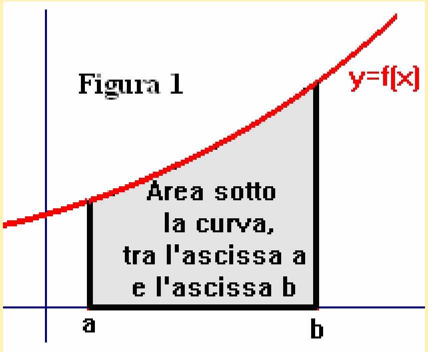
L'INTEGRALE DEFINITO

1. L' "area sotto una curva"

Il calcolo dell' "**area sotto una curva**", ossia **dell'area della regione di piano compresa fra una data curva e l'asse delle ascisse (entro la fascia di piano delimitata da due ascisse fissate)**, è un problema il cui interesse è enorme non solo in matematica pura, ma anche in svariati campi applicativi.

Ad esempio, **in Fisica**, l' "area sotto una curva" può assumere, di volta in volta, il significato di

- "**spazio complessivo** percorso in un certo intervallo di tempo" (quando sia nota la legge della *velocità* in funzione del *tempo*);
- "**lavoro** effettuato **da una forza** su di un oggetto che si sposta lungo un certo arco di traiettoria" (quando sia nota, per ogni singola posizione assunta dall'oggetto, la componente della *forza* nella direzione dello *spostamento*);
- ecc. ecc. ecc.



Nel seguito, chiameremo "**trapezoide**" la figura **mistilinea** (quella che è ombreggiata in Figura 1) di cui desideriamo calcolare l'area.

Supponiamo inizialmente, per semplicità, che la funzione $f(x)$ considerata sia monotòna crescente (d'ora in poi, nell'aggettivo, ometteremo l'accento, che comunque è da intendersi cada sull'*ultima* "o")

Consideriamo le figure qui a fianco.
L'intervallo [a,b] è stato suddiviso in n parti uguali,
ciascuna di ampiezza $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$,
e gli estremi delle suddivisioni sono stati indicati con x_k :
$x_0 = \mathrm{a},\ x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_{n-1},\ x_n = \mathrm{b}$

Il poligono ombreggiato viene detto "**plurirettangolo inscritto**" e la sua area fornisce, evidentemente, un'**approssimazione per difetto** dell'area del trapezoide, approssimazione **tanto più precisa quanto più alto è il numero *n* delle suddivisioni di [a,b]**

(in fig. 2a è $n=4$, e l'approssimazione è piuttosto imprecisa; ma in fig. 2b, con $n=8$, l'approssimazione si fa già più soddisfacente).

Abbiamo

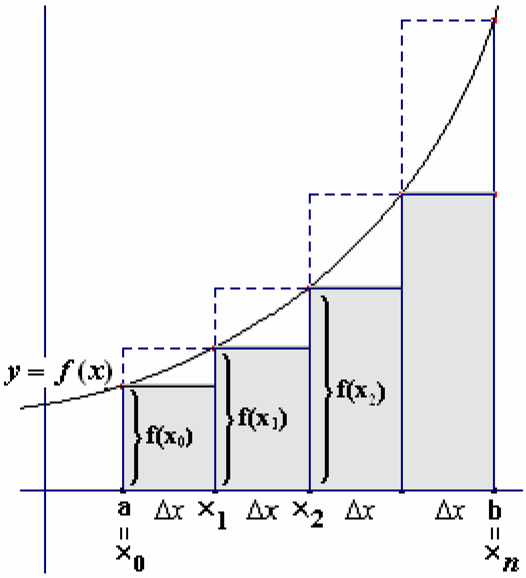
Area plurirettangolo inscritto =
= approssimazione per difetto dell'area del trapezoide =
= somma aree rettangoli ombreggiati =

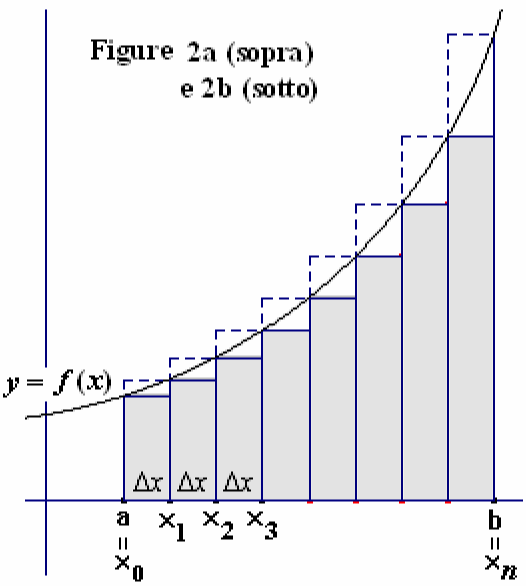
$$= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x$$

Le figure mostrano anche il cosiddetto "**plurirettangolo circoscritto**" (dai contorni superiori tratteggiati), la cui area rappresenta un'**approssimazione per eccesso** dell'area cercata, **tanto più precisa quanto più è alto il numero *n* delle suddivisioni di [a, b]**.

