4. Due domande al professore

- **Come si calcolavano gli integrali quando non c'era il computer?**
- **Me lo dice adesso come ha fatto a trovare** $\boxed{\int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}}$ **?**

Prof.:

Se è solo per questo, potrei dirti, per esempio, che è anche $\int_0^{\pi} sen\, x\; dx = 2$. Uah, uah!!!

Pierino:
Ma è incredibile! Mi spiega il trucco?

Prof.:
sono qui per questo. Prima di tutto, è necessario stabilire cosa si intende per "funzione integrale".

Consideriamo una funzione $y = f(x)$, continua su di un intervallo [a, b].
Si dice "**funzione integrale della $f(x)$ in [a, b]**" la funzione così definita:

$$\boxed{y = F(x) = \int_a^x f(x)\, dx} \; ,$$

il cui valore è l' area (con segno) della regione piana
compresa fra la curva di equazione $y = f(x)$ e l'asse x, sull'intervallo $[a, x]$.
Tale area dipende ovviamente dal secondo estremo x di integrazione.

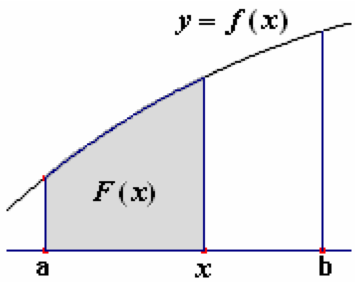


Fig. 7

Pierino:
ma qui x compare due volte: il simbolo x indica il secondo estremo di integrazione,
e, contemporaneamente, indica anche la variabile della funzione integranda!

Prof.:
Giusta osservazione. Sennonché, la variabile della funzione integranda (si dice: "la variabile di integrazione") è, come si suol dire, una **variabile "muta" o "apparente"**: niente cambia se se ne cambia il nome.

Che differenza fa, per esempio, se si scrive: $\int_1^2 x^3 dx$ oppure $\int_1^2 t^3 dt$ oppure $\int_1^2 u^3 du$ **?**

Pierino:
Beh, tutte e tre le scritture alla fin fine indicano un numero, anzi LO STESSO numero
(quello che noi avevamo approssimato al computer e che lei, professore, ci ha anticipato essere esattamente 15/4).

Prof.:

Infatti! Non c'è proprio nessuna differenza a scrivere $\int_1^2 x^3 dx$, o $\int_1^2 t^3 dt$, o $\int_1^2 u^3 du$: tutte e tre le scritture indicano il numero 15/4 (anche se l'asse delle ascisse è denominato "asse x" nel primo caso, "asse t" nel 2°, ecc.

Quindi, volendo, una stessa "funzione integrale" potrebbe essere scritta in tanti modi equivalenti:

$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx = \int_a^x f(t)\, dt = \int_a^x f(u)\, du \ldots$ Quale scrittura preferisci, Pierino?

Pierino:

Direi $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Mi è simpatica, e mi sembra più chiara della prima scrittura proposta,
perché x compare una volta sola e quindi è più evidente il ruolo che x riveste per noi,
ovvero il fatto che x è il secondo estremo di integrazione (il primo estremo di integrazione è fisso ad a),
e da questo secondo estremo di integrazione x dipende l'area considerata, che quindi è funzione di x:

$F(x)$ = Area sotto la curva sull'intervallo $[a, x]$.

Prof.:
D'accordo. Ora io dico una cosa: se noi riuscissimo a trovare una *formula*, contenente (com'è ovvio) x, che esprimesse la funzione integrale $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, allora saremmo a posto,

perché l'area che ci interessa, ossia il numero $\int_a^b f(t)\,dt$, coinciderebbe col numero $F(b)$.

Pierino: E' vero. Però scusi, professore, determinare una tale formula per $F(x)$ comporterebbe di conoscere il valore di TUTTE le infinite aree sotto la curva, che possono ottenere mantenendo a come ascissa di sinistra, e facendo variare l'ascissa di destra x sull'intervallo [a, b]. In questo modo, non complichiamo il problema?

Prof.: Apparentemente sì.

Sennonché, quando pensiamo all' $\int_a^b f(x)\,dx$, l'oggetto del nostro pensiero è un qualcosa di "statico",

mentre $\int_a^x f(t)\,dt$ è una quantità "dinamica", di cui possiamo seguire la VARIAZIONE al variare di x.

E una osservazione molto elementare ci permetterà di trarre un'informazione *ESTREMAMENTE* significativa sul modo di variare di questa funzione $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

Pierino:
A che informazione si riferisce, professore?

