10. Integrazione delle funzioni RAZIONALI FRATTE (= rapporti di polinomi)

Studieremo ora tecniche specifiche per gli integrali della forma

$$\boxed{\int \frac{A(x)}{B(x)}dx},$$

essendo $A(x)$ e $B(x)$ due **polinomi**.

E' lecito supporre che il numeratore $A(x)$ sia di grado inferiore rispetto al denominatore $B(x)$: infatti, se così non fosse, ci si potrebbe pur sempre riportare a questo caso, sostanzialmente tramite una divisione fra polinomi, come mostra l'esempio seguente.

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{x+2}dx$$

Poiché il numeratore **non** è di grado inferiore rispetto al denominatore, svolgiamo la divisione:

$$
\begin{array}{rrr|l}
\multicolumn{3}{c|}{\overbrace{x^3 \qquad\quad -x+1}^{A(x)}} & \overbrace{x+2}^{B(x)} \\
-x^3 - 2x^2 & & & \underbrace{x^2-2x+3}_{Q(x)} \\ \hline
/ \; -2x^2 & -x & +1 & \\
2x^2 & +4x & & \\ \hline
/ & 3x & +1 & \\
 & -3x & -6 & \\ \hline
 & / & \underbrace{-5}_{R(x)} &
\end{array}
$$

Ora abbiamo a disposizione l'identità

$$x^3 - x + 1 = (x^2 - 2x + 3)(x+2) - 5$$

e ciò fa sì che il nostro integrale possa essere trascritto come:

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{x+2}dx = \int \frac{(x^2 - 2x + 3)(x+2) - 5}{x+2}dx =$$

$$= \int \left[\frac{(x^2 - 2x + 3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} - \frac{5}{x+2} \right] dx = \int \left(x^2 - 2x + 3 - \frac{5}{x+2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 5\ln|x+2| + c$$

In generale, di fronte ad un integrale di funzione razionale fratta $\int \frac{A(x)}{B(x)}dx$

in cui sia $\deg(A(x)) \geq \deg(B(x))$ **(*deg* significa "grado", dall'inglese *degree*)**

- ♪ si svolgerà la **divisione** $A(x) : B(x)$,
- ♫ poi si utilizzerà l'**identità**

$$\textit{dividendo} = \textit{quoziente} \cdot \textit{divisore} + \textit{resto}$$
$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$$

che permetterà di scrivere la funzione integranda sotto una forma diversa:

$$\boxed{\int \frac{A(x)}{B(x)}dx} = \int \frac{Q(x) \cdot B(x) + R(x)}{B(x)}dx = \int \left[\frac{Q(x) \cdot \cancel{B(x)}}{\cancel{B(x)}} + \frac{R(x)}{B(x)} \right] dx = \boxed{\int Q(x)dx + \int \frac{R(x)}{B(x)}dx}$$

In tal modo ci si ricondurrà all'integrazione del **polinomio $Q(x)$** (immediata) e della **funzione razionale fratta $R(x)/B(x)$**.

Ma **in quest'ultima il numeratore è di grado inferiore rispetto al denominatore**, perché in una divisione di polinomi il polinomio resto ha sempre grado minore rispetto al polinomio divisore.

Il caso in cui il denominatore è di 1° grado

Se il polinomio a denominatore è di 1° grado,
allora, per quanto sopra, possiamo supporre che il numeratore sia di grado zero, cioè sia una costante.
Dunque il nostro integrale sarà della forma

$$\boxed{\int \frac{k}{ax+b}dx}$$

e procederemo come nell'esempio che segue:

$$\int \frac{7}{3x-8}dx = 7\int \frac{1}{3x-8}dx = \frac{7}{3}\int \frac{3}{3x-8}dx = \frac{7}{3}\ln|3x-8| + c \quad \text{(NOTA)}$$

In generale:

$$\boxed{\int \frac{k}{ax+b}dx =} \; k\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{k}{a}\int \frac{a}{ax+b}dx = \boxed{\frac{k}{a}\ln|ax+b| + c}$$

NOTA

Per la precisione, sarebbe $\frac{7}{3}\int \frac{3}{3x-8}dx = \frac{7}{3}\left(\ln|3x-8| + c\right) = \frac{7}{3}\ln|3x-8| + \boxed{\frac{7}{3}c}$;

d'altra parte, poiché c indica una costante arbitraria, anche $\frac{7}{3}c$ sarà una costante arbitraria;
e questa costante arbitraria potrà essere indicata ancora con c.

