6. Il "teorema della media del calcolo integrale"

Se una funzione $y = f(x)$ è continua su di un intervallo chiuso e limitato [a, b], allora esiste certamente, nell'intervallo aperto (a, b), almeno un'ascissa c tale che

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)}$$

Giustificazione con l'intuizione geometrica:

considerata la curva continua $y = f(x)$ sull'intervallo [a, b], e presa una retta orizzontale, sarà sempre possibile spostare questa verso l'alto o verso il basso in modo da realizzare la situazione in cui l'area del rettangolo compreso fra la retta e l'asse *x*, sull'intervallo [a, b], sia perfettamente uguale all'area del trapezoide.

L'ordinata costante dei punti di tale retta dovrà evidentemente essere compresa fra il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione su [a, b], quindi la retta sarà obbligata a tagliare la curva in almeno un punto.

L'ascissa di tale punto di intersezione retta-curva è l'ascissa c di cui il teorema afferma l'esistenza.

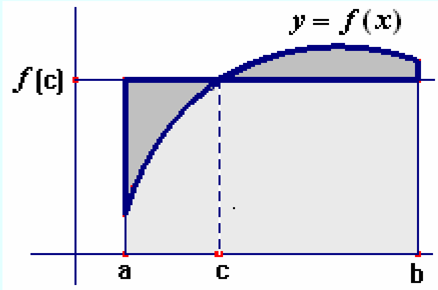

Figura 9
Le due aree più scure sono uguali, quindi sono uguali le aree
1) del trapezoide
2) del rettangolo

Dimostrazione

La funzione $f(x)$, per ipotesi continua sull'intervallo chiuso e limitato [a, b], è ivi dotata di minimo assoluto *m* e di massimo assoluto *M* (Teorema di Weierstrass).

Se ora noi prendiamo una qualsiasi "somma integrale inferiore", avremo

$$s_n = m_1\Delta x + m_2\Delta x + \ldots + m_n\Delta x \ge m\Delta x + m\Delta x + \ldots + m\Delta x = m(\Delta x + \Delta x + \ldots + \Delta x) = m(b-a)$$

e analogamente, presa una qualsivoglia somma integrale superiore, avremo

$$S_n = M_1\Delta x + M_2\Delta x + \ldots + M_n\Delta x \le M\Delta x + M\Delta x + \ldots + M\Delta x = M(\Delta x + \Delta x + \ldots + \Delta x) = M(b-a).$$

Poiché dunque per ogni n risulta

$$m(b-a) \le s_n \le S_n \le M(b-a)$$

si avrà

$$m(b-a) \le \lim_{n\to\infty} s_n \le \lim_{n\to\infty} S_n \le M(b-a)$$

ed essendo $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$

sarà dunque $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

da cui infine $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$.

Esiste perciò ("teorema dei valori intermedi") un'ascissa *c*, con $a < c < b$, tale che

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \quad \text{quindi} \quad \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c), \text{ C.V.D.}$$

L'ordinata $\boxed{f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = V_m}$ viene chiamata "**valor medio**" della funzione $f(x)$ su [a, b].