Prof.:

Ti invito a osservare le seguenti due funzioni integrali: $F_1(x)=\int_a^x f_1(t)\,dt$, $F_2(x)=\int_a^x f_2(t)\,dt$:

Figura 8a

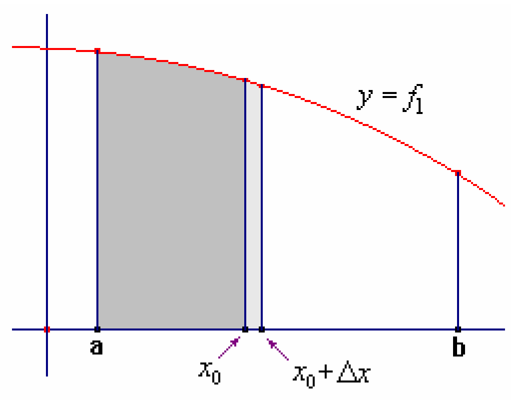
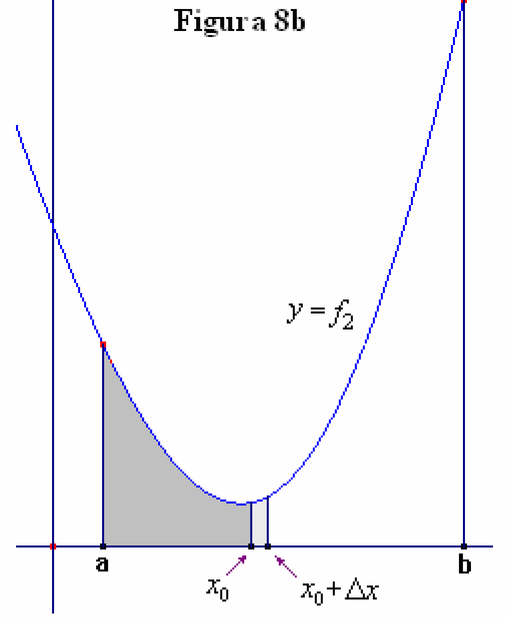


Figura 8b



Dopo aver scelto un'ascissa x_0 (la stessa per entrambi i grafici),
abbiamo considerato il valore, in x_0, di ciascuna funzione integrale:
$F_1(x_0) = \textit{area grigio scuro nella fig. di sinistra}$, $F_2(x_0) = \textit{area grigio scuro nella fig. di destra}$.
Abbiamo poi dato ad x_0 un *PICCOLO* incremento Δx (uguale per entrambe le figure).
Per effetto del passaggio da x_0 a $x_0+\Delta x$, il valore delle funzioni integrali si è modificato, diventando $F_1(x_0+\Delta x)$ e, rispettivamente, $F_2(x_0+\Delta x)$.
Ora io ti chiedo: quale fra le due funzioni integrali ha subìto l'incremento maggiore? La F_1 o la F_2 ?

Pierino:
Beh, i due incrementi ΔF_1 e ΔF_2 sono dati, nelle due figure,
dalle aree dei trapezoidini sottili compresi fra l'ascissa x_0 e l'ascissa $x_0 + \Delta x$;
ora, è evidente che il trapezoidino più grande è quello della prima figura;
quindi l'incremento maggiore, lo ha subito *la prima* delle due funzione integrali, la F_1.

Prof.:
Giusto. E senti adesso, a cosa si deve il fatto che il primo trapezoidino sia più esteso del secondo?

Pierino:
E' più esteso perché è più alto. La base, infatti, è lo stesso segmento Δx per entrambi i trapezoidini.
Ma il primo trapezoidino ha altezza maggiore del secondo, quindi la sua area è più grande.

Prof.:
Sono d'accordo.
Puntualizziamo però una cosa: in che senso mi parli di "altezza" del trapezoidino?
Il trapezoidino è limitato, a sinistra e a destra, da due segmenti verticali:
ora, le lunghezze di questi due segmenti non sono uguali …

Pierino:
E' vero. In effetti, ho parlato di "altezza" perché ogni trapezoidino mi è sembrato molto simile ad un rettangolino … il fatto è che … i due segmenti verticali che limitano lateralmente il trapezoidino differiscono di pochissimo…
certo, ciò non accadrebbe se Δx fosse grande, ma avendo noi preso un *piccolo* incremento Δx,
i due segmenti sono quasi uguali.