Volendo effettuare tutti i passaggi, con perfetta salvaguardia della correttezza formale, si potrebbe scrivere:

$$\frac{7}{3}\int \frac{3}{3x-8}dx = \frac{7}{3}\left(\ln|3x-8| + \boxed{c_1}\right) = \frac{7}{3}\ln|3x-8| + \boxed{\frac{7}{3}c_1} = \frac{7}{3}\ln|3x-8| + \boxed{c}$$

Ma ***NELLA PRATICA*, questi passaggi e ragionamenti vengono di norma saltati**
e si scrivono direttamente catene che portano dappertutto la sola "c":

$$\int \frac{7}{3x-8}dx = 7\int \frac{1}{3x-8}dx = \frac{7}{3}\int \frac{3}{3x-8}dx = \frac{7}{3}\ln|3x-8| + c$$

ESERCIZI

1) $\int \frac{2}{10x+13}dx$ 2) $\int \frac{dx}{5(1-3x)}$ 3) $\int \frac{10x-13}{10x+13}dx$ Suggerimento: $\frac{10x-13}{10x+13} = \frac{10x+13-26}{10x+13} = \ldots$

4) $\int \frac{x}{3x-4}dx$ 5) $\int \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{3}{4x+5} + 6x\right)dx$ 6) $\int \frac{dx}{x^2+x}$ Suggerimento: $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

RISPOSTE 1) $\frac{1}{5}\ln|10x+13| + c$ 2) $-\frac{1}{15}\ln|1-3x| + c$ *oppure* $-\frac{1}{15}\ln|5(1-3x)| + c$ (NOTA)

3) $x - \frac{13}{5}\ln|10x+13| + c$ 4) $\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}\ln|3x-4| + c$

5) $\frac{1}{2}\ln|2x-1| - \frac{3}{4}\ln|4x+5| + 3x^2 + c$ 6) $\ln|x| - \ln|x+1| + c = \ln\frac{|x|}{|x+1|} + c = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c$

NOTA $\int \frac{dx}{5(1-3x)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1-3x} = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\ln|1-3x|\right) + c = -\frac{1}{15}\ln|1-3x| + c$

oppure: $\int \frac{dx}{5(1-3x)} = \int \frac{dx}{5-15x} = -\frac{1}{15}\ln|5-15x| + c = -\frac{1}{15}\ln|5(1-3x)| + c =$

$= -\frac{1}{15}\left(\ln 5 + \ln|1-3x|\right) + c = -\frac{1}{15}\ln 5 - \frac{1}{15}\ln|1-3x| + c$

Questo risultato equivale al precedente, perché
se c è una costante arbitraria, allora anche $-\frac{1}{15}\ln 5 + c$ è una costante arbitraria!

Il caso in cui il denominatore è di 2° grado

Allora, per quanto sopra, possiamo supporre che il numeratore sia di grado 0 o di grado 1:

$$\boxed{\int \frac{kx+h}{ax^2+bx+c}\,dx}$$

L'integrazione si effettua con 3 tecniche diverse, a seconda che, nel trinomio ax^2+bx+c, sia:

I. $\Delta > 0$
II. $\Delta = 0$
III. $\Delta < 0$

Primo sottocaso: $\boxed{\Delta > 0}$

E' noto che un trinomio di 2° grado con $\Delta > 0$ è scomponibile in due fattori di 1° grado, distinti fra loro.
La tecnica di integrazione consiste nell'**effettuare la scomposizione** e poi nello
spezzare la frazione in una somma algebrica di due frazioni col denominatore di primo grado.

