-2)^2}{3}=-1$
$C(0,2)$
$V_{1,2}=(0,2\pm\sqrt{3})$
$y-2=\pm x\sqrt{3}$

3)
$\frac{(x-3)^2}{100}-\frac{(y+1)^2}{4/9}=-1$
$C(3,-1)\quad V_{1,2}=\left(3,-1\pm\frac{2}{3}\right)$
$y+1=\pm\frac{1}{15}(x-3)$

4)
$\frac{(x-5)^2}{1/9}-(y+2)^2=1$
$C(5,-2)$
$V_{1,2}=\left(5\pm\frac{1}{3},-2\right)$
$y+2=\pm 3(x-5)$

5)
$\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{(y-1)^2}{2}=-1$
$C(-1,1)$
$V_{1,2}=(-1,1\pm\sqrt{2})$
$y-1=\pm(x+1)$

6)
$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{3/4}-\frac{y^2}{3}=1$
$C\left(\frac{1}{2},0\right)\quad V_{1,2}=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$
$y=\pm 2\left(x-\frac{1}{2}\right)$

7)
$$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$$
$C(1,\,2)$
$V_{1,2}=(1\pm 3,\,2)$
$y-2=\pm\frac{2}{3}(x-1)$

8)
$$\frac{(x+1)^2}{\frac{4}{9}}-\frac{(y-3)^2}{\frac{1}{4}}=1$$
$C(-1,\,3)$
$V_{1,2}=\left(-1\pm\frac{2}{3},\,3\right)$
$y-3=\pm\frac{3}{4}(x+1)$

9)
$$\frac{(x-5)^2}{4}-y^2=-1$$
$C(5,\,0)$
$V_{1,2}=(5,\,\pm 1)$
$y=\pm\frac{1}{2}(x-5)$

10)
$$x^2-\frac{(y-3)^2}{9}=1$$
$C(0,\,3)$
$V_{1,2}=(\pm 1,\,3)$
$y-3=\pm 3x$

11)
$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$$
$C(-2,\,0)$
$V_{1,2}=(-2\pm 3,\,0)$
$y=\pm\frac{1}{6}(x+2)$

12)
$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{2}}-\frac{(y+4)^2}{\frac{1}{4}}=-1$$
$C(2,\,-4)$
$V_{1,2}=\left(2,\,-4\pm\frac{1}{2}\right)$
$y+4=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$

13) $\frac{(x-7)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{5}=1$

14) $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-4)^2}{16}=-1$

15) $(x+1)^2-(y-4)^2=16$

16) $(x+1)^2-(y-4)^2=-16$

17) $\frac{x^2}{9}-\frac{(y-5)^2}{4}=1$

18) $(x-3)^2-\frac{(y+2)^2}{4}=1$

19) $\frac{x^2}{8}-(y-5)^2=-1$

20) $\frac{(x+1)^2}{5}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$

21) $\frac{(x+1)^2}{\frac{5}{4}}-(y+1)^2=-1$

22) $(x+1)^2-(y+1)^2=8$

23) $x^2-\frac{\left(y-\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}=-1$

24)
$$\frac{(x-1)^2}{64}-\frac{(y-1)^2}{36}=1$$
oppure
$$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=-1$$

25) Iperbole degenere nei suoi due asintoti $x+y+2=0,\; x-y+2=0$

26) Iperbole degenere nei suoi due asintoti $3x+y-4=0,\; 3x-y+2=0$

27) Conica di tipo ellittico, degenere nel solo punto $(0,1)$

28) $(x-1)^2+(y+1)^2=0$: conica di tipo ellittico, degenere nel punto $(1,-1)$

29) Iperbole degenere nei suoi due asintoti $2x-y-3=0,\; 2x+y+1=0$

30) Conica di tipo ellittico, degenere nel solo punto $\left(\frac{1}{2},-2\right)$

31) $(x+y)(x+y-1)=0$: iperbole degenere nei suoi asintoti $x+y=0,\; x+y-1=0$

32) E'una conica degenere di tipo parabolico, che consiste nella retta $x-y=0$ "contata 2 volte"

33) $(x+y-2)^2=0$:
è una conica degenere di tipo parabolico, che consiste nella retta $x+y-2=0$ "contata 2 volte"