Prof.:
In effetti, se pensiamo Δx veramente ***molto*** piccolo,
i due segmenti verticali che limitano lateralmente il trapezoidino differiscono di pochissimo …
e il trapezoidino può essere assimilato ad un rettangolino.
Dunque, ricapitolando, tu mi hai detto che nel passaggio da x_0 a $x_0 + \Delta x$,
l'incremento più grande è stato subìto dalla funzione integrale F_1,
per il fatto che l' "altezza", diciamo così, del trapezoidino corrispondente era maggiore. Giusto.
Ora io ti chiedo: *quanto valgono* le altezze dei due trapezoidini, quelle altezze che sono responsabili,
in ultima analisi, della maggiore o minore rapidità di crescita delle funzioni integrali $F_1(x), F_2(x)$?

Pierino:
l'altezza del primo trapezoidino è pressappoco uguale a $f_1(x_0)$.
Dico "pressappoco" perché c'è comunque sempre il problema delle
"due altezze che non sono proprio uguali ma *quasi* uguali" …
e l'altezza (con le solite riserve) del secondo trapezoidino vale $f_2(x_0)$.

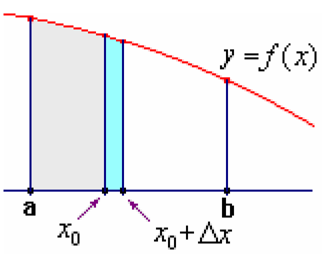
Prof.:
Dunque, in qualche modo, la rapidità con cui cresce una funzione integrale,
nelle immediate vicinanze di un'ascissa fissata, è proporzionale all'ordinata della funzione integranda,
in corrispondenza di quell'ascissa … Giusto?

Pierino: Giusto.

Prof.: Rapidità, velocità di crescita … quale concetto matematico fanno venire in mente queste parole?

Pierino: la derivata, direi.

Prof.: Infatti. Proviamo a costruire la derivata di una funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ nell'ascissa x_0.



$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{\Delta x} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\textit{area trapezoidino}}{\textit{"base" trapezoidino}} \approx \textit{"altezza" trapezoidino, che è simile a un rettangolino} \approx f(x_0)$$

Pierino:
Quindi la derivata della funzione integrale $F(x)$, calcolata in una data ascissa x_0,
è uguale al valore che la funzione integranda $f(x)$ assume, in corrispondenza della stessa ascissa x_0!

Prof.:
se le approssimazioni che abbiamo introdotto nel discorso (parlare di “altezza” del *trapezoidino*, assimilandolo ad un *rettangolino*, e scegliere come altezza di questo “rettangolino” proprio $f(x_0)$)
non sono tali da compromettere la verità della conclusione, è realmente così.
E anzi, visto che con x_0 abbiamo indicato un’ascissa fissata, ma fissata *arbitrariamente*,
questa relazione varrà *per ogni* ascissa x dell’intervallo [a, b]: si avrà dunque

(1) $F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b]$.

In effetti, ti anticipo che una revisione di tutta la questione in termini rigorosi (la faremo dopo, con calma)
conferma pienamente la validità della relazione (1), che prende il nome di
“Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale” (attribuito a Evangelista Torricelli e Isaac Barrow).

Pierino:
quindi, della funzione integrale $F(x)$, noi conosciamo, su tutto [a, b], la funzione derivata!
E a partire dalla conoscenza della funzione derivata,
in qualche modo sarà possibile risalire alla funzione di partenza!

Prof.:
L’idea è questa. Occhio però a una cosa.
Dobbiamo tener presente che, se una funzione ha una certa derivata,
anche *tutte (e sole) le funzioni che differiscono da quella per una costante addit*iva,
risultano avere la stessa derivata … quindi,
se si conosce la derivata di una funzione incognita, quest’ultima non ne risulta determinata in modo unico…
restano aperte infinite possibilità (sebbene tutte le soluzioni del problema siano funzioni
strettamente “imparentate” tra loro, in quanto differiscono l’una dall’altra per una costante additiva).
Ad esempio, se è richiesto di trovare una funzione la cui derivata è x^2+1,
sarebbe incompleto rispondere che “la funzione” in questione è $\frac{1}{3}x^3 + x$ …
voglio dire che l’uso del *singolare* sarebbe improprio,
perché andrebbe bene anche $\frac{1}{3}x^3 + x + 5$, o $\frac{1}{3}x^3 + x - \frac{1}{2}$ …
insomma, le soluzioni del problema di “trovare una funzione la cui derivata è x^2+1” sono **infinite**,
sono tutte e sole le funzioni della forma $\frac{1}{3}x^3 + x + C$, essendo C una costante arbitraria.