Area plurirettangolo circoscritto =
= approssimazione per eccesso dell'area del trapezoide =
= somma aree rettangoli più alti =

$$= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$





Poniamoci ora in una situazione più generale.

**Non supporremo più che la funzione sia necessariamente monotona su [a,b];
ci limiteremo a supporla continua su [a,b].**

In questo caso, le altezze dei singoli rettangoli costituenti i due plurirettangoli inscritto e circoscritto non saranno più, in generale, i valori assunti dalla funzione alle estremità dell'intervallino $[x_{k-1}, x_k]$, ma saranno, rispettivamente, il minimo m_k e il massimo M_k della $f(x)$ su $[x_{k-1}, x_k]$.
(Osserviamo per inciso che *una funzione continua su di un intervallo chiuso e limitato ammette ivi sempre minimo assoluto e massimo assoluto: teorema di* ***Weierstrass***).
Avremo allora

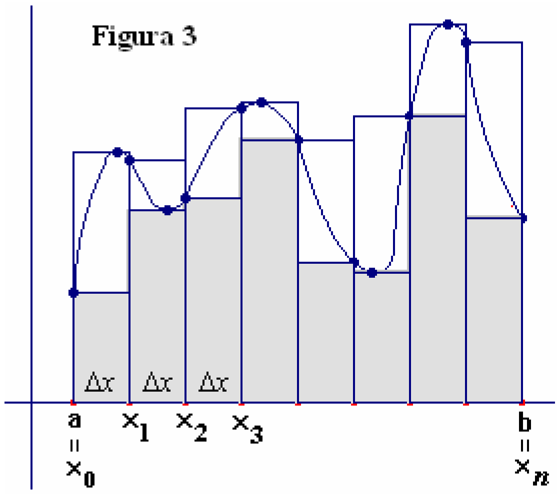
Area **plurirettangolo inscritto** =
= approssimazione per difetto dell'area del trapezoide =
= somma aree rettangoli ombreggiati =

$$= m_1\Delta x + m_2\Delta x + ... + m_n\Delta x$$

Area **plurirettangolo circoscritto** =
= approssimazione per eccesso dell'area del trapezoide =
= somma aree rettangoli più alti =

$$= M_1\Delta x + M_2\Delta x + ... + M_n\Delta x$$

Si capisce che **facendo crescere *n* (numero delle suddivisioni di [a,b] in sottointervalli), potremmo ottenere approssimazioni, rispettivamente per difetto e per eccesso, tanto precise quanto lo desideriamo, dell'area del trapezoide.**



Di fronte ad una funzione continua su di un intervallo (non importa se sia o non sia monotona) per calcolare l' "area sotto la curva" potremmo anche procedere nel modo seguente:

Effettuiamo la solita suddivisione di [a,b] in n sottointervallini uguali, ciascuno di ampiezza $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$,

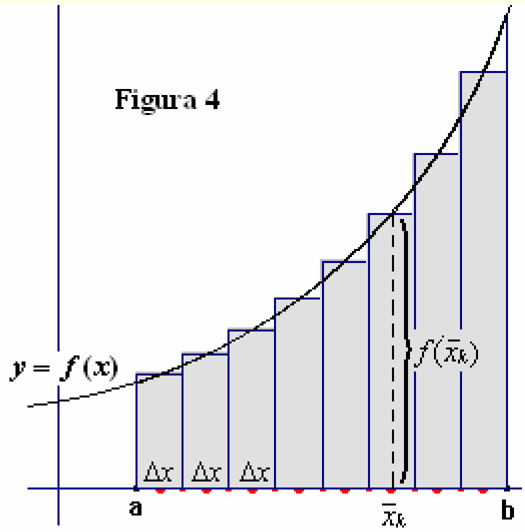
e andiamo a considerare, su ciascun intervallino $[x_{k-1}, x_k]$,
un'ascissa qualsiasi $\overline{x}_k$ (leggi: " *x segnato k* ")
(in Fig. 4 abbiamo preso $\overline{x}_k$ nel punto medio dell'intervallino, ma non dev'essere obbligatoriamente proprio così).

Se ora calcoliamo la somma delle aree dei rettangoli di base Δx e altezza $f(\overline{x}_k)$, ossia se calcoliamo

Area **plurirettangolo "intermedio"** =
= approssimazione dell'area del trapezoide =

$$= f(\overline{x}_1)\Delta x + f(\overline{x}_2)\Delta x + ... + f(\overline{x}_n)\Delta x \, ,$$

si capisce che,
facendo crescere il numero *n* di suddivisioni di [a, b], potremmo approssimare l'area del trapezoide con la precisione desiderata.



Esercitazione
Facendo i calcoli "a mano", senza calcolatrice,
determina un'approssimazione per difetto e una per eccesso
dell'area sotto la curva $y = x^3$, sull'intervallo $[1, 2]$,
tali che differiscano tra loro meno di 0,01.

Per inciso, posso dirti che l'area in questione
vale ESATTAMENTE 15/4 = 3,75.

Come ho fatto a determinarne il valore
"esatto che più esatto non si può" ?
Ti piacerebbe saperlo, vero?
EH, EH!!! Non devi far altro che proseguire la lettura!