Esempio: $$\int \frac{3x+4}{\underbrace{2x^2-x-1}_{\substack{\Delta= \\ =b^2-4ac=9>0}}}\,dx$$

Consideriamo la funzione integranda, scomponiamone il denominatore,
e scriviamola come somma algebrica di due frazioni aventi
per denominatori i due fattori di primo grado ottenuti
e per numeratori **due costanti *A, B* da determinarsi in modo opportuno**:

$$\frac{3x+4}{2x^2-x-1}=\frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-1}$$

Si tratta ora di stabilire per quali valori di A, B l'uguaglianza

$$\frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-1}$$

è verificata per tutti i valori di x, ossia è un'identità.

Dovrà essere, "identicamente" (cioè: per ogni x),

$$\frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)}=\frac{A(x-1)+B(2x+1)}{(2x+1)(x-1)}$$
$$\frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)}=\frac{Ax-A+2Bx+B}{(2x+1)(x-1)}$$
$$\frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)}=\frac{(A+2B)x+(-A+B)}{(2x+1)(x-1)}$$

e a tale scopo A, B dovranno soddisfare il sistema $\begin{cases} A+2B=3 \\ -A+B\ =4 \end{cases}$

Risolvendo, si ha $\begin{cases} A=-5/3 \\ B=7/3 \end{cases}$ da cui $\dfrac{3x+4}{(2x+1)(x-1)}=\dfrac{-\frac{5}{3}}{2x+1}+\dfrac{\frac{7}{3}}{x-1}$

Il nostro integrale allora diventa:

$$\int \frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)}\,dx=\int\left(\frac{-\frac{5}{3}}{2x+1}+\frac{\frac{7}{3}}{x-1}\right)dx=-\frac{5}{3}\int\frac{1}{2x+1}\,dx+\frac{7}{3}\int\frac{1}{x-1}\,dx=-\frac{5}{6}\int\frac{2}{2x+1}\,dx+\frac{7}{3}\int\frac{1}{x-1}\,dx=$$
$$=-\frac{5}{6}\ln|2x+1|+\frac{7}{3}\ln|x-1|+c$$

PROVACI TU!!! Fai vedere che si ha $\displaystyle\int \frac{x-38}{x^2-13x+22}\,dx=4\ln|x-2|-3\ln|x-11|+c$

Secondo sottocaso: $\boxed{\Delta = 0}$

Un trinomio di 2° grado con $\Delta = 0$
è uguale a un **quadrato di binomio, eventualmente moltiplicato per una costante**.

Ma aspettiamo un attimo, prima di effettuare la scomposizione:
la prima cosa da fare, infatti, è di
far comparire a numeratore la derivata del denominatore,
come illustrato dall'esempio che segue.

Esempio: $\displaystyle\int \frac{x+1}{\underbrace{4x^2-4x+1}_{\substack{\Delta = b^2-4ac = \\ =16-16=0}}}\,dx$

La derivata del denominatore $4x^2-4x+1$ è $8x-4$.
Innanzitutto, vogliamo far comparire a numeratore questa espressione.

Avremo:

$$\int \frac{x+1}{4x^2-4x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{8x+8}{4x^2-4x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{8x-4+12}{4x^2-4x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{8x-4}{4x^2-4x+1} + \frac{12}{4x^2-4x+1}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{8x-4}{4x^2-4x+1}\,dx + \frac{\cancel{12}^{\,3}}{\cancel{8}_{\,2}}\int \frac{1}{(2x-1)^2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\ln\left|4x^2-4x+1\right| + \frac{3}{2}\int (2x-1)^{-2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\ln(2x-1)^2 + \frac{3}{4}\int 2(2x-1)^{-2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\cdot 2\ln|2x-1| + \frac{3}{4}\cdot\frac{(2x-1)^{-2+1}}{-2+1} + c =$$
$$= \frac{1}{4}\ln|2x-1| - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2x-1} + c =$$
$$= \frac{1}{4}\ln|2x-1| - \frac{3}{4(2x-1)} + c$$