Pierino:
Dunque siamo di nuovo nei pasticci!
Il nostro obiettivo era, nota l’espressione analitica della funzione integrando $f(x)$,
di trovare l’espressione analitica della funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ …
perché poi, per determinare l’ “area sotto la curva” sull’intervallo [a, b],
si sarebbe trattato semplicemente di calcolare $F(b)$.
Quando abbiamo stabilito che vale la relazione $F'(x) = f(x)$, ci siamo sentiti felici perché abbiamo pensato:
ci basterà risalire dalla derivata (che è nota),
alla funzione (incognita) che genera quella derivata (diciamo: all’ “antiderivata”) …
ma ora ci rendiamo conto che, anche quando siamo capaci di fare questo, come nel caso della funzione x^2+1,
la cui antiderivata è facile da trovare, c’è il guaio di avere una antiderivata determinata non in modo unico,
ma soltanto a meno di una costante additiva.
A questo punto, se io per esempio voglio calcolare l’area sotto la curva $y = x^2+1$, sull’intervallo $[1, 3]$,
posso dire che la funzione integrale $F(x) = \int_1^x (t^2+1)dt$ è: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + C$, ma non so quanto vale C …

Prof.: Dài, che riesci a trovarmi anche C !
Rifletti bene (restiamo sull'esempio "concreto" che hai appena fatto):
cos'altro sai, riguardo alla funzione $F(x)=\int_1^x (t^2+1)\,dt$, oltre al fatto che la sua derivata vale x^2+1?

Pierino: Mumble mumble … un aiutino?

Prof.: Io dico che tu conosci un valore della funzione, in corrispondenza di una certa ascissa.
Qual è l'ascissa e qual è il valore? Pensa al significato geometrico
" $F(x)$ = Area sotto la curva, fra l'ascissa 1 e l'ascissa x " …

Pierino: Ci sono! Io so che $F(1)=0$.

Prof.: Perfetto! Ma allora tu sai : prima cosa, che $F(x)=\frac{1}{3}x^3+x+C$; seconda cosa, che $F(1)=0$.
Quanto vale dunque la costante C ?

Pierino: Si ha $\frac{1}{3}\cdot 1+1+C=0$ da cui $C=-\frac{4}{3}$.

Prof.: Giusto. Dunque $F(x)=\frac{1}{3}x^3+x-\frac{4}{3}$.
Quanto vale allora l'area sotto la curva $y=x^2+1$, sull'intervallo $[1,3]$?

Pierino: Vale $F(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3+3-\frac{4}{3}=9+3-\frac{4}{3}=\frac{32}{3}=10,66...$.

Prof.: Ce l'abbiamo fatta!!!
Dài, riproviamoci considerando un'altra funzione su di un altro intervallo!
Ad esempio, prendiamo la funzione $y=1/x$ sull'intervallo $[2,8]$. Quanto vale l'area sotto la curva?

Pierino: Dunque… la funzione integrale $F(x)=\int_2^x \frac{1}{t}dt$ ha come derivata $\frac{1}{x}$,
quindi è una fra le infinite "antiderivate" di $1/x$.
Ma io me la ricordo, una funzione la cui derivata è $1/x$: è la funzione $\ln x$.
Perciò la famiglia delle antiderivate della funzione $1/x$
è la famiglia di tutte e sole le funzioni del tipo $\ln x+C$.
La mia funzione integrale è dunque $F(x)=\ln x+C$, ma devo ancora trovare *C*.
Però io so che $F(2)=0$.
Quindi $\ln 2+C=0$ da cui $C=-\ln 2$.
Di conseguenza $F(x)=\ln x-\ln 2$.
E in definitiva

$$\text{area sotto la curva, sull'intervallo } [2,8] = \mathrm{F}(8) = \ln 8-\ln 2=\ln 4=1,3862944...$$

Sinceramente, mi sto divertendo!

Prof.: In effetti, tutto questo è molto appassionante. Vedremo più avanti anche un metodo col quale si riuscirà a semplificare le cose, evitando di dover determinare esplicitamente la costante *C*.
Puoi ora controllare tu stesso che si ha, come avevamo anticipato,

$\int_1^2 x^3dx=\frac{15}{4}$ (*una funzione con derivata* x^3 *è* $\frac{1}{4}x^4$) e $\int_0^\pi sen\,x\,dx=2$ (*una funzione che ha derivata* $sen\,x$ *è* $-cos\,x$)

> Ora però ci attende dell'altro lavoro:
> a) rivisitare da un punto di vista più *rigoroso* il cammino percorso; **dare** cioè **una dimostrazione "come si deve" del teorema di Torricelli-Barrow** , ossia dell'uguaglianza
> $$F'(x)=f(x),\quad \forall x\in[a,b].$$
> b) **Studiare le principali tecniche mediante le quali, data una funzione, anche complicata, si può risalire all'espressione della sua "antiderivata"** (non sempre questo è realizzabile).