8. Come si calcola nella pratica un integrale definito

Grazie al Teorema Fondamentale, dovendo calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$, è lecito procedere come segue.

Il nostro obiettivo è di scrivere l'espressione della funzione integrale $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$,
della quale ci interesserà poi calcolare il valore $F(b)$.
Poiché il Teorema ci assicura che $F'(x)=f(x)$, ricaveremo dunque l'espressione analitica della $F(x)$ determinando l' "antiderivata" (o "primitiva") della $f(x)$, con la tecnica di "antiderivazione" opportuna.
Tuttavia, sappiamo che tale primitiva è individuata a meno di una costante additiva C.
Supponiamo ora di aver trovato **una qualsiasi fra le infinite primitive** della $f(x)$.
Sia $\varphi(x)$ tale primitiva.
$\varphi(x)$ NON è, a meno di un colpo di fortuna, proprio la funzione integrale $F(x)$ che ci interessa;
tuttavia, $F(x)$ differisce da $\varphi(x)$ per una costante additiva e si ha dunque $F(x)=\varphi(x)+C$

Adesso abbiamo **due possibilità**:

a) Possiamo **determinare il valore della costante *C***, mediante la condizione $F(a)=0$.
Avremo: $\varphi(a)+C=0$ da cui $C=-\varphi(a)$ e quindi $F(x)=\varphi(x)-\varphi(a)$.
E a questo punto, concluderemo scrivendo: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)=\varphi(b)-\varphi(a)$

b) Oppure **(più conveniente!)** possiamo tenere presente il risultato definitivo $\int_a^b f(x)\,dx=\varphi(b)-\varphi(a)$

e **imboccare** quindi **una "scorciatoia"**:
evitiamo di ricavare *esplicitamente* la funzione integrale $F(x)$,
perché in fondo ci basta quella primitiva $\varphi(x)$ che avevamo trovato "antiderivando" la $f(x)$;
prendiamo dunque la nostra brava primitiva $\varphi(x)$
e calcoliamo la differenza fra i valori che essa assume in *b* e in *a* rispettivamente.
Di solito la procedura si espone con una simbologia speciale, molto efficace.

Si scrive:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=[\varphi(x)]_a^b=\varphi(b)-\varphi(a)}$$

Il simbolo $[\varphi(x)]_a^b$ è semplicemente un comodo "pro memoria".
Serve, molto banalmente, per "inscatolare" la $\varphi(x)$
in modo da averla lì bella comoda,
e contemporaneamente indicare che di questa funzione
si dovranno calcolare i valori in b e in a, per farne la differenza.

RICAPITOLAZIONE

Il **calcolo di un' "area sotto la curva", di un "integrale definito"**, richiede di aprire una "finestra" a sé stante, per la determinazione di una *primitiva* della funzione integranda $f(x)$.
Vale a dire,
il calcolo di un integrale *definito* comporta di effettuare *prima* il calcolo di un integrale *indefinito*.

Riferiamoci ad un esempio: **supponiamo di dover calcolare** $\int_1^2 x^3\,dx$.

La procedura consta di **TRE FASI**.

1. **Si determina l'integrale indefinito**: $\int x^3\,dx=\frac{1}{4}x^4+C$ (in questo caso è stato facile, non sempre lo è)
2. **Si prende una qualunque delle** infinite **primitive trovate**, ad esempio $\frac{1}{4}x^4$.
3. **Si calcola la differenza dei due valori che la primitiva considerata assume, in corrispondenza del secondo estremo di integrazione e del primo, nell'ordine.**

Si scrive cioè $\int_1^2 x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2=\frac{1}{\cancel{4}}\cdot\cancel{16}^{4}-\frac{1}{4}\cdot 1=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

Ecco fatto!
L'"area sotto la curva" vale,
nel nostro esempio, 15/4=0.375

ALTRI ESEMPI

- Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1 - 0 = 1$$

- Calcolare $\int_{10}^{20} \frac{1}{x} dx$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int_{10}^{20} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{10}^{20} = \ln 20 - \ln 10 = \ln\frac{20}{10} = \ln 2 \approx 0.693$$

- Calcolare $\int_{-1}^{1} \left(x^2 - x\right) dx$

$$\int \left(x^2 - x\right) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2 - x\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

ESERCIZI

Determina il valore degli integrali indicati:

1) $\int_0^2 (4x - 3)\, dx$

2) $\int_0^1 e^x\, dx$

3) $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx$

4) $\int_1^2 \left(1 + x^2\right) dx$

5) $\int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx$

RISPOSTE

1) 2 2) $e - 1 \approx 1.718$ 3) $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$ 4) $\frac{10}{3}$ 5) $1 + \ln 4 \approx 2,386$