

11. Integrazione “PER PARTI”

Capita a volte che la funzione integranda si presenti come il prodotto di due funzioni, tali che nessuna di esse sia la derivata dell'altra, ma tali però che **fra le due, almeno una sia “facilmente integrabile”**. In questi casi può talvolta “funzionare” la cosiddetta **regola di integrazione per parti**.

Non vogliamo rappresentarla subito tramite una formula:

infatti, la regola si assimila più facilmente se è descritta a parole.

Anzi, **sarà estremamente conveniente studiarla la “filastrocca” a memoria** e ripetersela passo a passo mentre la si applica.

Premesso che

- il fattore “facilmente integrabile” viene chiamato **“fattor differenziale” (fd)**
- mentre l'altro fattore viene detto **“fattor finito” (ff)**,

la regola dice così:

**“fattor finito per (moltiplicato)
l'integrale (NOTA 1) del fattor differenziale,
– (meno)
l'integrale (NOTA 2) dell'integral trovato,
per la derivata del fattor finito”.**

NOTA 1 qui “integrale” significa “primitiva”

NOTA 2 qui “integrale” significa invece
“operatore di integrazione $\int$ ”

Va detto che la scelta del fattore da prendersi come “fattor differenziale” è legata non soltanto a questioni di “facile integrabilità”, ma anche alla previsione della natura del nuovo integrale cui si perverrà: ... sì, perché **quando si integra per parti non si conclude subito l'integrazione, ma la si riconduce al calcolo di un altro integrale**, che sia più semplice di quello assegnato.

Esempio 1

$$\int \underbrace{x}_{\text{ff}} \underbrace{\sin x}_{\text{fd}} dx = \boxed{x(-\cos x)} - \int \boxed{-\cos x} \cdot \boxed{1} dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

fattor finito $\boxed{x}$ per l'integrale del fattor differenziale $\boxed{-\cos x}$
– (meno)

l'integrale $\int$ dell' integral trovato $\boxed{-\cos x}$ per la derivata del fattor finito $\boxed{1}$

Verifica: $D(-x \cos x + \sin x + c) = -(1 \cdot \cos x - x \sin x) + \cos x = \cancel{-\cos x} + x \sin x + \cancel{\cos x} \quad \text{OK!!!}$

Prima di proseguire con gli esempi, *traduciamo la regola in formula e dimostriamola*.

Indichiamo con:

- $\int \underbrace{a(x)}_{\text{ff}} \cdot \underbrace{b(x)}_{\text{fd}} dx$ l'integrale di partenza
- $B(x)$ quello che la regola chiama l' “integrale” (nel senso di “primitiva”) del fattor differenziale

La regola afferma dunque che $\int a(x) \cdot b(x) dx = a(x) \cdot B(x) - \int B(x) \cdot a'(x) dx$

e dimostrarla significa semplicemente far vedere che $D(a(x) \cdot B(x) - \int B(x) \cdot a'(x) dx) = a(x) \cdot b(x)$

Ora:

$$\begin{aligned} D(a(x) \cdot B(x) - \int B(x) \cdot a'(x) dx) &= \underbrace{a'(x) \cdot B(x) + a(x) \cdot B'(x)}_{\text{questa è la derivata del prodotto } a(x)B(x)} - \underbrace{B(x) \cdot a'(x)}_{\substack{\text{la derivata} \\ \text{di un integrale} \\ \text{è la funzione} \\ \text{integranda}}} = \\ &= \cancel{a'(x) \cdot B(x)} + a(x) \cdot \underbrace{b(x)}_{\substack{B \text{ indicava} \\ \text{la primitiva} \\ \text{di } b: \\ B'(x) = b(x)}} - \cancel{B(x) \cdot a'(x)} = a(x) \cdot b(x), \text{ C.V.D.} \end{aligned}$$

Esempio 2 $\int \ln x \, dx = \int \underbrace{1}_{fd} \cdot \underbrace{\ln x}_{ff} \, dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$

Esempio 3 Qui si integra per parti una prima e poi una seconda volta!

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_{ff} \underbrace{e^x}_{fd} \, dx &= x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x \, dx = x^2 e^x - 2 \int \underbrace{x}_{ff} \underbrace{e^x}_{fd} \, dx = \\ &= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x \cdot 1 \, dx \right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x \, dx = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c = e^x (x^2 - 2x + 2) + c \end{aligned}$$

Esempio 4 $\int \underbrace{x^2}_{ff} \underbrace{\cos 2x}_{fd} \, dx = x^2 \cdot \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} \cdot 2x \, dx =$

$$= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \int \underbrace{x}_{ff} \underbrace{\sin 2x}_{fd} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \left[x \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) - \int -\frac{\cos 2x}{2} \cdot 1 \, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

TIPICI INTEGRALI DA RISOLVERE PER PARTI sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^n}_{ff} \underbrace{\sin x}_{fd} \, dx & \quad \int \underbrace{x^n}_{ff} \underbrace{\cos x}_{fd} \, dx & \quad \int \underbrace{x^n}_{ff} \underbrace{e^x}_{fd} \, dx & \quad \int \underbrace{x^n}_{fd} \underbrace{\ln x}_{ff} \, dx \\ \int \underbrace{\arcsin x}_{fd} \underbrace{1}_{ff} \, dx & \quad \int \underbrace{\arccos x}_{fd} \underbrace{1}_{ff} \, dx & \quad \int \underbrace{\arctg x}_{fd} \underbrace{1}_{ff} \, dx \end{aligned}$$

Esempio 5 $\int \arcsin x \, dx = \int \underbrace{1}_{fd} \cdot \underbrace{\arcsin x}_{ff} \, dx = \arcsin x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$

$$= x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \int -2x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, dx = x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

OSSERVAZIONE DI CARATTERE FORMALE

In $\int \underbrace{x^n}_{fd} \underbrace{\ln x}_{ff} \, dx$, tanto per fare un esempio, non sarebbe perfettamente corretto dire che il fatt. diff. è x^n : il “vero” fattor differenziale è, a stretto rigore, $x^n \, dx$. Il fatto è che il “fattor differenziale” dovrebbe, volendo, poter essere pensato come il “differenziale” (vedi uno dei paragrafi successivi) di una funzione. Tuttavia, nello scrivere, non siamo stati tanto a sottilizzare, perché banali ragioni di carattere grafico ci avrebbero reso un po’ scomoda questa pignoleria.

INTEGRAZIONE COL “CIRCOLO VIZIOSO APPARENTE”

Esempio 6

$$\int \underbrace{e^x}_{fd} \underbrace{\cos x}_{ff} \, dx = \cos x \cdot e^x - \int e^x (-\sin x) \, dx = e^x \cos x + \int \underbrace{e^x}_{fd} \underbrace{\sin x}_{ff} \, dx = e^x \cos x + \sin x \cdot e^x - \boxed{\int e^x \cdot \cos x \, dx}$$

Sembra che si sia generato un circolo vizioso; abbiamo infatti ritrovato l'integrale di partenza.

Ma se si scrivono soltanto il primo e l'ultimo anello della catena, si ottiene:

$$\boxed{\int e^x \cdot \cos x \, dx} = e^x \cos x + e^x \sin x - \boxed{\int e^x \cdot \cos x \, dx} \quad \text{da cui è possibile ricavare } \boxed{\int e^x \cdot \cos x \, dx} :$$

$$2 \boxed{\int e^x \cdot \cos x \, dx} = e^x \cos x + e^x \sin x + c_1$$

$$\boxed{\int e^x \cdot \cos x \, dx} = \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{2} + c$$