PROVACI TU!!! Fai vedere che si ha $\displaystyle\int \frac{x}{25x^2+20x+4}\,dx = \frac{1}{25}\ln|5x+2| + \frac{2}{25(5x+2)} + c$

Terzo sottocaso: $\boxed{\Delta < 0}$

Di un trinomio di 2° grado ax^2+bx+c con $\Delta<0$, noi sappiamo che:

- non è scomponibile in fattori
  (a meno di utilizzare coefficienti complessi: ma in questo contesto, non se ne parla neppure!)
- si può scrivere come $a[(x+k)^2+p]$, essendo $p>0$.

La tecnica di integrazione, in questo caso, consiste nel **ricondursi alla derivata di un "arco tangente"**, come illustrato dall'esempio che segue.
Anche qui, come nel sottocaso precedente (quello del $\Delta=0$)
occorre innanzitutto far comparire a numeratore la derivata del denominatore.

Esempio: $\displaystyle\int \frac{x-1}{\underbrace{x^2-6x+11}_{\substack{\Delta=b^2-4ac=\\=36-44<0}}}dx$

$$\int \frac{x-1}{x^2-6x+11}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-6x+11}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-6+4}{x^2-6x+11}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{2x-6}{x^2-6x+11}+\frac{4}{x^2-6x+11}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-6}{x^2-6x+11}dx+\frac{1}{2}\int\frac{4}{x^2-6x+11}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2x-6}{x^2-6x+11}dx}_{\mathrm{I}_1}+2\underbrace{\int\frac{1}{x^2-6x+11}dx}_{\mathrm{I}_2}$$

Si tratta ora di risolvere i due integrali $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2$:

- il primo porta immediatamente a un logaritmo,
- il secondo va ricondotto ad un $arc\,tg$.

Dunque:

$$\mathbf{I_1}=\int\frac{2x-6}{x^2-6x+11}dx=\ln(x^2-6x+11)+c$$

(abbiamo omesso il valore assoluto perché, com'è noto, un trinomio di 2° grado con $\Delta<0$ e 1° coefficiente positivo è sempre >0, per ogni valore della variabile)

$$\mathbf{I_2}=\int\frac{1}{x^2-6x+11}dx=\int\frac{1}{x^2-6x+9+2}dx=$$
$$=\int\frac{1}{2+(x-3)^2}dx=\int\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+(x-3)^2}{2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\frac{(x-3)^2}{2}}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2}dx\overset{\text{NOTA}}{=}\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2}dx=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}arc\,tg\frac{x-3}{\sqrt{2}}+c$$

NOTA:
stiamo cercando di portarci nelle condizioni di poter applicare la formula di integrazione
$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx=arc\,tg\,f(x)+c$.
La funzione che nella formula è indicata con $f(x)$ *è per noi la* $\dfrac{x-3}{\sqrt{2}}$.

E si ha $D\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{2}}\right)=D\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-3)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

In definitiva avremo

$$\boxed{\int\frac{x-1}{x^2-6x+11}dx}=\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2x-6}{x^2-6x+11}dx}_{\mathrm{I}_1}+2\underbrace{\int\frac{1}{x^2-6x+11}dx}_{\mathrm{I}_2}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+11)+2\frac{\sqrt{2}}{2}arc\,tg\frac{x-3}{\sqrt{2}}+c=\boxed{\ln\sqrt{x^2-6x+11}+\sqrt{2}\,arc\,tg\frac{x-3}{\sqrt{2}}+c}$$

PROVACI TU!!! Fai vedere che si ha $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+2x+65}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+65\right)-\frac{1}{8}arc\,tg\frac{x+1}{8}+c$

