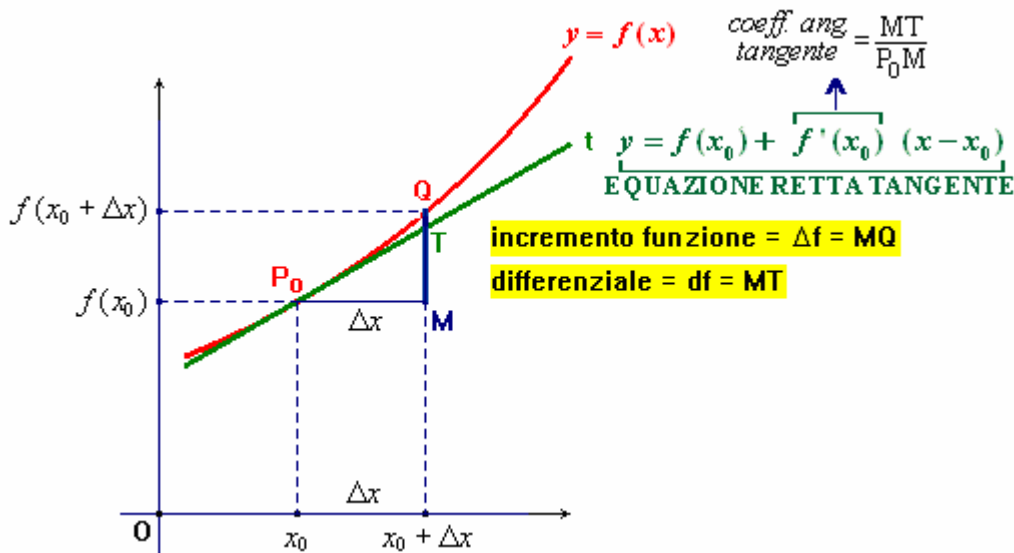


12. IL DIFFERENZIALE, questo sconosciuto



Nella figura è rappresentata una funzione $y = f(x)$ derivabile in un'ascissa x_0 .

Il grafico della f è dunque dotato di retta tangente, non verticale, nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$; tale tangente t ha, com'è noto, equazione $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ o anche $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

A partire dal valore x_0 , diamo alla variabile indipendente un incremento Δx : passiamo cioè da x_0 al nuovo valore $x_0 + \Delta x$.

Che incremento subisce, in corrispondenza, la nostra funzione?

Dall'ordinata $f(x_0)$ si va alla nuova ordinata $f(x_0 + \Delta x)$ (l'ordinata del punto Q), quindi l'incremento subito dalla funzione è

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Nella figura, tale incremento Δf è rappresentato dalla misura (con segno) del segmento orientato MQ .

Pensiamo ora a cosa succederebbe prendendo Δx molto, ma molto piccolo.

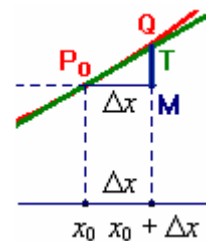
Con Δx piccolissimo, il grafico della f è vicinissimo a quello della tangente t : dunque il segmento orientato che nella figura è indicato con MQ tende ad identificarsi col segmento orientato MT , la cui misura con segno è

$$\begin{aligned} \overline{MT} &= y_T - y_M = \\ &= [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] - f(x_0) = \\ &= f'(x_0)(x - x_0) = \boxed{f'(x_0)\Delta x} \quad (\text{vedi anche NOTA}) \end{aligned}$$

Pertanto, se siamo interessati all'incremento

$$\boxed{\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = MQ}$$

che la funzione subisce, quando diamo alla x un PICCOLO incremento, facendola passare da x_0 a $x_0 + \Delta x$, potremo egregiamente approssimare Δf con la quantità $f'(x_0)\Delta x$.



NOTA:

il coeff. ang. m della retta tangente è uguale alla derivata; ma

$$m = \frac{\text{diff. ordinate}}{\text{diff. ascisse}} = \frac{MT}{P_0M}$$

da cui

$$MT = m \cdot P_0M = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Riassumendo:

$$MQ \underset{\substack{\approx \\ \text{circa} \\ \text{uguale a}}}{\approx} MT, \text{ se } \Delta x \text{ è piccolo}$$

cioè: $\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$, se Δx è piccolo.

Insomma, **l'incremento $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ subito da una funzione, in corrispondenza di un PICCOLO incremento Δx della variabile indipendente, è ben approssimato dalla quantità $f'(x_0)\Delta x$, che è "l'incremento della y , misurato *non* sul grafico della funzione, bensì sulla retta tangente"**

In Matematica e nelle sue applicazioni (ad esempio alla Fisica), è assai frequente che interessi valutare il *piccolo* incremento Δf subito da una determinata funzione f , quando si dà alla variabile indipendente un *piccolo* incremento Δx , che la porti dal valore x al valore $x + \Delta x$.

Abbiamo scoperto che tale incremento è egregiamente approssimato dalla semplice e "maneggevole" quantità $f'(x)\Delta x$ (se, beninteso, Δx è molto piccolo!)

E abbiamo anche visto che questa quantità $f'(x)\Delta x$ corrisponde all' "incremento della y , misurato *non* sul grafico della funzione, bensì sulla retta tangente".

Alla quantità $f'(x)\Delta x$ si dà un nome particolare: la si chiama il **DIFFERENZIALE** della funzione f , e la si indica con df o anche con dy .

$\underbrace{df}_{\text{oppure: } dy} = f'(x)\Delta x = \text{differenziale della funzione } f = \text{quantità che bene approssima l'incremento della } f, \text{ per un piccolo incremento della } x$

Il differenziale è dunque il prodotto della derivata, per l'incremento della variabile indipendente.

Osserviamo che:

- il differenziale è una quantità che dipende da DUE variabili: x e Δx ; tuttavia, se pensiamo x fissato, a questo punto il differenziale dipenderà soltanto da Δx .
- E' vero: il differenziale è utile, per approssimare l'incremento della funzione, soltanto quando Δx è molto piccolo; d'altra parte, il differenziale è una quantità che resta definita anche quando Δx non è piccolo.
- Il significato geometrico del differenziale è importantissimo per comprendere bene. Ribadiamolo ancora una volta:
differenziale = incremento della y , misurato *non* sul grafico della funzione, bensì sulla retta tangente.

VEDIAMO UN ESEMPIETTO

Il differenziale della funzione $y = x^3$ è $dy = 3x^2\Delta x$ [si può pure scrivere: $d(x^3) = 3x^2\Delta x$].

Ciò significa che, per un piccolo incremento di x , la quantità $dy = 3x^2\Delta x$ fornisce un'ottima approssimazione dell'incremento subito dalla funzione $y = x^3$.

Poniamo che si voglia valutare l'incremento subito dalla funzione $y = x^3$ nel passaggio da $x = 2$ a $x = 2,001$ ($\Delta x = 0,001$).

Bene, si potrà dire che tale incremento è molto vicino a $3 \cdot 2^2 \cdot 0,001 = 0,012$.

In effetti, andando a calcolare il VERO incremento della funzione, si trova $(2,001)^3 - 2^3 = 0,012006$.