ESERCIZI

1) $\int \frac{4x-22}{x^2-6x+8}dx$

2) $\int \frac{x+3}{x^2-1}dx$

3) $\int \frac{4x-3}{(3x-1)(2x-1)}dx$

4) $\int \frac{x+7}{x^2-4x+4}dx$

5) $\int \frac{x-1}{(3x-2)^2}dx$

6) $\int \frac{1}{x^2-4x+5}dx$

7) $\int \frac{x}{x^2-2x+26}dx$

8) $\int \frac{x+3}{16x^2+8x+5}dx$

9) $\int \frac{x+2}{4x^2-4x+10}dx$

10) $\int \frac{2x}{x^2-10x+25}dx$

11) $\int \frac{x+2}{5x^2-2x}dx$

12) $\int \frac{1}{9x^2+6x+1}dx$

13) $\int \frac{2x+7}{x^2+20x+136}dx$

14) $\int \frac{5x+19}{x^2+x-30}dx$

15) $\int \frac{x}{x^2+x+1}dx$

RISPOSTE

1) $7\ln|x-2|-3\ln|x-4|+c$ 2) $2\ln|x-1|-\ln|x+1|+c$ 3) $\frac{5}{3}\ln|3x-1|-\ln|2x-1|+c$

4) $\ln|x-2|-\frac{9}{x-2}+c$ 5) $\frac{1}{9}\ln|3x-2|+\frac{1}{9(3x-2)}+c$ 6) $arctg(x-2)+c$

7) $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+26)+\frac{1}{5}arctg\frac{x-1}{5}+c$ 8) $\frac{1}{32}\ln(16x^2+8x+5)+\frac{11}{32}arctg\frac{4x+1}{2}+c$

9) $\frac{1}{8}\ln(4x^2-4x+10)+\frac{5}{12}arctg\frac{2x-1}{3}+c$ 10) $2\ln|x-5|-\frac{10}{x-5}+c$

11) $\frac{6}{5}\ln|5x-2|-\ln|x|+c$ 12) $-\frac{1}{3(3x+1)}+c$ 13) $\ln|x^2+20x+136|-\frac{13}{6}arctg\left(\frac{x+10}{6}\right)+c$

14) $\ln|x+6|+4\ln|x-5|+c$ 15) $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$

Il caso in cui il denominatore è di grado superiore al secondo

Di fronte all'integrale di un rapporto tra due polinomi $\int \frac{M(x)}{N(x)}dx$

nel quale il grado del denominatore sia superiore a 2,
ossia $\deg\left(N(x)\right) > 2$,
innanzitutto scomporremo in fattori il denominatore $N(x)$.

I fattori ottenuti potranno essere dei tipi seguenti:

- $ax+b$
- $(ax+b)^n, \ n>1$
- $ax^2+bx+c \ \ con \ \ \Delta<0$ (trinomio di 2° grado non scomponibile utilizzando coefficienti reali)
- $\left(ax^2+bx+c\right)^n \ \ con \ \ \Delta<0, \ n>1$

A questo punto,
cercheremo di decomporre la frazione $\frac{M(x)}{N(x)}$ in una somma algebrica di frazioni più semplici.

- Per ogni fattore $ax+b$ prepareremo una frazione della forma $\frac{A}{ax+b}$
- Per ogni fattore $(ax+b)^n$ prepareremo *n* frazioni della forma
  $$\frac{A_1}{ax+b}, \frac{A_2}{(ax+b)^2}, \ \dots \ , \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$
- Per ogni fattore ax^2+bx+c prepareremo una frazione della forma $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
- Per ogni fattore $(ax^2+bx+c)^n$ prepareremo *n* frazioni della forma
  $$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}, \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}, \ \dots \ , \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Infine **determineremo le costanti in gioco in modo che**
la somma algebrica di tali frazioni sia identicamente uguale alla frazione iniziale $\frac{M(x)}{N(x)}$.

Per illustrare il procedimento, consideriamo l'integrale seguente: $\boxed{\mathrm{I} = \int \frac{x(2x^2-4x+5)}{x^4-x^3-x+1}dx}$

$$\frac{x(2x^2-4x+5)}{x^4-x^3-x+1} = \frac{2x^3-4x^2+5x}{x^3(x-1)-(x-1)} = \frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)(x^3-1)} =$$

$$= \frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A(x^3-1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{Ax^3-A+Bx^2+Bx+B+Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2Dx+D}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{(A+C)x^3+(B-2C+D)x^2+(B+C-2D)x+(-A+B+D)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$\begin{cases} A & & +C & & = & 2 \\ & B & -2C & +D & = & -4 \\ & B & +C & -2D & = & 5 \\ -A & +B & & +D & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (1)+(2)+(3)+(4) \\ (1) \\ (3)-(2) \\ (4) \end{matrix} \begin{cases} 3B=3 \\ A+C=2 \\ 3C-3D=9 \\ -A+B+D=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=1 \\ A+C=2 \\ C-D=3 \\ -A+D=-1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \\ \\ \\ (2)+(4) \end{matrix} \begin{cases} B=1 \\ A+C=2 \\ C-D=3 \\ C+D=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \\ \\ (3)+(4) \\ (4)-(3) \end{matrix} \begin{cases} B=1 \\ A+C=2 \\ 2C=4 \\ 2D=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ C=2 \\ D=-1 \end{cases}$$

E' dunque

$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \cancel{\frac{0}{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x-1}{x^2+x+1}$$

e di conseguenza:

$$\mathrm{I} = \int \frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = \int\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2x-1}{x^2+x+1}\right]dx = \underbrace{\int\frac{1}{(x-1)^2}dx}_{\mathrm{I}_1} + \underbrace{\int\frac{2x-1}{x^2+x+1}dx}_{\mathrm{I}_2}$$

$$\mathrm{I}_1 = \int\frac{1}{(x-1)^2}dx = \int(x-1)^{-2}dx = \frac{(x-1)^{-1}}{-1}+c = -\frac{1}{x-1}+c$$

$$\mathrm{I}_2 = \int\frac{2x-1}{x^2+x+1}dx = \int\frac{2x+1-2}{x^2+x+1}dx = \int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - 2\int\frac{1}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \ln\left|x^2+x+1\right| - 2\int\frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}dx = \ln\left|x^2+x+1\right| - 2\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$= \ln\left|x^2+x+1\right| - 2\int\frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}dx = \ln\left|x^2+x+1\right| - 2\int\frac{\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}dx =$$

$$= \ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{8}{3}\int\frac{1}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2}dx = \ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{\cancel{8}^{4}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2}dx =$$

$$= \ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{4\sqrt{3}}{3}arctg\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+c$$

Finalmente avremo $\boxed{\mathrm{I} = \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2 = -\frac{1}{x-1}+\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{4\sqrt{3}}{3}arctg\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+c}$

ESERCIZI

1) $\int\frac{5x^2+15x+12}{x^3+4x^2+4x}dx$ 2) $\int\frac{x^3+2x^2-3x+8}{x^3+4x}dx$ 3) $\int\frac{10x^2+2x+10}{x^4+2x^2+1}dx$

4) $\int\frac{x^5+2x^3+8x^2+5x-1}{x^3(x+1)}dx$ 5) $\int\frac{3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}dx$ 6) $\int\frac{44x^3-56x^2-24x+18}{x^2(2x-3)^2}dx$

RISPOSTE

1) $3\ln|x|+2\ln|x+2|+\frac{1}{x+2}+c$ 2) $x+2\ln|x|-\frac{7}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right)+c$ 3) $10\,arctg\,x-\frac{1}{x^2+1}+c$

4) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}-x-\frac{6}{x}+2\ln|x|+\ln|x+1|+c$ 5) $\frac{1-6x}{2(x-1)^2}+c$ 6) $-\frac{2}{x}-\frac{1}{2x-3}+11\ln|2x-3|+c$